

AALTO YLIOPISTON PERUSTIETEIDEN KORKEAKOULU
Teknillisen fysiikan ja matematiikan tutkinto-ohjelma

Taistelujoukkojen allokatioiden kustannustehokkuuden arviointi Lanchesterin taistelumallissa

Kandidaatintyö

Lars Östring
12.1.2012

Työn saa tallentaa ja julkistaa Aalto-yliopiston avoimilla verkkosivuilla. Muilta osin kaikki oikeudet pidätetään.

AALTO-YLIOPISTO PERUSTIETEIDEN KORKEAKOULU PL 11000, 00076 Aalto http://www.aalto.fi	KANDIDAATINTYÖN TIIVISTELMÄ	
Tekijä: Lars Östring		
Työn nimi: Taistelujoukkojen allokatioiden kustannustehokkuuden arviointi Lanchesterin taistelumallissa		
Tutkinto-ohjelma: Teknillisen fysiikan ja matematiikan tutkinto-ohjelma		
Pääaine: Systeemitieteet	Pääaineen koodi: F3010	
Vastuunopettaja: prof. Ahti Salo		
Ohjaaja: DI, Jussi Kangaspunta		
<p>Tiivistelmä:</p> <p>Taistelun kulkua kuvaavat matemaattiset mallit antavat päätöksentekijälle tärkeää informaatiota, jonka avulla voidaan tehdä päätöksiä taisteluissa käytettävien joukkojen koostumuksesta ja strategioista. Mallien avulla voidaan tarkastella asioita, jotka taistelun aikana jäisivät vähemmälle huomiolle.</p> <p>Tässä työssä tarkastellaan kahden epähomogeenisen joukon taistelua hyödyntäen Lanchesterin taistelumallia sekä tutkitaan joukkojen taisteluallokatioiden vaikutusta kustannustehokkuuteen. Työssä tehdään katsaus Lanchesterin taistelumalleihin ja niistä tehdyistä, tämän työn kannalta oleellisista laajennuksista sekä implementoidaan Lanchesterin taistelumalli Matlab-kirjastoksi.</p> <p>Joukkojen taisteluallokatiot määrittävät sen, miten aselajijoukon käytettävissä oleva tulivoima jaetaan vihollisten eri joukkojen kesken. Vaihtoehtoisten taisteluallokatioiden tehokkuutta tarkastellaan suhteessa viholliselle aiheutettuihin tappioihin. Lisäksi tehokkuudessa huomioidaan taistelussa menetetyt omat joukot minimoitavana kriteerinä. Taisteluallokatioihin liitetään myös kustannukset, jotka kuvastavat eri käyttötavoista aiheutuvia käyttökustannuksia.</p> <p>Tulen allokatioiden kustannustehokkuutta tutkitaan rakentamalla asejärjestelmistä ja niiden tulen allokatioista koostuvia portfolioita. Portfolioiden vaikuttavuutta ja taistelun aikana aiheutuneita käyttökustannuksia verrataan keskenään käyttäen hyväksi aikaisemmin kehiteltyjä menetelmiä.</p>		
Päivämäärä: 12.1.2012	Kieli: Suomi	Sivumäärä: 24
Avainsanat: Lanchesterin taistelumalli, taistelun mallinnus, kustannustehokkuus.		

Sisältö

1 Johdanto	1
1.1 Taustaa	1
1.2 Rakenne	1
2 Aikaisemmat tarkastelut.....	2
2.1 Lanchesterin taistelumallit	2
2.2 Lanchesterin mallien laajennukset.....	4
2.3 Lanchesterin taistelumallien hyödyntäminen.....	9
3 Monitavoitteinen optimointi ja päätösanalyysi.....	10
3.1 Tilanteen määrittely	10
3.2 Käyvät aselajiportfoliot	11
3.3 Kustannustehokkuus	13
4 Havainnollistava esimerkki	16
4.1 Kustannustehokkuuden tarkastelu	18
5 Yhteenveto.....	22
6 Viitteet.....	23

1 Johdanto

1.1 Taustaa

Ennen taistelun alkua joudutaan tekemään taistelun lopputulokseen vaikuttavia päätöksiä käytettävistä joukoista sekä niiden hyödyntämistä taistelun aikana. Koska nämä päätökset voivat vaikuttaa merkittävästi taistelun etenemiseen, päätöksentekijällä tulisi olla käytettävissään riittävästi tietoa vaihtoehtoisten päätösten vaikutuksesta taistelun kulkuun. Taistelujen kulkua kuvaavien matemaattisten mallien avulla päätöksentekijä saa tärkeitä informaatiota eri taktiikoiden vaikutuksista taistelun lopputulokseen vaarantamatta joukkojaan. Taistelumallien hyödyllisyys korostuu tilanteissa, joissa päätöksentekijällä on optimoitavana monia kriteereitä tai taistelutilanteen vaikutussuhteet ovat epäselviä tai monimutkaisia.

Lanchester (1914) muodosti ensimmäiset taistelua kuvaavat differentiaaliyhtälöt kuvaamaan taistelujoukkojen kulumista kahden joukon välisessä taistelussa, jossa joukkojen koko ja tulen tehokkuus ovat tunnettuja. Lanchesterin taistelumallia on myöhemmin laajennettu aselajikohtaisiksi malleiksi, joissa joukoilla on käytettävissä useita eri aselajeja. Tällöin päätöksentekijän pitää tehdä valintoja resurssien jakamisesta eri aselajijoukkojen kesken sekä käytettävissä olevan tulivoiman keskittämisestä vihollisten aselajijoukkoihin.

Työn tarkoituksena on tutkia joukkojen tulivoiman allokaatioiden vaikutusta kustannustehokkuuteen ja löytää kustannustehokkaat aselajiportfoliot. Koska Lanchesterin aselajikohtaisten yhtälöiden tutkiminen analyyttisillä menetelmillä käy hankalaksi aselajiluokkien lukumäärän kasvaessa, tehdään tarkastelut taistelun etenemisestä eri taisteluskenarioissa numeerisin menetelmin. Työssä implementoidaan Lanchesterin aselajikohtainen taistelumalli Matlab-ohjelmistolla ja vertaillaan erilaisten taistelujoukkojen allokaatioiden kustannustehokkuutta soveltamalla aikaisemmin kehitetyjä menetelmiä kustannustehokkuuden arviointiin (Kangaspunta 2008). Lisäksi vertaillaan tarkasteluissa saatuja tuloksia kirjallisuudesta löydettyihin analyyttisiin menetelmin saavutettuihin lopputuloksiin.

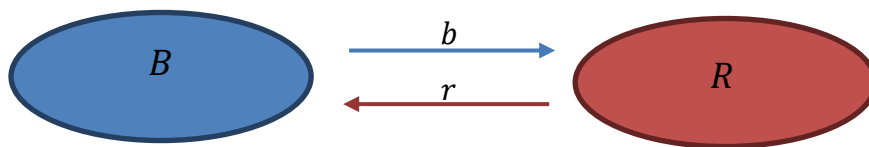
1.2 Rakenne

Luvussa 2 tehdään katsaus Lanchesterin taistelumalleihin ja niistä tehtyihin, työn kannalta oleellisiin, laajennuksiin. Luvussa 3 tutustutaan työssä tarkasteltavaan optimointiongelmaan ja määritellään päätösmuuttujat, rajoitukset ja tavoitteet. Luvussa 4 käytetään aiemmin kuvattuja menetelmiä määrittämään kustannustehokkaat aselajiportfoliot esimerkkitilanteessa. Luvussa 5 tehdään yhteenveto ja käydään läpi työssä saadut tulokset.

2 Aikaisemmat tarkastelut

2.1 Lanchesterin taistelumallit

Fredrik Lanchester muodosti joukkojen kulumista kuvaavat differentiaaliyhtälöt tutkiessaan ilmataisteluiden kulkua 1914. Merkittävää Lanchesterin taistelumallissa on se, että se oli ensimmäinen differentiaaliyhtälömalli taistelun kuvaamiseksi. Lanchesterin taistelumallissa kuvataan taistelua, jossa puolustava ja hyökkäävä joukko taistelevat keskenään, kunnes toinen joukoista tuhoutuu täysin. Taistelun kulku määräytyy joukkojen lukumäärästä ja niiden kyvystä tuhota vastustajan joukkoja, eli joukkojen tehokkuudesta, joka pysyy vakiona koko taistelun kulun ajan.



Kuva 2.1: Kahden joukon välinen taistelu, jossa joukkojen suuruudet ja tehokkuudet määräävät taistelun kulun

2.1.1 Suoran tulen laki

Lanchesterin suoran tulen malli kuvaa taistelua, jossa taisteluun osallistuvat joukot ampuvat tähdättyä tulta vihollisen joukkoihin. Joukot eivät pysty tekemään taistelun kulkuun vaikuttavia päätöksiä, joten ainoat lopputulokseen vaikuttavat seikat ovat joukkojen tehokkuudet r ja b sekä niiden lukumäärät B ja R .

Lanchester muodosti taistelujoukkojen kulumista kuvaavat yhtälöt:

$$\frac{dR(t)}{dt} = -bB(t), \quad \frac{dB(t)}{dt} = -rR(t). \quad (2.1)$$

Jotta differentiaaliyhtälöt ovat jatkuvia, on oletettava, että joukot ovat homogeenisia ja jaettaviksi pieniin osiin. Mallille voidaan muodostaa yksikäsitteinen ratkaisu, kun $B(t), R(t) > 0$ (kts. esim. Kangas 2005):

$$B(t) = B_0 \cosh brt - R_0 \sqrt{\frac{b}{r}} \sinh brt, \quad (2.2)$$

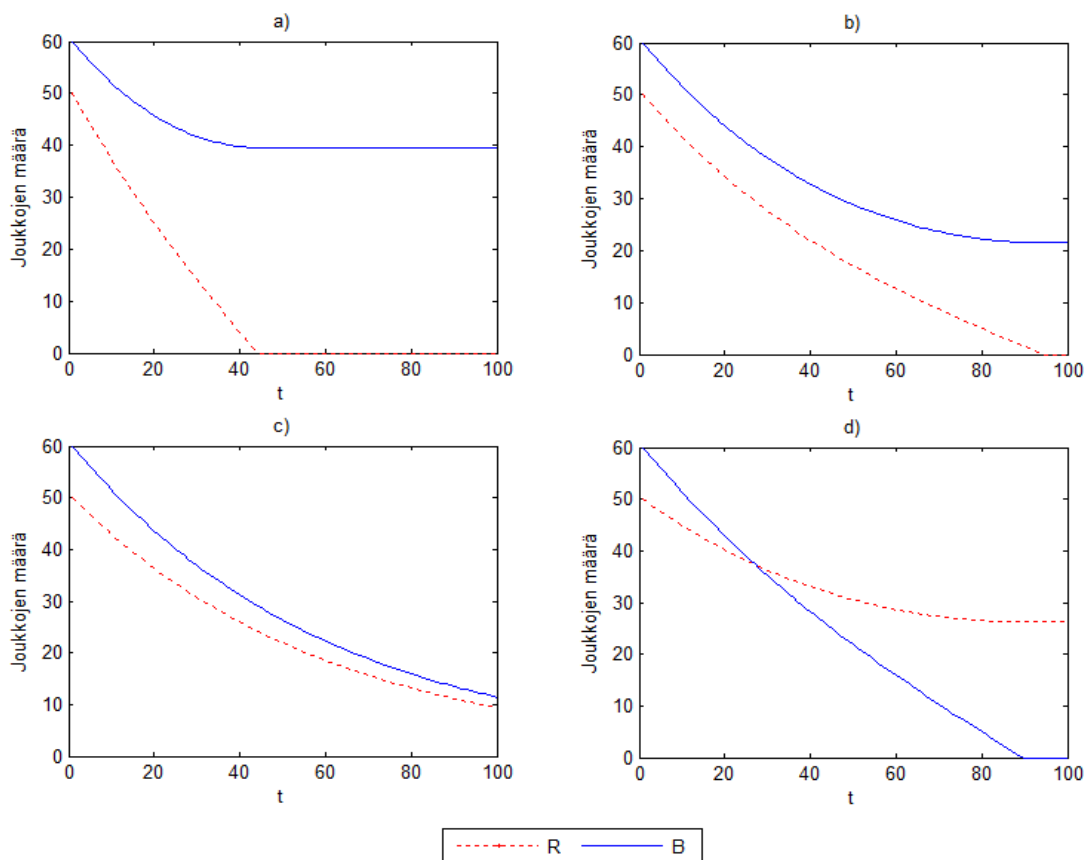
$$R(t) = R_0 \cosh brt - B_0 \sqrt{\frac{r}{b}} \sinh brt. \quad (2.3)$$

Ratkaisusta nähdään, että tulen tehokkuuden pysyessä vakiona erotus $B(t)^2b - R(t)^2r$ ei voi vaihtaa merkkiä taistelun aikana. Erotuksen merkki myös määrää taistelun lopputuloksen, jos taistelu käydään toisen osapuolen tuhoutumiseen saakka ja taistelun voittaa se osapuoli, jolla on suurempi taisteluvahvuus. Joukon taisteluvahvuus määritetään joukon suuruuden neliön tulona joukon tehokkuuden kanssa (MacKay 2009).

Lanchesterin malli on olemukseltaan hyvin yksinkertainen ja tuottaakseen luotettavia tuloksia, oletetaan joukkojen tulen tehokkuus tunnetuksi ennen taistelua ja pysyvän vakiona koko taistelun ajan. Jotta tällaiset olosuhteet pätsivät, niin taistelutilanteessa reunaehtojen on toteuduttava (Kangas 2005; MacKay 2009):

- Täydellinen näkyvyys: joukot eivät voi maastoutua tai piiloutua taistelun aikana.
- Joukot ovat jakautuneet tasaisesti taistelukentälle ja tähtäyksen kohdetta voidaan vaihtaa viiveettä.
- Täydellinen informaatio kohteen tuhoutumisesta: tulta ei kohdisteta tuhottuihin joukkoihin.
- Joukot osallistuvat taisteluun koko sen keston ajan.

Alla on esitetty esimerkkitalanne Lanchesterin suoran tulen malli alkuarvoilla $B_0 = 60, R_0 = 50, r = 0,02$. Parametrille b on annettu arvot a) 0.025, b) 0.016, c) 0.0139, d) 0.01. Kuvassa 2.2a sininen joukko on suurempi ja tehokkaampi, joten taistelu päättyy nopeasti sinisen voittoon. Kuvassa 2.2b sininen joukko voittaa tilanteen miesylivoiman ansiosta, vaikka punainen joukko on tehokkaampi. Kuvassa 2.2c joukkojen lukumäärät lähenevät toisiaan ja päädytään tasatilanteeseen, koska taisteluvahvuuksien erotus $B(t)^2b - R(t)^2r = 0$. Kuvassa 2.2d punainen joukko voittaa suuremman tehokkuutensa ansiosta.



Kuva 2.2: Esimerkki Lanchesterin suoran tulen mallin mukaisesta tilanteesta, jossa $B_0 = 60, R_0 = 50, r = 0,02$ ja parametri b saa arvot a) 0.025, b) 0.016, c) 0.0139, d) 0.01

2.1.2 Epäsuoran tulen laki

Epäsuoran tulen malli kuvaa Lanchesterin mallin tyyppistä taistelua, jossa tulta ei pystytä tähtäämään yksittäiseen maaliin, vaan se ammutaan satunnaisesti maalialueelle. Mallilla voidaan kuvata esim. tykistötulen vaikutusta jalkaväkeen. Koska tulta ei pystytä kohdistamaan yksittäiseen maaliin, aiheutuu maalialueelle tasaisesti tuhoja. Tällöin tappioiden määrä riippuu ammuttavan tulen määrän lisäksi ja maalialueelle olevien joukkojen määrästä.

Kun oletetaan, että tuli kohdistuu tasaisesti maalialueelle ja että vihollinen on jakautunut tälle alueelle tasaisesti koko taistelun ajan, voidaan epäsuoran tulen kaltaiselle tilanteelle muodostaa yhtälöt (Lanchester 1916):

$$\frac{dR(t)}{dt} = -bB(t)R(t), \quad \frac{dB(t)}{dt} = -rR(t)B(t). \quad (2.4)$$

Lanchesterin epäsuoran lain yhtälöt voidaan ratkaista muotoon (kts. esim. Kangas 2005):

$$B(t) = \begin{cases} B_0 \frac{bB_0 - rR_0}{bB_0 - rR_0 e^{-(bB_0 - rR_0)t}}, & \text{kun } bB_0 \neq rR_0 \\ B_0 \frac{1}{1 + bB_0 t}, & \text{kun } bB_0 = rR_0. \end{cases} \quad (2.5)$$

$R(t)$:n ratkaisu on symmetrinen. Ratkaisusta nähdään, että joukot eivät tuhoutu koskaan täysin. Muodostamalla epäolennainen raja-arvo, $t \rightarrow \infty$, nähdään, että suure $B(t)b - R(t)r$ ei voi vaihtaa merkkiään taistelun aikana, joten joukkojen taisteluvahvuus epäsuoran tulen mallissa voidaan muodostaa joukkojen lukumäärän ja tehokkuuden tulona (MacKay 2009).

2.2 Lanchesterin mallien laajennukset

2.2.1 Helmboldin yhtälöt

Lanchesterin taistelumalleja on kritisoitu niissä käytettyjen rajoittavien olettamuksien takia. Helmbold (1965) puuttui Lanchesterin mallin olettamukseen, jonka mukaan joukkojen tehokkuuksien oletetaan pysyvän vakiona koko taistelun ajan riippumatta joukkojen koosta tai taistelun kulusta.

Vastustajan joukkojen pienenessä, maalin hakemiseen joudutaan käyttämään enemmän aikaa, mikä laskee joukon tehokkuutta. Pienempi joukko kykenee myös maastoutumaan paremmin. Helmbold tuli siihen tulokseen, että tehokkuuksien ei tulisi olla vakioita, vaan verrannollisia joukkojen kokojen suhteeseen $z = \frac{R}{B}$. Lanchesterin suoran tulen mallista johdetut Helmboldin yhtälöt voidaan siis kirjoittaa muodossa (Helmbold 1965):

$$\frac{dR(t)}{dt} = -bf(z)B(t), \quad \frac{dB(t)}{dt} = -rf(z^{-1})R(t), \quad (2.6)$$

missä $f(z)$ on aidosti kasvava funktio siten, että $f(1) = 1$, jotta samankokoisten joukkojen taistelu vastaisi Lanchesterin mallia.

2.2.1 Lanchesterin (N, 1)-taistelumalli

Koska taistelujoukot oletetaan Lanchesterin taistelumallissa homogeenisiksi, mallilla ei voida kuvata laajempaa taistelua, jossa osapuolilla on käytettävissään useampia asejärjestelmiä tai ominaisuuksiltaan erilaisia taistelujoukkoja. Luonnollinen laajennus Lanchesterin taistelumallista onkin taistelun kuvaaminen useamman aselajijoukon avulla, jolloin tulen tehokkuudet voidaan määrittää yksittäisiä aselajeja kohtaan. Aselajikohtaisissa malleissa taistelun osapuolien lukumäärä ja selvitettävien parametrien määrä kasvaa huomattavasti Lanchesterin suoran tulen mallista, mutta yksittäisten parametrien määrittäminen helpottuu.

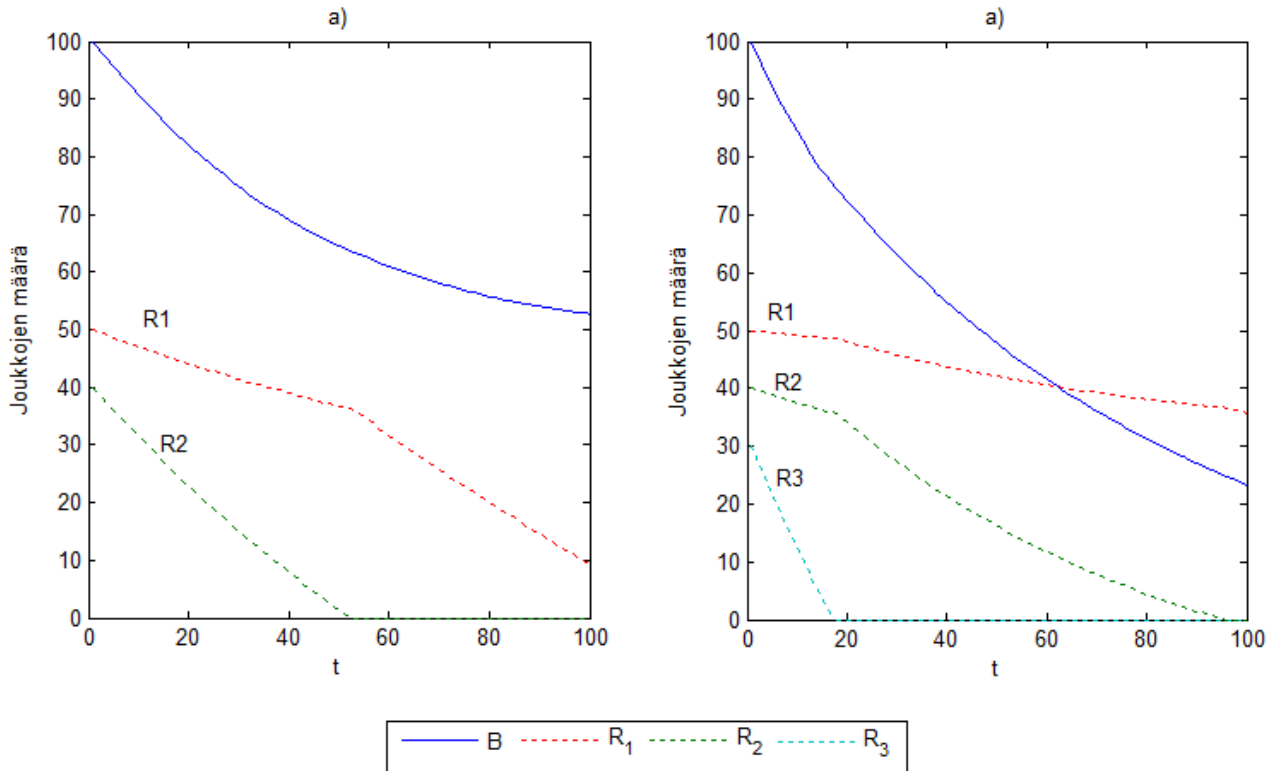
Laajennetaan Lanchesterin mallia ensiksi siten, että hyökkävällä, punaisella, osapuolella on käytettävissä N aselajia. Kutsutaan tätä mallia Lanchesterin $(N, 1)$ -malliksi. Malli voidaan kirjoittaa muodossa (kts. esim. MacKay 2009):

$$\frac{dR_i}{dt} = -\mu_i b_i B(t), \quad \frac{dB(t)}{dt} = -\sum_i r_i R_i(t), \quad (2.7)$$

missä R_i on punaisen i :nnen aselajijoukon koko, r_i on punaisen i :nnen aselajijoukon tehokkuus sinisen joukkoa vastaan, b_i on sinisten joukkojen tehokkuus punaisen i :ttä aselajijoukkoa vastaan ja μ_i on osuus sinisen joukon tulivoimasta, joka allokoidaan punaisen joukon i :ttä aselajijoukkoa kohden ($\mu_i \geq 0, \sum_i \mu_i = 1$).

Joukkojen taisteluallokaatiot μ_i määritetään ennen taistelun alkamista ja ne eivät muutu taistelun aikana, jos yhtäkään vihollisen aselajijoukkoa ei tuhota. Jos sininen joukko tuhoaa punaisen joukon i :nnen aselajijoukon, siihen osoitettu tulivoima μ_i kohdistetaan jäljelle jääneisiin vihollisen aselajijoukkoihin ($\mu_{j_t} = \frac{\mu_j}{1-\mu_i}, \mu_{i_t} = 0$).

Kuvassa 2.3 on esitetty esimerkkitalanne Lanchesterin $(N, 1)$ - taistelumallista, jossa kohdassa a) $B(0) = 100, b_1 = 0.015, b_2 = 0.01, R_1(0) = 50, R_2(0) = 40, r_1 = 0.015, r_2 = 0.01, \mu = [2/3 \ 1/3]$ ja kohdassa b) punaisella joukolla on käytettävissään vielä aselajijoukko $R_3 = 30, r_3 = 0.03, b_3 = 0.03, \mu = [0.7 \ 0.2 \ 0.1]$. Kuvista huomataan, että tilanteessa a) punaisen joukko R_2 tuhotaan hetkellä $t = 50$, jolloin siihen kohdistettu tulivoima siirretään joukkoa R_1 kohtaan. Tämä näkyy kuvassa selkänä kulmana joukon R_1 määrän muutoksessa. Tilanteessa b) on havaittavissa samanlainen tulivoiman siirtyminen, kun joukko R_3 tuhotaan ajanhetkellä $t = 19$.



Kuva 2.3: Joukkojen määrän käyttäytyminen Lanchesterin (N, 1) – malli, kun punaisella joukolla on käytettävissään a) 2, b) 3 aselajijoukkoa

2.2.2 Semi-dynaamiset allokatiot Lanchesterin (N, 1)-taistelumallissa

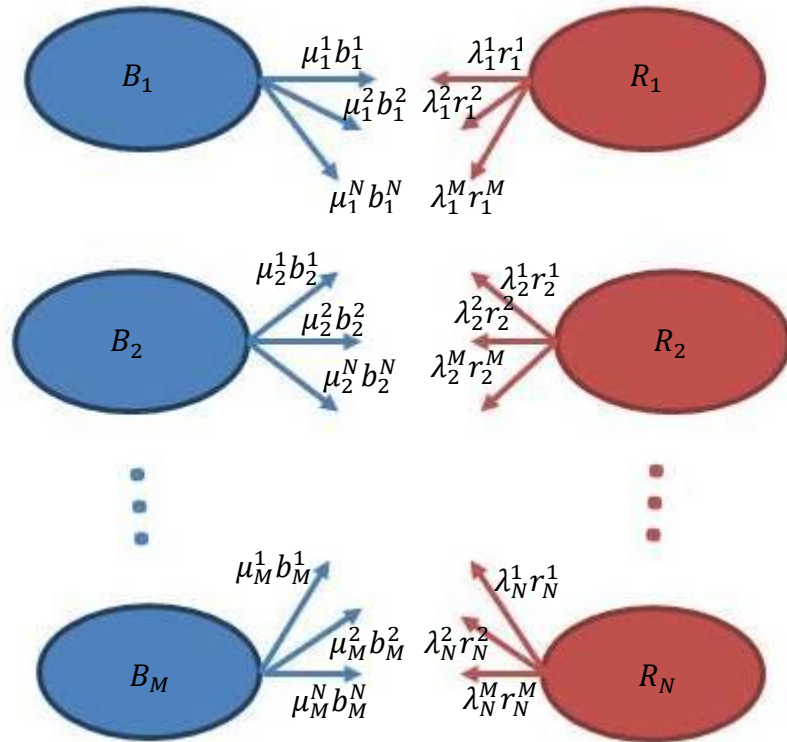
MacKay(2009) tutki Lanchesterin (N, 1)-mallin laajennusta, jossa taisteluallokaatiot eivät ole vakioita, vaan riippuvat vihollisen aselajijoukkojen vahvuuksien suhteesta. Lanchesterin semi-dynaamisessa taistelumallissa vihollisen aselajijoukkoihin kohdistettavat taisteluallokaatiot määritetään:

$$\mu_i(t) = \frac{\rho_i B_i(t)}{\sum_j \rho_j B_j(t)}, \quad (2.10)$$

missä ρ_i on aselajille määritettävä painokerroin. Mallissa otetaan siis huomioon se, että vihollisen joukkojen väheneminen voi vaikuttaa sen vaarallisuuteen. Näin joukot voivat muuttaa käyttäytymistään ilman taistelun operatiivista johtamista. Samalla kuitenkin oletetaan, että joukoilla, tai jopa yksittäisillä taistelijoilla, on käytettävissä reaaliaikainen tieto vihollisen joukkojen vahvuudesta.

2.2.3 Lanchesterin (M, N)-taistelumalli

Laajennetaan Lanchesterin taistelumalli yleiseen muotoon, jossa hyökkäävällä osapuolella on M ja puolustavalla N aselajijoukkoa (kuva 2.3).



Kuva 2.4: Kahden joukon välinen taistelu, jossa sinisellä joukolla on käytettävissään M aselajia ja punaisella joukolla N aselajia

Lanchesterin aselajikohtainen yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa (MacKay 2009):

$$\frac{dR_i(t)}{dt} = -\sum_j^n \mu_j^i b_j^i B_j(t), \quad \frac{dB_j(t)}{dt} = -\sum_i^m \lambda_i^j r_i^j R_i(t), \quad (2.11)$$

missä R_i on punaisten tyyppiä i olevien joukkojen lukumäärä, r_j^i on punaisten tyyppiä j olevien joukkojen tulivoiman teho sinisten tyyppiä i olevien joukkoja vastaan ja λ_j^i on punaisten tyyppiä j olevien joukkojen taisteluallokaatio sinisten tyyppiä i olevia joukkoja vastaan ($\lambda_j^i \geq 0, \sum_i \lambda_j^i = 1$). B_j on sinisten tyyppiä j olevien joukkojen lukumäärä, b_i^j on sinisten tyyppiä i olevien joukkojen tulivoiman teho punaisten tyyppiä j olevia joukkoja vastaan ja μ_i^j on sinisten tyyppiä i olevien joukkojen taisteluallokaatio punaisten tyyppiä j olevia joukkoja vastaan ($\mu_i^j \geq 0, \sum_j \mu_i^j = 1$).

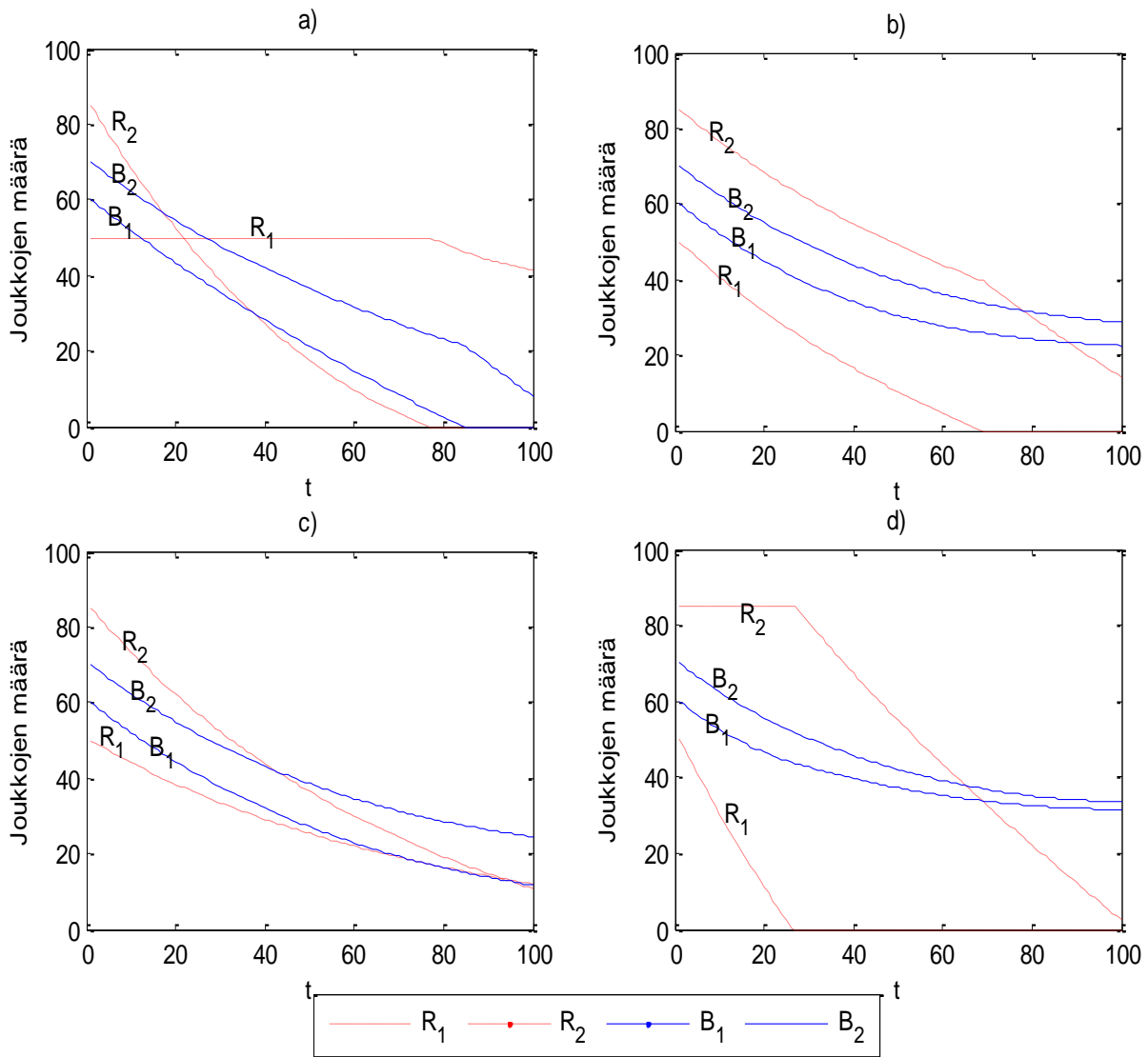
Alla on esimerkki Lanchesterin (M, N)-mallista, jossa kummallakin joukolla on käytettävissään kaksi aselajijoukkoa. Aselajijoukkojen suuruudet ja tehokkuudet sekä punaisen joukon tulien allokointi

pidetään vakiona $B = [60 \ 70]$, $b = \begin{bmatrix} 0.015 & 0.015 \\ 0.02 & 0.015 \end{bmatrix}$, $R = [50 \ 85]$, $r = \begin{bmatrix} 0.02 & 0.02 \\ 0.01 & 0.01 \end{bmatrix}$, $\lambda =$

$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$. Varioidaan sinisen joukon allokointia siten, että μ saa arvot

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Kuvista huomataan, että eri allokointit

tuottavat merkittävästi erilaisia tilanteita. Kohdistamalla koko tulivoimansa ensiksi joukkoon R_2 tilanteessa a), siniset joukot tuhoutuvat lähes kokonaan. Kohdassa d), jossa tuli keskitetään aluksi vain joukkoon R_1 , tilanne on täysin vastakkainen.



Kuva 2.5: Lanchesterin (N, M) taistelumalli allokaatioilla $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

2.2.4 Satunnainen tulenoitus Lanchesterin (M, N)-taistelumallissa

Tarkastellaan tilannetta, jossa joukot ampuvat tähdättyä tulta satunnaisesti vihollisen joukkoja kohden erottamatta eri aselajeja toisistaan. Taistelijat eivät siis pysty havaitsemaan ulkoisia eroja vihollisen eri aselajeissa, tai joukoilla ei ole määritetty sääntöjä tulien allokaatioille (joukot tulittavat ensimmäistä näkemänsä vihollista). Tällöin eri vihollisen joukkoja vastaan käytetty tulivoima jakautuu joukkojen suuruuksien suhteessa. Allokaatiot saadaan

$\mu_j^i = \frac{R_i}{R}$ ja $\lambda_i^j = \frac{B_j}{B}$, missä $R = \sum_i R_i$ ja $B = \sum_j B_j$. Satunnaisen tulenoituksen malli voidaan esittää Lanchesterin (M, N)-mallin erikoistapauksena (MacKay 2009):

$$\frac{dR_i}{dt} = -\left(\sum_j b_j^i B_j\right) \frac{R_i}{R}, \quad \frac{dB_j}{dt} = \left(-\sum_i r_i^j R_i\right) \frac{B_j}{B}. \quad (2.13)$$

2.2.5 Murtumispiste

Todellisuudessa taisteluita käydään harvoin toisen joukon tuhoutumiseen asti, vaan joukoilla on murtumispiste, jonka saavuttaessaan joukot lopettavat taistelemisen. Murtumispiste määritellään suhteellisenä osuutena alkuperäisistä joukoista, joka ollaan valmiita saavuttamaan ennen kuin taistelutoimet lopetetaan tai antaudutaan. Toisen maailmansodan aikana käydystä taisteluista kerätyn datan perusteella, murtumispisteiden suuruuden on arvioitu olevan hyökkäävälle joukolle noin 70–80% ja puolustavalle joukolle 40–60% (Helmbold 1971).

2.3 Lanchesterin taistelumallien hyödyntäminen

Lanchesterin taistelumallien aikaisemmissa tarkasteluissa on pyritty muodostamaan optimaalisia t_0 strategioita taisteluille, jotka käydään toisen joukon tuhoutumiseen asti. Tarkasteluissa on keskitytty yksinkertaisiin taistelutilanteisiin, jolloin ratkaisut on kyetty muodostamaan analyyttisin menetelmin (Roberts ja Conolly 1992; Kaup ym. 2005; MacKay 2009). Lanchesterin taistelumallia on myös käytetty kuvaamaan muita kuin aseellisia taisteluja. Lanchesterin muodostamia differentiaaliyhtälöiden avulla on mallinnettu mm. erilaisia teollisuuden prosesseja (Kimball 1957) sekä yritysten markkinointiponnisteluiden vaikutuksesta niiden markkinaosuuteen ja liikevoittoon aggressiivisessa kilpailutilanteissa (Hirchleifer 1991; Erickson 1992; Qinan ja Zhang 2007).

Lanchesterin taistelumalleja on pyritty validoimaan sovittamalla niitä historiallisista taisteluista saatuun tilastotietoon (Engel 1954; Bracken 1995; Chen 2001; Lucas ja Turkes 2004). Käytetyimpiä taisteluita ovat 2. maailmansodan aikana käydyt Ardennein ja Iwo Jiman taistelut, joista on saatavilla tarkkaa tilastotietoa joukkojen päivittäisestä vahvuudesta. Tarkasteluissa on todettu Lanchesterin mallien tuottavan hyvän tarkkuuden toteutuneihin lukuihin verrattuna. Huomattavaa historiallisten taisteluiden tarkastelussa on kuitenkin se, että datapisteiden pienestä määrästä johtuen riittävään tilastolliseen tarkkuuteen päästään riippumatta siitä, käytetäänkö Lanchesterin suoran vai epäsuoran tulen mallia.

Vaikka Lanchesterin malleja on saatu sovitetuksi historiallisiin taistelutilanteisiin, taisteluiden ennustaminen sen avulla on ongelmallista, koska keskiarvostettujen parametrien muodostaminen heterogeenisille joukoille on hankalaa eikä luotettavia parametrien arvoja ennustuskäyttöön ole kyetty muodostamaan. Tutkiessaan 2. maailmansodassa käytyjä Ardennien ja Kurskin taisteluita, Lucas ja Turkes (2004) huomasivat, että parhaimmin taistelun kulkua selittävien parametrien vastepintamenetelmällä löydetty optimaaliset pinnat ovat hyvin tasaisia. Tästä syystä ennalta tuntemattomat tekijät joukkojen valmiudessa, maastossa tai säässä voivat vaikuttaa tehokkuusparametrien arvoon hyvinkin suuresti ja universaalien parametrien muodostaminen muodostuu hankalaksi.

3 Monitavoitteinen optimointi ja päätösanalyysi

3.1 Tilanteen määrittely

3.1.1 Aselajiportfolio

Aselajiportfoliot määritellään käytettävien aselajien $x = (x_1, \dots, x_n)$ ja niiden taistelussa

käytettävien tulen allokaatioiden $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1^1 & \dots & \mu_1^N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_M^1 & \dots & \mu_M^N \end{pmatrix}$, $\mu_i^j \in [0,1]$, $\sum_j \mu_i^j = 1$ avulla. x_i on aselajin

i lukumäärä aselajiportfoliossa, μ_i^j on osuus aselajin i tulivoimasta, joka kohdistetaan vihollisen aselajiin j , N on käytettävien aselajien lukumäärä ja M vastustajan taistelussa käyttämien eri aselajien lukumäärä.

Aselajiportfoliota k merkitään $X_k(x, \mu) = (x_1, \dots, x_N) \begin{bmatrix} \mu_1^1 & \dots & \mu_1^N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_M^1 & \dots & \mu_M^N \end{bmatrix}$. Lisäksi jokaiseen portfolioon

liitetään aselajijoukkojen allokaatioista riippuvaiset käyttökustannukset $c = \begin{bmatrix} c_1^1 & \dots & c_1^N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_M^1 & \dots & c_M^N \end{bmatrix}$, missä

c_i^j on kustannus, joka syntyy, kun aselajin i taistelija osoittaa koko tulivoimansa vihollisen aselajia j vastaan yhden aikayksikön ajan. Aselajeille määritetään tehokkuudet vihollisen aselajijoukkoja

vastaan $b = \begin{bmatrix} b_1^1 & \dots & b_1^N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_M^1 & \dots & b_M^N \end{bmatrix}$, missä b_i^j on aselajijoukon i taistelijan tehokkuus vihollisen

aselajijoukon j taistelijaa kohtaan.

3.1.2 Vaikuttavuus

Aselajiportfolion vaikuttavuudella tarkoitetaan sen kykyä saavuttaa annettuja tavoitteita, eli tässä tarkastelussa, kykyä tuhota vihollisen joukkoja tai kykyä säilyä hengissä taistelun aikana. Mallissa ei käsitellä aselajien mahdollisia kerrannaisvaikutuksia ja synergioita (esim. vihollisen jalkaväen taistelukyvyyn tippuminen tykistötulen alla), joten aselajiportfolion vaikuttavuus viholliseen saadaan vihollisen joukkojen tappioiden avulla. Vaikuttavuutta määrittäessä ei oteta huomioon joukkojen haavoittumisia, kaluston vahingoittumista tai taistelukunnon alentumista. Aselajiportfolion $X(x, \mu)$ vaikuttavuus vihollisen aselajiportfolion $Y(y, \lambda)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$:nteen aselajiin aikavälillä $[t_1, t_2]$ määritetään tuhattujen vihollisten määränä suhteessa alkutilanteeseen:

$$v_i(X(x, \mu)) = \frac{\Delta y_i}{y_{i0}} = \frac{y_i(t_2) - y_i(t_1)}{y_i(t_1)}. \quad (3.1)$$

Koska myöhemmässä vaiheessa halutaan optimointimallissa huomioida omat tappiot, määritellään ne, vihollisjoukkojen vaikuttavuuden avulla, omien joukkojen kykynä pysyä hengissä:

$$v_{S_i}(X(x, \mu)) = 1 - v_i(Y(y, \lambda)) = 1 - \frac{\Delta x_i}{x_{i0}} = \frac{x_{i,t_2}}{x_{i,t_1}}. \quad (3.2)$$

3.1.3 Kustannukset

Taistelun aikana aselajiportfolioille aiheutuneet kustannukset muodostuvat vihollisen joukkoja vastaan käytetystä tulivoimasta. Tulivoiman käytöstä aiheutuvat kustannukset riippuvat myös tulen kohteena olevasta aselajijoukosta. Näin pystytään mallintamaan moderneja taistelujoukkoja, joilla on käytettävissään useampia asejärjestelmiä, joiden hankinta- ja käyttökustannukset eroavat hyvin paljon. Eri aselajeihin osoitetun tulen kustannuksilla voidaan myös asettaa keinotekoisia rajoituksia ja kustannuksia epäedulliseen asemaan joutumisesta, tultiasemien vaihtamisesta tai muista taistelun kulkuun vaikuttavista tekijöistä.

Tulivoiman käyttämisestä aiheutuneet kustannukset aselajiportfolion $X(x, \mu)$ aselajijoukolle x_i taistelun aikana (aikavälillä $[0, t_f]$) määritetään:

$$C_i(X(x, \mu)) = \sum_j c_i^j \left(\int_0^{t_f} x_i(t) \mu_i^j dt \right). \quad (3.2)$$

Koko aselajiportfoliolle aiheutuneet käyttökustannukset taistelun aikana saadaan siis:

$$C(X(x, \mu)) = \sum_i C_i. \quad (3.3)$$

3.2 Käyvät aselajiportfoliot

Tutkiessa kustannustehokkaita aselajiportfolioita, on rajattava tarkastelu käyviin aselajiportfolioihin.

Merkitään kaikkien käyvien aselajiportfolioiden joukkoa $X_F \subseteq X$. Aselajiportfolio $X(x, \mu) \in X$ kuuluu käyvien aselajiportfolioiden joukkoon X_F , jos $x, \mu \in S = S_x \times S_\mu$, missä $S \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ on tehtävän käyvä alue. S on konvekksi alue, jota rajoittavat lineaariset rajoitusehdot, jotka voivat sisältää rajoituksia käytettävissä olevista resursseista sekä joukkojen toiminnasta.

Tässä tarkastelussa ei oteta huomioon asejärjestelmien hankinta- tai ylläpitokustannuksia, joten resurssirajoitukset kohdistetaan taistelunaikaisiin tulen allokoinnista syntyneisiin kustannuksiin. Rajoituksia voidaan asettaa yksittäisille asejärjestelmille $C_i(X(x, \mu)) \leq b_i, i = 1, \dots, M$ sekä koko aselajiportfolion kustannuksille $C(X(x, \mu)) \leq B$.

Asemointirajoituksilla voidaan huolehtia siitä, että aselajiportfolion koostumus vastaa päätöksentekijän strategiaa. Asemointirajoituksilla voidaan asettaa ala- ja ylärajoja eri aselajien määrille sekä taisteluallokaatioille, jolla voidaan ehkäistä aselajiportfolion riippuvuutta yksittäisistä asejärjestelmistä sekä huolehtia, että aselajiportfolio kykenee vastaamaan vaihtuvaan tilanteeseen. Asemointirajoituksien avulla voidaan esim. vaatia, että aselajiportfolio sisältää panssarintorjunta-aseita, jos on mahdollista, että taistelussa tullaan kohtaamaan vihollisen panssariajoneuvoja. Jos halutaan, että asejärjestelmän i lukumäärä portfoliossa on välillä $(x_{i_{min}}, x_{i_{max}})$ se voidaan määrittää lineaarisena rajoitusehtona (Kangaspunta 2008):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = Ax \leq B = \begin{bmatrix} -x_{i_{min}} \\ x_{i_{max}} \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

missä $a_{1i} = 1, a_{2i} = -1, a_{jk} = 0, \text{ kun } k \neq i, j = 1, 2$

Myös aselajiportfoliossa olevien aselajijoukkojen suhteellisille suuruuksille voidaan asettaa rajoituksia. Näin voidaan vaatia, että esim. joka viidennellä taistelijalla on käytettävissään panssarintorjunta-ase. Jos halutaan, että aselajijoukkojen i ja j suuruuksien suhde on aina δ , ($x_i = \delta x_j, \delta \in \mathbb{R}_+$) voidaan se esittää lineaarisena rajoituksena:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = Ax \leq B = 0, \quad (3.5)$$

missä $a_i = 1, a_j = \delta, a_k = 0, \text{ kun } k \neq i$.

3.2.1 Pareto-optimaalisuus

Käyvä aselajiportfolio on pareto-optimaalinen, jos ei löydy toista aselajiportfolioa, joka saavuttaa vähintään yhtä suuren vaikuttavuuden kaikilla kriteereillä ja suuremman vaikuttavuuden jollain kriteerillä. Merkitään pareto-optimaalisten portfolioiden joukkoa $X_p \subseteq X_F$. $X(x, \mu)^* \in X_p$, jos $\nexists X(x, \mu) \in X_F$ s. e.

$$i. \quad v_i(X(x, \mu)) \leq v_i(X(x, \mu)^*), \forall i = 1, \dots, k \quad (3.6i)$$

$$ii. \quad v_i(X(x, \mu)) < v_i(X(x, \mu)^*) \text{ jollain } i = 1, \dots, k \quad (3.6ii)$$

3.2.2 Kokonaisvaikuttavuus

Jos pareto-optimaalisia aselajiportfolioita on useita, eli käyvien aselajiportfolioiden joukosta ei löydy vaihtoehtoa $X(x, \mu)^* \in X_F$, joka saavuttaisi suurimmat kriteeriarvot kaikkien kriteerien suhteen $v_i(X(x, \mu))^* \geq v_i(X_k(x, \mu)) \forall k$, tarvitaan tehtävän ratkaisemiseksi tietoa päätöksentekijän preferensseistä.

Pareto-optimaalisia aselajiportfolioita verrataan keskenään käyttäen additiivista arvofunktiota, jossa kokonaisvaikuttavuus lasketaan painotettuna summana kriteereiden arvoista. Oletetaan vaikuttavuuskriteerit preferenssiriippumattomiksi toisistaan, jolloin additiivinen arvofunktio voidaan määritellä (Punkka ym. 2011):

$$V(X(x, \mu)) = \sum_i w_i v_i(X(x, \mu)), \quad (3.7)$$

missä painokertoimet w_i mittaavat kriteerin i suhteellista tärkeyttä päätöksentekijälle. Kun huomioidaan omien joukkojen tappiot yhtälön (3.2) mukaisesti, voidaan additiivinen arvofunktio ilmaista muodossa:

$$V(X(x, \mu)) = \sum_i^n w_i v_i(X(x, \mu)) + \sum_k^m w_{n+k} v_{S_k}(X(x, \mu)). \quad (3.8)$$

Normeerataan painokertoimet $w \in S_w^0 = \{w \in \mathbb{R}^n | w_i \geq 0, \sum_i w_i = 1\}$, missä S_w^0 on kaikkien mahdollisten kriteeripainojen joukko (Liesiö ym. 2007).

Kokonaisvaikuttavuutta maksimoiva aselajiportfolio voidaan löytää ratkaisemalla optimointitehtävä:

$$\begin{aligned} \max_{x, \mu} V(X(x, \mu)) \\ \text{s. e. } X \in X_F. \end{aligned} \quad (3.9)$$

3.3 Kustannustehokkuus

Kustannustehokkaita aselajiportfolioita etsiessä tehdään tarkasteluita siitä, miten rajalliset resurssit kannattaa käyttää, jotta niistä saataisiin maksimaalinen hyöty. Kustannustehokkuutta tarkasteltaessa on siis huomioitava vaikuttavuuden lisäksi sen saavuttamiseen vaadittavat kustannukset.

Kustannustehokkaita aselajiportfolioita etsitään kaikkien käyvien aselajiportfolioiden joukosta X_F määrittämällä jokaiselle käyväälle aselajiportfoliolle $X(x, \mu) \in X_F$ yhtälön (3.3) mukaiset taistelussa aiheutuneet kustannukset sekä yhtälössä (3.8) määritelty aselajiportfolion kokonaisvaikuttavuus. Kangaspunta (2008) määrittelee kustannustehokkuuden siten, että aselajiportfolio on kustannustehokas, jos ei löydy toista aselajiportfolioita, jonka kokonaisvaikuttavuus on vähintään yhtä suuri ja kustannukset korkeintaan yhtä suuret, sekä joko kokonaisvaikuttavuus tai kustannukset ovat aidosti pienemmät. Merkitään kustannustehokkaiden aselajiportfolioiden joukkoa $X_{CE} \subseteq X_F$.

Aselajiportfolio $X(x, \mu)^*$ on kustannustehokas ($X(x, \mu)^* \in X_{CE}$), jos $\nexists X(x, \mu) \in X_F$ s. e. i ja ii pätevät.

$$\text{i. } V(X(x, \mu)^*) \leq V(X(x, \mu)) \text{ ja } C(X(x, \mu)^*) \geq C(X(x, \mu)) \quad (3.10\text{i})$$

$$\text{ii. } V(X(x, \mu)^*) < V(X(x, \mu)) \text{ tai } C(X(x, \mu)^*) > C(X(x, \mu)) \quad (3.10\text{ii})$$

Kustannustehokkaat aselajiportfoliot voidaan löytää siis optimointiongelman:

$$\begin{aligned} \max_{x, \mu} \{V(X, \mu), -C(X, \mu)\} \\ \text{s. e. } X \in X_F \end{aligned} \quad (3.11)$$

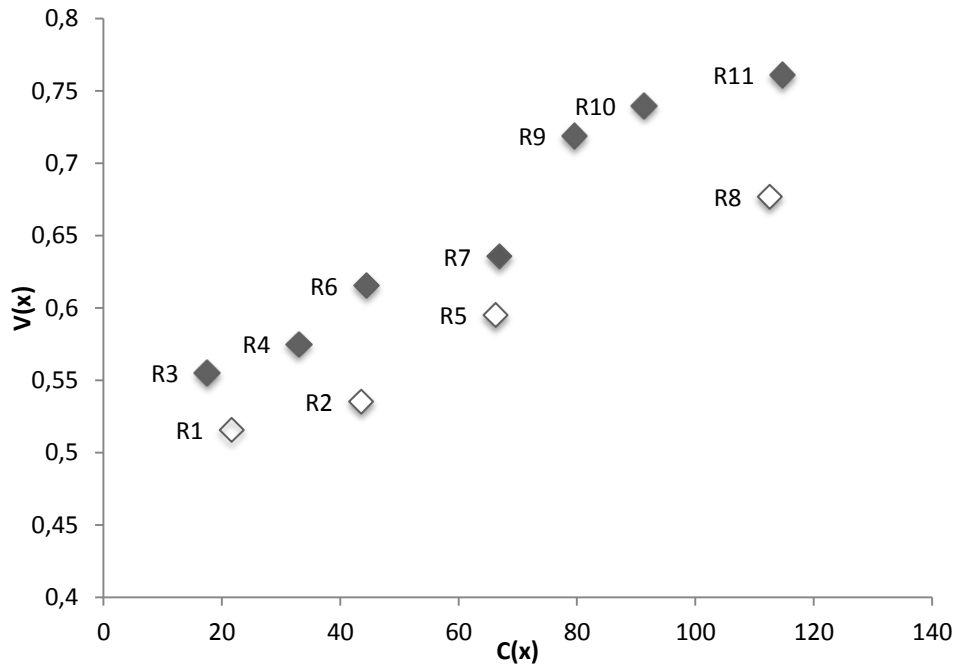
pareto-optimaalisina pisteinä.

Tarkastellaan kustannustehokkuutta esimerkin avulla, jossa kaksi joukkoa taistelee keskenään Lanchesterin (1, 1) – mallin tyylisessä taistelussa, jossa kummallakin joukolla on käytössään yksi aselaji. Joukkojen suuruudet sekä sinisen joukon tehokkuus ovat tunnettuja, $B_0 = 80, b = 0,03, R_0 = 100$. Varioidaan punaisen joukon käyttämä aselajia, jolle on määritelty taulukossa 1 esitetyt tehokkuudet r_i ja käyttökustannukset c_i ja etsitään kustannustehokkaat ratkaisut.

Oletetaan, että päätöksentekijällä ei ole preferenssiä omien joukkojen ja tuhottujen vihollisjoukkojen välillä, jolloin kokonaisvaikuttavuuden kriteerikohtaiset painokertoimet $w_1 = w_2 = \frac{1}{2}$. Taistelu lopetetaan 30 aika-askeleen jälkeen, jolloin oletetaan, että toinen joukko saavuttaa murtumispisteensä. Soveltamalla Lanchesterin (1,1)-mallia taistelutilanteisiin saadaan taulukossa 3.1 esitetyt tulokset. Kuvassa 3.1 on esitetty tummennettuina pisteinä kohtien 3.10 (i) ja (ii) mukaan määritellyt kustannustehokkaat aselajiporfolioidet.

Taulukko 3.1: Aselajiporfolioiden kokonaisvaikuttavuudet ja kustannukset

X_i	r_i	c_i	C	V
1	0,020	0,010	22	0,52
2	0,021	0,020	44	0,54
3	0,022	0,008	17	0,56
4	0,023	0,015	33	0,57
5	0,024	0,030	66	0,60
6	0,025	0,020	44	0,62
7	0,026	0,030	67	0,64
8	0,028	0,050	113	0,68
9	0,030	0,035	80	0,72
10	0,031	0,040	91	0,74
11	0,032	0,050	115	0,76



Kuva 3.1: Aselajiporfolioidet esitettynä $C(x)$, $V(x)$ -kuvaajassa. Tummennetut merkit kuvaavat kustannustehokkaista portfolioita

3.3.1 Epätäydellinen informaatio

Päätöksentekijä ei usein pysty tai ole halukas esittämään tarkkoja preferenssejään eri kriteerien välillä (Liesiö ym. 2007). Tällöin additiivisen arvofunktion painokertoimet sisältävät epävarmuutta. Epätäydellistä preferenssi-informaatiota voidaan mallintaa käyvien painojen joukolla S_w . Oletetaan S_w konveksiksi alueeksi, jota rajoittavat päätöksentekijän lineaariset preferenssirajoitukset. Ääritapauksina $S_w = S_w^0$, jolloin käytössä ei ole ollenkaan informaatioita ja piste-estimaatti $S_w = [w_1, \dots, w_n]$, joka vastaa täydellistä informaatiota.

Koska kokonaisvaikuttavuuteen vaikuttavista painokriteereistä ei ole käytettävissä varmaa tietoa, kustannustehokkaita aselajiportfolioita ei pystytä löytämään yhtälöiden (3.8) määrittämällä tavalla. Etsitään siis ei-dominoidut aselajiportfoliot $X(x, \mu) \in X_{ND} \subseteq X_F$, kun $w \in S_w$. Määritellään dominoidut aselajiportfoliot seuraavasti: Aselajiportfolio $X(x, \mu) \in X_F$ on dominoitu, jos löytyy toinen käyvä aselajiportfolio, joka saavuttaa vähintään yhtä suuren kokonaisvaikuttavuuden kaikilla vaihteluvälin arvoilla ja jonka kokonaisvaikuttavuus on suurempi jollain välin arvolla.

Epävarman informaation tilanteessa, aselajiportfolioita on kustannustehokas, jos ei löydy toista korkeintaan yhtä kallista aselajiportfolioita, jonka kokonaisvaikuttavuus on vähintään yhtä suuri kaikilla sallituilla kriteeripainoilla ja suurempi jollakin kriteeripainolla (Kangaspunta 2008).

Aselajiportfolio $X(x, \mu)^*$ on kustannustehokas ($X(x, \mu)^* \in X_{CE}$) jos $\nexists X(x, \mu) \in X_F$ siten, että i ja ii pätevät

$$\text{i. } V(X(x, \mu)^*, w) \leq V(X(x, \mu), w) \text{ ja } C(X(x, \mu)^*, w) \geq C(X(x, \mu), w) \quad \forall w \in S_w \quad (3.12\text{i})$$

$$\text{ii. } \exists w \in S_w \text{ s. e. } V(X(x, \mu)^*, w) < V(X(x, \mu), w) \text{ tai } C(X(x, \mu)^*, w) > C(x, w) \quad (3.12\text{ii})$$

4 Havainnollistava esimerkki

Tarkastellaan tulen allokaatioiden vaikutusta kustannustehokkuuteen Lanchesterin (N, M) – taistelumallissa esimerkin avulla tutkimalla tilannetta, jossa kummallakin osapuolella on käytettävissään kaksi aselajia. Aselajijoukkojen suuruudet ja niiden tehokkuudet on määritelty ennalta siten, että

$$B_0 = [40,60], R_0 = [20,100], b = \begin{bmatrix} 0,02 & 0,03 \\ 0,01 & 0,03 \end{bmatrix}, r = \begin{bmatrix} 0,04 & 0,02 \\ 0,02 & 0,01 \end{bmatrix}.$$

Tarkastellaan puolustavan (sinisen) joukon allokaatioiden vaikutusta taistelun kulkuun varioimalla taisteluallokaatioita $\mu_1^1 = 1 - \mu_1^2$ ja $\mu_2^1 = 1 - \mu_2^2$ välillä $[0,1]$.

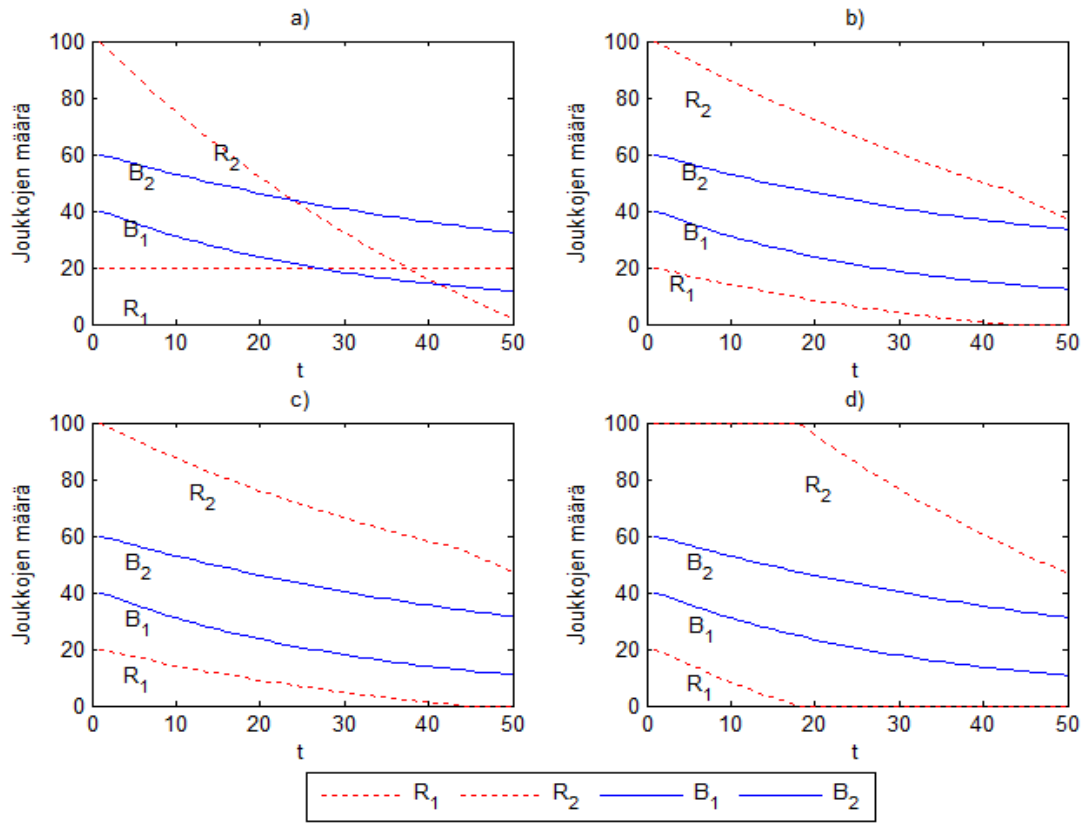
Oletetaan, että hyökkäävä (punainen) joukko ei pysty erottamaan puolustavan osapuolen aselajijoukkoja toisistaan, joten se osoittaa tulensa satunnaisesti kumpaakin puolustavan joukon aselajijoukkoa kohden. Kuvataan hyökkäävän joukon tulen jakautumista satunnaisen allokaation mallin allokaatioilla $\lambda_1^1 = \lambda_2^1 = \frac{B_1}{B_1+B_2}$, $\lambda_2^1 = \lambda_1^1 = \frac{B_2}{B_1+B_2}$.

Simulaatioita ajettaessa oletetaan, että ainakin toinen joukko saavuttaa murtumispisteensä 50 aikayksikön jälkeen ja taistelu lopetetaan, jos taistelu ei ole päättynyt toisen osapuolen tuhoutumiseen.

Kuvissa 4.1a – 4.1d on esitetty joukkojen määrä ajan suhteen sinisen joukon tulen allokaatioilla $\mu = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,8 & 0,2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$ ja $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Huomataan, että joukkoa R_2 ei ehditä tuhoamaan täysin simulaation aikana millään μ_1^1, μ_2^1 arvoilla. Nähdään myös, että sinisen joukkojen allokaatioilla ei ole juurikaan vaikutusta omien joukkojen tappioihin, johtuen punaisen osapuolen satunnaisesta tulen allokoinnista.

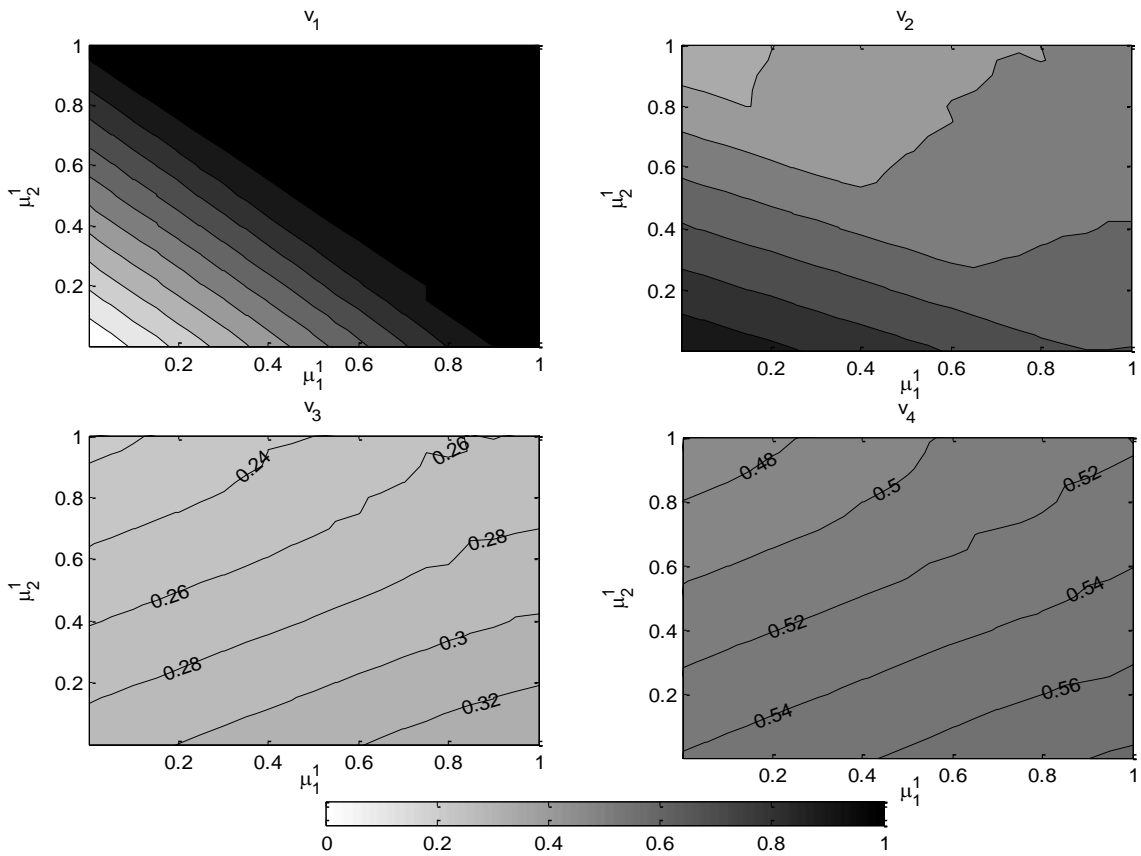
Vaikuttavuuskriteerit v_1 ja v_2 kuvaavat puolustavan joukon kykyä tuhota hyökkäävän joukon aselajijoukkoja R_1 ja R_2 . Kriteerien saamat arvot on esitetty tasa-arvokäyrien avulla kuvissa 4.2a-d, joista voidaan nähdä, miten vaikuttavuudet käyttäytyvät taisteluallokaatioiden muuttaessa. Vaikuttavuuskriteeri v_1 käyttäytyy säännöllisesti kasvaen, kun tulta allokoidaan aselajijoukkoa R_1 kohtaan, eli kun μ_1^1 ja μ_2^1 kasvavat. Koska aselajijoukon koko taistelun alussa on pieni, se ehtii tuhoutua taistelun aikana, kun $\mu_1^1 + \mu_2^1 > 0,9$, jolloin joukkoon R_1 kohdistettu tulivoima siirretään joukkoa R_2 vastaan.

Vaikuttavuuskriteerit v_3 ja v_4 kuvaavat taas puolustavan eli sinisen joukon kykyä säilyä hengissä taistelun aikana. Kuvista 4.2 nähdään, että vaikuttavuuskriteerit v_3 ja v_4 saavat suurimmat arvonsa punaisen joukon tulen allokaatioilla $\mu(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, mikä vastaa MacKayn (2009) olettamusta omat tappiot minimoivista taisteluallokaatioista, koska $b_1^1 r_1^1 > b_1^2 r_1^2$ ja $b_2^2 r_2^2 > b_2^1 r_2^1$. Erot jäävät kuitenkin hyvin pieniksi johtuen vihollisen joukkojen satunnaisesta tulen allokoinnista.



Kuva 4.1 joukkojen määrä ajan suhteen sinisen joukon tulen allokaatioilla

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$ ja d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$



Kuva 4.2: Vaikuttavuuskriteerien suuruudet esitettynä eri taisteluallokaatioiden suhteen

4.1 Kustannustehokkuuden tarkastelu

Tarkastellaan aselajiportfolioiden kustannustehokkuutta vaikuttavuuskriteerien v_1, v_2, v_3, v_4 ja tulen käytöstä aiheutuneiden kustannusten suhteen.

Muodostetaan tulen allokaatioista aselajiportfolioita 0.2:n välein, jolloin muodostuu 36 eri portfolioa. Tarkasteluihin on otettu myös mukaan portfolio, jossa tuli allokoidaan satunnaisen tulenosituksen mallin mukaisesti. Puolustavien ja hyökkäävien joukkojen tappiot ja vaikuttavuudet eri aselajiportfolioille on esitetty taulukossa 4.1.

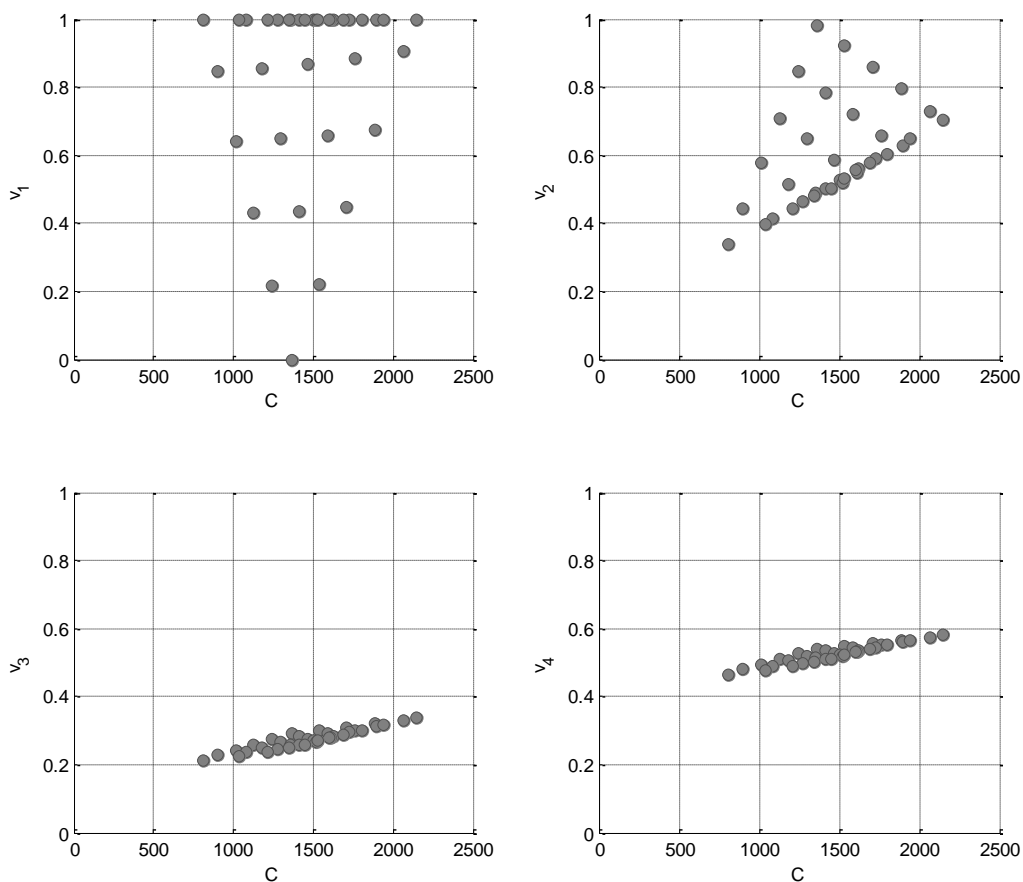
Taulukko 4.1: Omien ja vihollisten joukkojen tappiot sekä vaikuttavuudet eri allokaatioilla

X_i	μ_1^1	μ_2^1	ΔB_1	ΔB_2	ΔR_1	ΔR_2	v_1	v_2	v_3	v_4
1	0	0	0	98	28	28	0	0,98	0,29	0,54
2	0	0,2	4	92	28	27	0,22	0,92	0,30	0,55
3	0	0,4	9	86	28	26	0,45	0,86	0,31	0,56
4	0	0,6	13	79	27	26	0,67	0,79	0,32	0,57
5	0	0,8	18	73	27	25	0,90	0,73	0,33	0,58
6	0	1	20	70	26	25	1	0,70	0,34	0,58
7	0,2	0	4	85	29	28	0,22	0,85	0,27	0,53
8	0,2	0,2	9	78	29	28	0,44	0,78	0,28	0,53
9	0,2	0,4	13	72	28	27	0,66	0,72	0,29	0,54
10	0,2	0,6	18	66	28	27	0,89	0,66	0,30	0,55
11	0,2	0,8	20	63	28	26	1	0,63	0,31	0,56
12	0,2	1	20	65	27	26	1	0,65	0,32	0,57
13	0,4	0	9	71	30	29	0,43	0,71	0,26	0,51
14	0,4	0,2	13	65	29	29	0,65	0,65	0,27	0,52
15	0,4	0,4	17	59	29	28	0,87	0,59	0,28	0,53
16	0,4	0,6	20	56	29	28	1	0,56	0,29	0,54
17	0,4	0,8	20	59	28	27	1	0,59	0,30	0,55
18	0,4	1	20	60	28	27	1	0,60	0,30	0,55
19	0,6	0	13	58	30	30	0,64	0,58	0,24	0,50
20	0,6	0,2	17	51	30	30	0,86	0,51	0,25	0,50
21	0,6	0,4	20	49	30	29	1	0,49	0,26	0,51
22	0,6	0,6	20	53	29	29	1	0,53	0,27	0,52
23	0,6	0,8	20	55	29	28	1	0,55	0,28	0,53
24	0,6	1	20	58	28	28	1	0,58	0,29	0,54
25	0,8	0	17	44	31	31	0,85	0,44	0,23	0,48
26	0,8	0,2	20	41	31	31	1	0,41	0,24	0,49
27	0,8	0,4	20	46	30	30	1	0,46	0,25	0,50
28	0,8	0,6	20	50	30	29	1	0,50	0,26	0,51
29	0,8	0,8	20	52	29	29	1	0,52	0,27	0,52
30	0,8	1	20	56	29	28	1	0,56	0,28	0,53
31	1	0	20	34	31	32	1	0,34	0,21	0,46
32	1	0,2	20	40	31	31	1	0,40	0,22	0,48
33	1	0,4	20	44	31	31	1	0,44	0,24	0,49
34	1	0,6	20	48	30	30	1	0,48	0,25	0,50
35	1	0,8	20	50	30	29	1	0,50	0,26	0,51
36	1	1	20	53	29	29	1	0,53	0,27	0,52
37	$\frac{R_1}{R_1 + R_2}$	$\frac{R_2}{R_1 + R_2}$	9	77	29	28	0,47	0,77	0,28	0,30

Asetetaan puolustavan joukolle tulivoiman käytöstä aiheutuvat suhteelliset käyttökustannukset

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 \\ 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Kuvassa 4.2 on esitetty aselajiportfolioiden eri vaikuttavuuskriteerien suuruudet käyttökustannusten suhteen. Vaikuttavuuskriteerien v_1 ja v_2 suhteen esiintyy huomattavaa vaihtelua johtuen taistelutilanteen luonteesta, jossa allokaatiosta riippuen vihollisen toiseen joukkoon ei välttämättä kohdisteta ollenkaan tulivoimaa. Taistelun lopettaminen 50 aika-askelen jälkeen - ennen kuin toinen osapuoli on tuhottu - aiheuttaa myös hajontaa, koska taistelutilanne ei ole ehtinyt hakeutua tasapainotilanteeseen. Taistelun keskeyttäminen olettaen murtumispiste saavutetuksi on kuitenkin perusteltua, sillä taistelun loppuhetkellä sekä puolustavan, että hyökkäävän joukkojen suhteelliset tappiot ylittävät murtumispisteelle arvioidut raja-arvot.

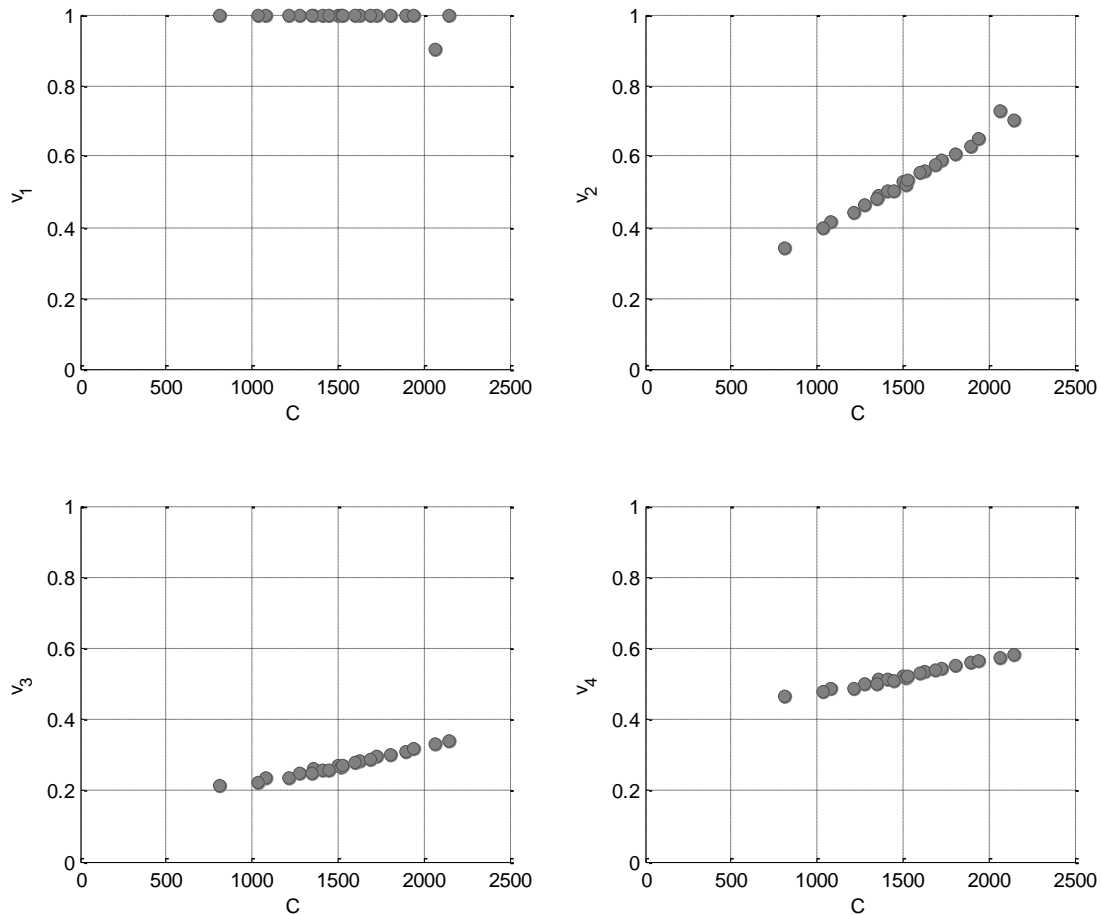


Kuva 4.2: Aselajiportfolioiden vaikuttavuudet käyttökustannusten suhteen

Muodostettujen aselajiportfolioiden joukossa ei ole yhtään dominoitua aselajiportfolioita. Näin ollen jos päätöksentekijän preferensseistä ei ole tietoa, kaikki mahdolliset aselajiportfoliot ovat kustannustehokkaita. On siis perusteltua tarkastella tilannetta, jossa päätöksentekijän preferensseistä on käytettävissä informaatiota.

Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta, jossa oletetaan päätöksentekijän pitävän kaikkia vaikuttavuuskriteereitä yhtä tärkeinä. Toisin sanoen, päätöksentekijä asettaa painokertoimet $w = [0,25 \ 0,25 \ 0,25 \ 0,25]$. Tällöin voidaan tarkastella aselajiportfolioiden

kustannustehokkuutta kokonaisvaikuttavuuden avulla. Aselajiportfolioiden kokonaisvaikuttavuudet ja kustannukset on esitetty taulukossa 4.2. Kuvassa 4.3 on esitetty kustannustehokkaat aselajiportfoliot eri vaikuttavuusien suhteen. Kuvata voidaan nähdä, että vain ne aselajiportfoliot, jotka saavuttavat suuren vaikuttavuuden kriteerin v_1 suhteen, ovat kustannustehokkaita. Tämä johtuu vaikuttavuuskriteeri v_1 suuresta vaihteluvälistä suhteessa muihin kriteereihin.



Kuva 4.3: Kaikkien kustannustehokkaiden portfolioiden vaikuttavuudet eri kriteerien suhteen, kun kokonaisvaikuttavuuden painokertoimet ovat yhtä suuria, $w = [0,25 \ 0,25 \ 0,25 \ 0,25]$.

Taulukko 4.2: Portfolioiden kokonaisvaikuttavuudet ja käyttökustannukset, kun kriteeripainot ovat yhtä suuria

X_i	μ_1^1	μ_2^1	V	C
1	0	0	0,45	1362
2	0	0,2	0,50	1535
3	0	0,4	0,54	1709
4	0	0,6	0,59	1885
5	0	0,8	0,63	2064
6	0	1	0,66	2146
7	0,2	0	0,47	1244
8	0,2	0,2	0,51	1414
9	0,2	0,4	0,55	1586
10	0,2	0,6	0,60	1761
11	0,2	0,8	0,63	1893
12	0,2	1	0,63	1942
13	0,4	0	0,48	1128
14	0,4	0,2	0,52	1296
15	0,4	0,4	0,56	1466
16	0,4	0,6	0,60	1624
17	0,4	0,8	0,61	1727
18	0,4	1	0,61	1803
19	0,6	0	0,49	1013
20	0,6	0,2	0,53	1179
21	0,6	0,4	0,57	1353
22	0,6	0,6	0,58	1503
23	0,6	0,8	0,59	1613
24	0,6	1	0,60	1690
25	0,8	0	0,50	899
26	0,8	0,2	0,53	1081
27	0,8	0,4	0,55	1273
28	0,8	0,6	0,57	1414
29	0,8	0,8	0,58	1521
30	0,8	1	0,59	1600
31	1	0	0,50	809
32	1	0,2	0,52	1038
33	1	0,4	0,54	1212
34	1	0,6	0,56	1345
35	1	0,8	0,57	1447
36	1	1	0,58	1529
37	$\frac{R_1}{R_1 + R_2}$	$\frac{R_2}{R_1 + R_2}$	0,51	1414

5 Yhteenveto

Tässä työssä tutkittiin tulen allokaatioiden vaikutusta kustannustehokkuuteen käyttäen hyväksi Lanchesterin taistelumallia. Aluksi tehtiin lyhyt katsaus Lanchesterin taistelumalleihin ja niistä tehtyihin laajennuksiin sekä aiheeseen muuten liittyvään termistöön. Tämän jälkeen määriteltiin optimointiongelmia ja esitettiin kustannustehokkuuden analysointiin käytettävä menetelmä. Lopuksi esitettiin tuloksia esimerkkitalanteesta. Taistelumallin matemaattinen mallintaminen toteutettiin diskreettiaikaisella simuloinnilla Matlab-ohjelmistolla.

Havainnollistavassa esimerkissä kuvattiin Lanchesterin (2,2) taistelumallin mukaista tilannetta, jossa hyökkävällä ja puolustavalla joukolla on käytettävissään 2 aselajijoukkoa. Tuloksista huomattiin, että annetuilla alkuarvoilla, omat tappiot minimoidaan aikaisemmin analyttisesti ratkaistulla optimistrategialla (MacKay 2009). Erot omien joukkojen tappioissa eli vaikuttavuuskriteerien v_3 ja v_4 suhteen jäivät kuitenkin pieniksi, johtuen vihollisjoukon käyttämästä satunnaisesta tulenosoituksesta. Jotta tuloksista voisi tehdä vahvempia johtopäätöksiä, simulaatioita pitäisi ajaa useammilla alkuarvoilla ja vihollisen tulen allokaation strategioilla.

Tarkastellessa kustannustehokkuutta huomattiin, että esimerkkitalanteessa ei esiintynyt dominoituja aselajiportfolioita. Kun eri vaikuttavuuskriteerit oletettiin päätöksentekijälle yhtä tärkeiksi, kriteeri v_1 vaikuttaa kustannustehokkaisuuteen aselajiportfolioihin eniten suuren vaihteluvälinsä takia. Tämä olisi voitu huomioda suhteuttamalla painokertoimet vaikuttavuuskriteerien vaihteluväliin.

Omat tappiot otettiin työssä mukaan tarkasteluun tarkastelemalla niitä vihollisen vaikuttavuuden kautta, eli omien joukkojen kykyä säilyä hengissä taistelun aikana. Omien joukkojen tappiot olisi myös voitu ottaa mukaan tarkasteluun joko taistelun aikana tapahtuvina kustannuksina tai tarkastelemalla kustannustehokkuutta eri tappiotasoilla. Tappioita tarkasteltiin vaikuttavuuden avulla, jotta kustannustehokkuutta voitaisiin tarkastella kokonaisvaikuttavuuden additiivisen mallin avulla.

Työssä ei kiinnitetty huomioita taistelun lopputulokseen, eli siihen voitettiinko taistelu. Tämä vaikeuttaa vertailua aikaisempiin kirjallisuuslähteisiin, koska suuri osa aikaisemmasta Lanchesterin taistelumallitutkimuksesta on keskittynyt optimistrategioiden löytämiseen tilanteissa, joissa taistelu voitetaan.

Tulen allokaatioiden kustannustehokkuuden tarkastelu voitaisiin tehdä myös käyttäen muita taistelumalleja, koska Lanchesterin taistelumalli vaatii hyvin rajoittavia oletuksia taistelutilanteesta ja joukkojen käyttäytymisestä tuottaakseen luotettavia tuloksia. Lanchesterin taistelumallin deterministisyydestä johtuen, sen ennustuskyky on huono varsinkin pienien joukkojen taisteluissa, joissa taistelun stokastiikka voi olla hyvin merkittävää lopputuloksen kannalta.

6 Viitteet

- Bracken, J. (1995). *Lanchester Models of the Ardennes Campaign*, Naval Research Logistics, Vol. 42, No. 4, pp. 559-577.
- Chen, P., Chu, P. (2001). *Applying Lanchester's Linear Law to Model the Ardennes Campaign*, Naval Research Logistics, Vol. 48, No. 8, pp. 653-661.
- Engel, J.H. (1954). *A Verification of Lanchester's Law*, Journal of the Operations Research Society of America, Vol. 2, No. 2, pp. 163-171.
- Erickson, G.M. (1992). *Empirical Analysis of Closed-Loop Duopoly Advertising Strategies*, Management Science, Vol. 38, No. 12, pp. 1732-1749.
- Flicker, R.D. (1998). *Attrition Models of the Ardennes Campaign*, Naval Research Logistics, Vol. 45, No. 1, pp. 1–22.
- Helmbold, R.L. (1965). *Letter to the Editor—A Modification of Lanchester's Equations*, Operations Research, Vol. 13, No. 5, pp. 857-859.
- Helmbold, R.L. (1971). *Decision in Battle: Breakpoint Hypotheses and Engagement Termination Data*, Rand Corp, Santa Monica, CA, R-772-PR.
- Hirshleifer, J. (1991). *The Technology of Conflict as an Economic Activity*, The American Economic Review, Vol. 81, No. 2, pp. 130-134.
- Hung, C. –Y., Yang, G.K., Deng, P.S., Tang, T., Lan, S. P., Chu, P. (2005). *Fitting Lanchester's Square Law to the Ardennes Campaign*, The Journal of the Operational Research Society, Vol. 56, No. 8, pp. 942-946.
- Kangas, L. (2005). *Taistelun Stokastinen Mallinnus*, diplomityö, Teknillinen korkeakoulu - Matematiikan ja systeemianalyysin laitos.
- Kangaspunta, J. (2008). *Portfolioanalyysi Asejärjestelmien Kustannustehokkuuden Arvioinnissa*, diplomityö, Teknillinen korkeakoulu - Matematiikan ja systeemianalyysin laitos.
- Kaup, G.T., Kaup, D.J., Finkelstein, N.M. (2005). *The Lanchester (N, 1) problem*, Journal of the Operations Research Society, Vol.56, pp. 1399-1407.
- Kimball, G.E. (1957). *Some Industrial Applications of Military Operations Research Methods*, Operations Research, Vol. 5, No.2, pp. 201-204.
- Lanchester, F.W. (1916) *Aircraft in Warfare – The Dawn of the Fourth Arm*, Constable & Co.
- Liesiö, J., Mild, P., Salo, A. (2007). *Robust Portfolio Modeling With Incomplete Cost Information and Project Interdependencies*, European Journal of Operations Research, Vol. 190, pp. 679-695.

Lucas, T.W., Turkes, T. (2004). *Fitting Lanchester Equations to the Battles of Kursk and Ardennes*, Naval Research Logistics, Vol. 51, No. 1, pp. 95-115.

MacKay, N.J. (2009). *Lanchester Models for Mixed Forces With Semi-dynamical Target Allocation*, Journal of the Operational Research Society, Vol. 60, No. 10, pp. 1421-1427.

Punkka, A., Liesiö, J., Salo, A. (2011). *Multi-Attribute Value Theory*, Mat-2.3134 Päätöksenteko ja Ongelmanratkaisu, luento 2.

Qinan, W., Zhang, W. (2007). *An Empirical Study on the Lanchester Model of Combat for Competitive Advertising Decisions*, European Journal of Operational Research, Vol. 183, No. 2, pp. 871–881.

Roberts, D.M., Conolly, B.W. (1992). *An Extension of the Lanchester Square Law to Inhomogeneous Forces with an Application to Force Allocation Methodology*, The Journal of the Operational Research Society, Vol. 43, No. 8, pp. 741-752.