Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Teknillisen fysiikan ja matematiikan tutkinto-ohjelma

# Kiinalaisen postimiehen ongelma

Kandidaatintyö
7.12.2015

Kimmo Kontio

**Aalto-yliopisto**
**Perustieteiden korkeakoulu**

**Aalto-yliopisto, PL 11000, 00076 AALTO**
**www.aalto.fi**

**Tekniikan kandidaatintyön tiivistelmä**

**Tekijä** Kimmo Kontio

**Työn nimi** Kiinalaisen postimiehen ongelma

**Koulutusohjelma** Teknillisen fysiikan ja matematiikan koulutusohjelma

**Pääaine** Systeemitieteet **Pääaineen koodi** F3010

**Vastuuopettaja** Harri Ehtamo

**Työn ohjaaja(t)** Harri Ehtamo

**Päivämäärä** 7.12.2015 **Sivumäärä** 25 + 3 **Kieli** Suomi

**Tiivistelmä**

Postinkantajalla on oma alueensa, jolle posti on jaettava. Jotta jokainen asukas saa postinsa, alueen jokainen katu on kuljettava päästä päähän. Kiinalaisen postimiehen ongelma on löytää sellainen reitti, jossa jokainen katu kuljetaan läpi vähintään kerran ja kuljettu kokonaismatka on mahdollisimman pieni.

Ongelmalla on monisatavuotinen historia, vaikkakin täsmällinen ongelman määritys ja ratkaisu tapahtui melko tarkalleen viitisenkymmentä vuotta sitten. Ongelman laaja käyttökohteiden kirjo postinkantajan ongelmakentän ulkopuolella, esimerkiksi DNA-ketjun järjestyksen määrittäminen ja matkapuhelimen käyttöliittymän käytettävyyden arviointi, pitää ongelman edelleen aktiivisen tutkimuksen piirissä. Suurin osa ongelman käyttökelpoisista muunnoksista on lisäksi vaikeita ongelmia, joihin alkuperäistä ratkaisua ei voi suoraan käyttää.

Kiinalaisen postimiehen ongelma ei ole mikään matematiikan erillinen saareke, vaan sillä on tiivis suhde mm. graafeihin, jotka ovat esiintyneet kumppanina alusta asti.

Käytännön laskuesimerkkinä kiinalaisen postimiehen ongelmaa sovelletaan murtomaahiihtoon Yllästunturin alueella. Tarkoituksena on löytää optimaalinen reitti, jossa alueen kaikki ladut hiihdetään läpi kertaalleen kokonaismatka minimoiden. Alueella on reilut 300 km latuja ristiin rastiin muodostaen satakunta risteystä eli hiihdettävää riittää, vaikka kokonaismatkan haluaa pitää mahdollisimman pienenä. Pisimmän yhteen menoon hiihdettävän lenkin lyhentämiseksi tarkastellaan myös muunneltua kiinalaisen postimiehen ongelmaa, joka kuitenkin paljastuu aiempien tutkimusten valossa vaikeaksi ongelmaksi ja varsinainen ratkaisu jää näin ollen tämän työn ulottumattomiin.

**Avainsanat** Kiinalaisen postimiehen ongelma, reititysongelma

# Sisältö

# 1 Johdanto

Kiinalaisen postimiehen ongelma on optimointitehtävä, jossa haetaan lyhin reitti siten, että reitin jokainen osa tulee kuljettua läpi. Konkreettisesti voidaan ajatella postimiestä, jonka pitää jakaa posti tiettyyn kaupunginosaan. Postimiehen lähtö- ja saapumispaikka on postikonttori ja hänen pitää kulkea kukin kadunpätkä vähintään kerran, jotta kaikki asukkaat saavat postinsa. Lyhin tällainen kierros on vastaus kiinalaisen postimiehen ongelmaan.

Kiinalaisen postimiehen ongelma on käyttökelpoinen edellä mainitun suoraviivaisen reititysongelman lisäksi muillakin tieteenalueilla, esimerkiksi biologiassa ja tietotekniikassa. Sovelluskohteiden lukuisan määrän takia - väheksymättä myöskään niiden rahallista merkitystä - ongelman tutkimus on edelleen aktiivista, vaikkakin ongelman perusversioon löytyi hyvä ratkaisu samaisella 1960-luvulla, jolla ongelma varsinaisesti määriteltiin.

Tämä työ on yleiskatsaus kiinalaisen postimiehen ongelmaan - uusia tutkimustuloksia ei synny, mutta ymmärrys ongelman luonteesta syvenee. Historiajaksossa aloitetaan 1700-luvulta, pääpaino on kuitenkin 1900-luvun loppupuolen ensimmäisissä ratkaisualgoritmeissa. Käytännön esimerkkinä ongelmaa sovelletaan optimaalisen hiihtolenkin suunnitteluun. Työssä ei rajoituta tiukasti alkuperäisen määrittelyn mukaiseen kiinalaisen postimiehen ongelmaan vaan käsitellään laajemmin siitä johdettuja reititysongelmia ja niiden ratkaisuja.

# 2 Termejä

Tässä luvussa esitellään graafiteorian termejä. Suomenkieliset termit ovat pääosin Ruohoselta (2013), englannin kieliset termit ovat puolestaan lähteistä Edmonds (1965b), Papadimitriou and Steiglitz (1998) ja Diestel (2010).

Graafiteoriassa eri lähteet eivät ole termien kohdalla täysin yhteneväisiä. Tässä työssä käytetään seuraavia määritelmiä.

Graafi, solmu, kaari

: (*Graph, vertex, edge*) Graafi $G = (V, E)$ on joukko solmuja $V$ ja kaaria $E$. Jokaisen kaaren $e$ kummassakin päässä on solmu $v$. Solmujen lukumäärä on $|V|$ ja kaarien lukumäärä on $|E|$. Mikäli kaarilla ei ole suuntia, graafi on suuntaamaton (*undirected*), mikäli kaikilla kaarilla on suunta, graafi on suunnattu (*directed*).

Edellisten välimuoto on sekagraafi (*mixed graph*). Graafi on painotettu (*weighted*), mikäli sen kaarille on annettu painot (esim. pituudet). Solmun $v$ aste (*degree*) on niiden kaarien määrä, joiden päätesolmu on $v$ - silmukka (*loop*) eli kaari, jonka alku- ja loppusolmu on sama, lasketaan kahdesti. Solmu on parillinen, mikäli sen aste on parillinen, muutoin se on pariton.

Kulku (*Walk*) Solmujen ja kaarien yhdistelmä $(v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots)$, jossa kaaren $e_i$ päätesolmut ovat $v_i$ ja $v_{i+1}$. Lyhin kulku on yksi solmu, jolloin kulun pituus on nolla. Kulku on suljettu, mikäli se päättyy alkusolmuun.

Reitti (*Trail, route*) Kulku, jossa graafin kukin kaari $e_i$ esiintyy vain kerran.

Polku (*Path*) Reitti, jossa graafin kukin solmu $v_i$ esiintyy vain kerran. Poikkeuksena on suljettu polku, joka päättyy alkusolmuun.

Kierros (*Tour*, *cycle*) Suljettu kulku.

Piiri (*Circuit*) Suljettu polku.

Yksinkertainen kierros
(*Simple tour*) Kierros, jossa graafin kukin kaari $e_i$ esiintyy enintään kerran.

Postimiehen kierros
(*Postman tour*) Kierros, jossa graafin kukin kaari $e_i$ esiintyy vähintään kerran.

Eulerin kierros
(*Euler tour*) Kierros, jossa graafin kukin kaari $e_i$ esiintyy täsmälleen kerran.

Kiinalaisen postimiehen ongelma
(*CPP, Chinese Postman Problem*) Optimointiongelma, jossa graafista haetaan kokonaismitaltaan lyhin postimiehen kierros.

Yksinkertainen graafi
(*Simple graph*) Graafi, jossa ei ole rinnakkaisia kaaria eikä silmukoita. Rinnakkaisilla kaarilla on samat päätesolmut.

Multigraafi (*Multigraph*) Gaafi, jossa on silmukoita tai rinnakkaisia kaaria.

Yhtenäinen graafi
(*Connected graph*) Graafi, jonka jokaisesta solmusta on polku kaikkiin muihin solmuihin.

Vahvasti yhtenäinen graafi
: (*Strongly connected graph*). Graafi, jonka jokaisesta solmusta on kaarien suuntaa noudattava polku kaikkiin muihin solmuihin.

Täydellinen graafi
: (*Complete graph*) Yksinkertainen graafi, jonka jokaisesta solmusta on kaari kaikkiin muihin solmuihin.

Eulerin graafi
: (*Euler graph*) Yhtenäinen graafi, jonka kaikki solmut ovat parillisia.

Kaksijakoinen graafi
: (*Bipartite graph*) Graafi, jonka solmut $V$ voidaan jakaa kahteen erilliseen joukkoon $V_1$ ja $V_2$ siten, että graafin jokaisen kaaren toinen päätesolmu kuuluu $V_1$:een ja toinen $V_2$:een.

Aligraafi
: (*Subgraph*) Graafi $G_s = (V_s, E_s)$ on graafin $G = (V, E)$ aligraafi, jos $V_s \subseteq V$ ja $E_s \subseteq E$.

Faktori
: (*Factor*) Graafin $G$ faktori on $G$:n aligraafi, joka sisältää kaikki graafin $G$ solmut.

Virittävä aligraafi
: (*Spanning subgraph*) Sama kuin faktori.

Sovitus
: (*Matching*) Graafin $(V, E)$ kaarien osajoukko $M \subseteq E$ siten, että $M$:ään kuuluvilla kaarilla ei ole yhteisiä päätesolmuja.

Maksimisovitus
: (*Maximum cardinality matching*) Sovitus, jossa on suurin mahdollinen määrä kaaria.

Raskain sovitus
: (*Maximum weighted matching*) Sovitus, jonka kaarien painojen summa on mahdollisimman suuri.

Täydellinen sovitus
: (*Perfect matching*) Sovitus, jossa jokainen graafin solmu on jonkin sovitukseen kuuluvan kaaren päätesolmu.

Kevein täydellinen sovitus
: (*Minimum weighted perfect matching*) Täydellinen sovitus, jonka kaarien painojen summa on mahdollisimman pieni.

Metsä
: (*Forest*) Piiritön graafi.

Puu (*Tree*) Yhtenäinen graafi, jossa $|V| = |E| + 1$. Vaihtoehtoisesti yhtenäinen metsä.

## 2.1 Laskennallinen vaativuus

Algoritmien laskennallinen vaativuus (vaativuusteoria) arvioi tehtävän ratkaisun vaatimia resursseja (aika, tila) tehtävän kokoon verrattuna (Pohjolainen, 2010; Ruohonen, 2013).

$\mathcal{O}$ (*Big O*) $\mathcal{O}$ on funktion asymptoottisesta käyttäytymisestä kertova merkintä; $f(n) = \mathcal{O}(p(n))$ tarkoittaa, että on olemassa luku $n_l \in N$ siten, että kun $n \geq n_l$, $|f(n)| \leq C\,p(n),\ C \in R_+$. Suurilla $n$:n arvoilla $f(n)$ käyttäytyy siis korkeintaan kuten $vakio \cdot p(n)$.

Deterministinen algoritmi
Algoritmi, jolla ei ole valinnanmahdollisuuksia etenemisen suhteen.

Ei-deterministinen algoritmi
Algoritmi, jolla on useita vaihtoehtoja etenemisen suhteen.

$\mathcal{P}$ (*Deterministic polynomial time*) Deterministisesti polynomiaikaiset tehtävät ovat polynomiaikaisten algoritmien laskennallinen aikavaativuusluokka. Tehtävä ratkeaa deterministisellä algoritmilla ja ratkaisun vaatima aika $f(n)$ riippuu tehtävän koosta $n$ - graafien tapauksessa $n$ on esim. solmujen tai kaarien määrä tai niiden yhdistelmä. Tällöin suurilla $n$:n arvoilla $f(n)$ on kertaluokkaa $p(n)$, missä $p(n)$ on jokin $n$:n polynomifunktio.

$\mathcal{NP}$ (*Non-deterministic polynomial time*) Ei-deterministisesti polynomiaikainen tunnistustehtävä ratkeaa ei-deterministisellä algoritmilla ja kuuluu aikavaativuusluokkaan $\mathcal{P}$. Tunnistustehtävässä vastaus annetaan muodossa kyllä tai ei. Esimerkiksi minimointitehtävässä kysytään, onko tehtävän tiettyyn instanssiin löydettävissä pienempää ratkaisua kuin jokin tietty luku $k$. Mikäli $k$ on käypä ratkaisu ja vastaus on ei, $k$ on myös optimaalinen.

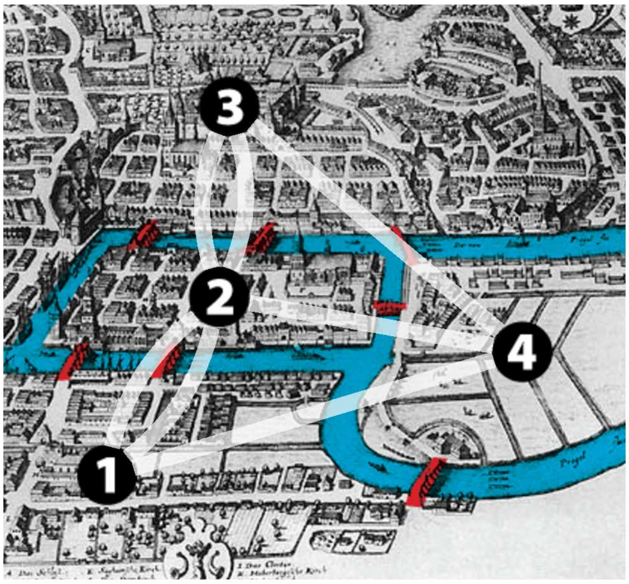
$\mathcal{NP}$-täydellinen
($\mathcal{NP}$-*complete*) $\mathcal{NP}$-täydelliset tehtävät ovat vaikeimpia $\mathcal{NP}$-luokan tehtäviä. Määritelmän mukaan jokainen $\mathcal{NP}$-luokkaan kuuluva tehtävä on redusoitavissa polynomiaikaisesti mihin tahansa $\mathcal{NP}$-täydelliseen tehtävään.

$\mathcal{NP}$-vaikea ($\mathcal{NP}$-*hard*) Mikäli tehtävän tunnistusversio kuuluu luokkaan $\mathcal{NP}$-täydellinen, tehtävän optimointiversio kuuluu luokkaan $\mathcal{NP}$-vaikea. Jokainen $\mathcal{NP}$-täydellinen tehtävä (ja täten myös luokan $\mathcal{NP}$ tehtävä) on redusoitavissa polynomiaikaisesti luokkaan $\mathcal{NP}$-vaikea; $\mathcal{NP}$-vaikean tehtävän ei tarvitse kuulua $\mathcal{NP}$-luokkaan eikä se siten rajoitu pelkästään tunnistustehtäviin kuten $\mathcal{NP}$ ja $\mathcal{NP}$-täydellinen.

Karkeasti voidaan myös määritellä, että luokan $\mathcal{P}$ tehtävät ovat ratkeavia ja muut ovat ratkeamattomia eli liian paljon aikaa vieviä, kunhan tehtävän koko on tarpeeksi suuri.

# 3 Historia

Kiinalaisen postimiehen ongelman historian katsotaan alkaneen Königsbergin silloista (Grötschel and Yuan, 2012), joiden suhteen 1700-luvun alun asukkailla oli seuraava ongelma: miten kävellä kaupungin eri alueilla siten, että kukin silta tulee ylitettyä täsmälleen kerran (kuva 1).




Kuva 1: Königsbergin sillat 1730-luvulla (Wolfram reference, 2015). Euler mallinsi ongelman graafina, jonka solmuina olivat neljä aluetta ja kaarina seitsemän siltaa.

Ongelman ratkaisi sveitsiläinen matemaatikko Leonhard Euler, joka osoitti, ettei haluttua reittiä ole (Euler, 1736). Ja enemmän, Euler ratkaisi ongelman yleisellä tasolla eli millä tahansa siltojen, saarien ja jokihaarojen yhdistelmällä. Tämän dokumentin termein silta on kaari, alue tai saari on solmu ja haluttu reitti on Eulerin reitti.

Eulerin reitin olemassaololle Euler esitti seuraavat kolme sääntöä:

1. Jos alueita, joihin johtaa pariton määrä siltoja, on enemmän kuin kaksi, tällaista reittiä ei ole olemassa.
2. Jos kuitenkin täsmälleen kahteen alueeseen johtaa pariton määrä siltoja, reitti on mahdollinen, mikäli se alkaa toisesta näistä alueista.
3. Lopulta, jos ei ole alueita, johon tulee pariton määrä siltoja, reitti on mahdollinen ja se voidaan aloittaa mistä alueesta tahansa.

Euler todisti kuitenkin vain ensimmäisen yllä olevista säännöistä (Biggs, 1976) eikä myöskään esittänyt yksityiskohtaisesti, miten Eulerin reitti löydetään, mikäli sellainen on olemassa.

Eulerin sääntöjä eli riittäviä ja välttämättömiä ehtoja Eulerin reitin olemassaololle sivusivat myös J. Poinsot 1809 ja J.B. Listing 1847, mutta päästiin 1870-luvulle ennen kuin kaikille säännöille 1-3 esitettiin todistus. Carl Hierholzerin todistus julkaistiin postuumisti 1873 (Hierholzer and Wiener, 1873) - Carl Wiener kirjoitti sen Hierholzerin kanssa käymiensä keskustelujensa pohjalta ilman kirjallisia muistiinpanoja.

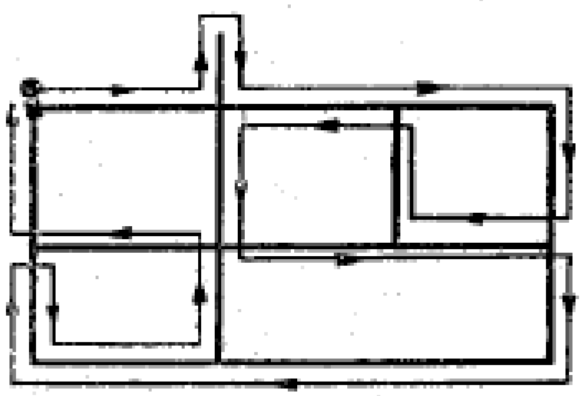
Todistuksen lisäksi Hierholzer esitti yksityiskohtaisen tavan löytää jokin Eulerin reitti; Hierholzerin algoritmi on vieläpä tehokkaampi kuin myöhempi Fleuryn algoritmi (Wikipedia Eulerian Graph, 2015).

Seuraava edistysaskel otettiin suuren harppauksen aikaisessa Kiinassa 1960, jossa Mei-ko Kwan muotoili kysymyksen uudella tavalla (Kwan, 1962, englannin kielinen versio):

> Kun meillä on yhtenäinen graafi, miten saamme piirrettyä jatkuvan graafin (kaarien lisäys sallittu) alkaen ja päätyen samaan pisteeseen mahdollisimman pienellä kaarien lisäyksellä.

Jatkuvan graafin voi mieltää graafiksi, jossa voi piirtää jokaisen kaaren mahdollisine toistoineen kynää paperista nostamatta ja päätyä takaisin alkusolmuun - Kwan käytti lähestymistavasta termiä graafinen ohjelmointi (*graphic programming*).

Kwan muotoili ongelman optimointiongelmaksi, esitti optimaaliselle ratkaisulle riittävät ja välttämättömät ehdot todistuksineen ja esitti algoritmin tehtävän ratkaisemiseksi. Aikaisemmin oli käsitelty Eulerin reittiä, nyt kyseessä oli kiinalaisen postimiehen kierros (kuva 2).



Kuva 2: Kwanin esimerkki ja ratkaisu kiinalaisen postimiehen ongelmaan (Kwan, 1962). Kaarien painot ovat niiden pituudet.

Kwanin artikkelin englannin kielinen versio päätyi NBS:n *(U.S. National Bureau of Standards*, nykyisin NIST) Jack Edmondsin käsiin, joka redusoi ongelman ei-kaksijakoisen graafin raskaimpaan sovitukseen (*maximum weighted matching of a non-bipartite graph*) (Edmonds and Johnson, 1973). Suorituksen arvoa nostaa, että juuri Edmonds itse julkaisi ei-kaksijakoisen graafin sovitukseen algoritmit 1965 - ensin graafin maksimisovitus (Edmonds, 1965b) ja melkeinpä välittömästi perään graafin raskain sovitus (Edmonds, 1965a). Myös ongelman nimi kiinalaisen postimiehen ongelma (CPP) on peräisin Edmondsilta hänen silloisen esimiehensä Alan Goldmanin inspiroimana (Pieterse and Black, 2014).

Artikkelissaan 1973 Edmonds esitteli myös kiinalaisen postimiehen ongelman muunnoksia. Alkuperäisessä versiossa ongelmaa kuvaava graafi on suuntaamaton; Edmonds otti esille tapaukset, jossa graafi on suunnattu, graafi on sekagraafi, graafin joitakin kaaria ei tarvitse kulkea tai että postimiehiä on monta.

# 4 Algoritmeja

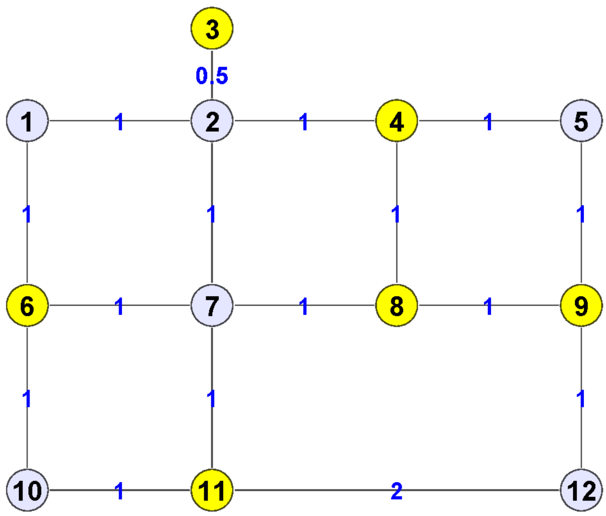
## 4.1 Kwanin algoritmi

Kwanin ratkaisu kiinalaisen postimiehen ongelmaan perustuu graafin täydentämiseen Eulerin graafiksi siten, että lisättyjen kaarien pituuksien summa on pienin mahdollinen. Tällä tavalla muodostetun Eulerin graafin jokainen Eulerin kierros on optimaalinen kiinalaisen postimiehen kierros. Kwanin 1960 esittämät riittävät ja välttämättömät ehdot optimaaliselle kaarien lisäykselle:

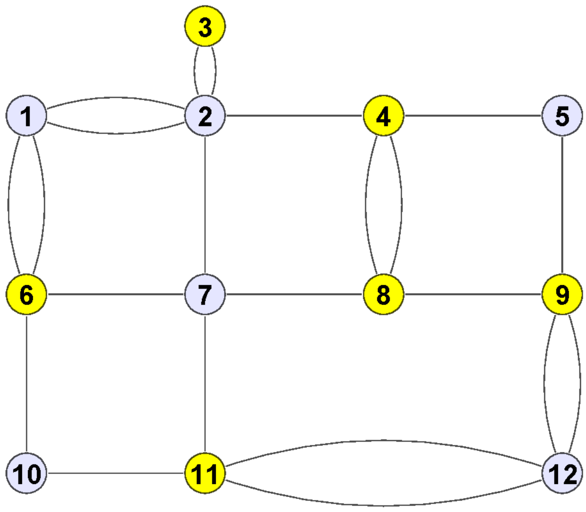
1. Alkuperäisen graafin kutakin kaarta kohden lisätään korkeintaan yksi kaari.

2. Eulerin graafissa minkä tahansa piirin kahdennettujen kaarien yhteenlaskettu pituus on korkeintaan puolet piirin pituudesta.

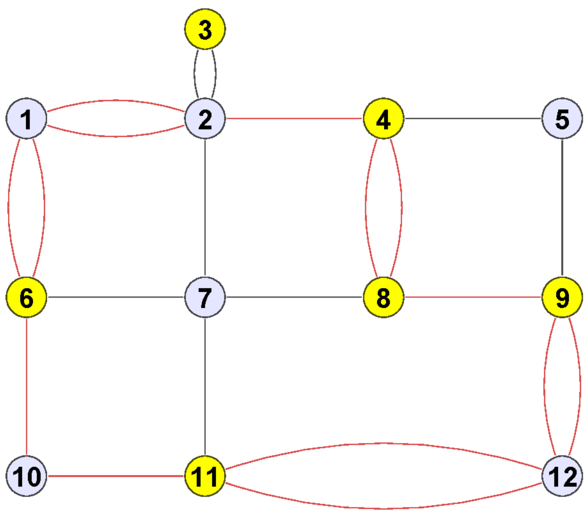
Katsotaan asiaa esimerkin (kuvat 3-6) pohjalta.



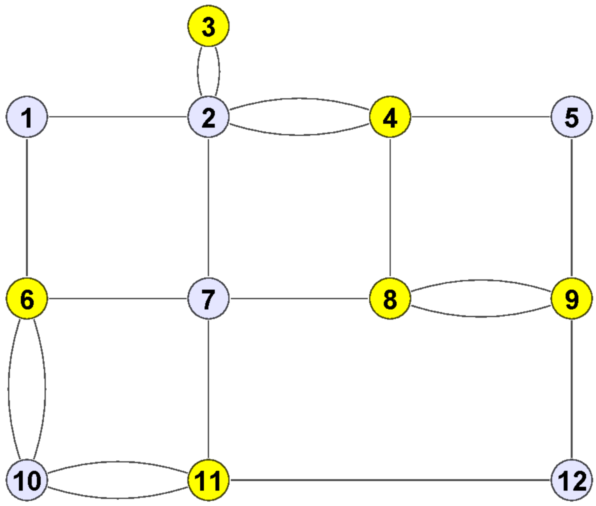

Kuva 3: Ongelma graafina. Parittomat solmut ovat keltaisia. Kaarien numerot ovat niiden painoja, joita ei merkitä jäljempänä näkyviin.




Kuva 4: Alkuarvaus. Graafi on Eulerin graafi eikä mitään alkuperäistä kaarta ole monistettu yhtä kertaa enempää.




Kuva 5: Punaisella merkitty piiri rikkoo Kwanin toista ehtoa optimaaliselle postimiehen kierrokselle.

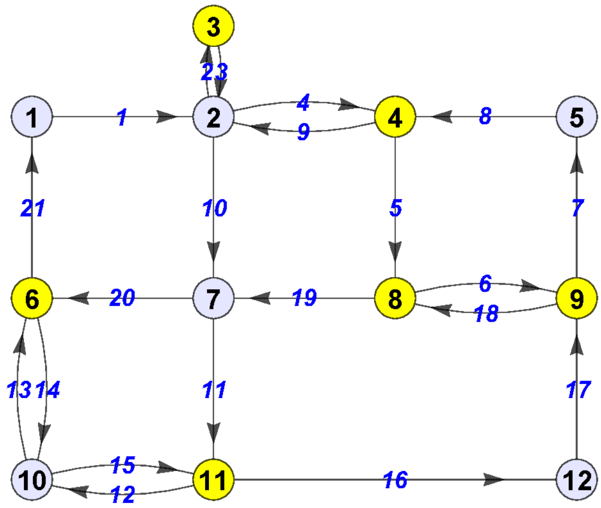



Kuva 6: Postimiehen ongelman kannalta optimaalinen Eulerin graafi.

Kuvassa (3) on Kwanin alkuperäisen esimerkin kaltainen graafi. Graafi ei ole Eulerin graafi, koska siinä on parittomia solmuja, kuvassa keltaisella. Ratkaisun ensimmäisessä vaiheessa graafi täydennetään Eulerin graafiksi yhdistämällä parittomat solmut toisiinsa siten, että kukin alkuperäisen graafin kaari kahdennetaan korkeintaan kerran (kuva 4). Ratkaisu ei ole kuitenkaan optimaalinen, koska graafista löytyy piiri, jossa kahdennettujen kaarien pituus ylittää puolet piirin pituudesta (kuva 5). Asia korjaantuu vaihtamalla kyseisen piirin kahdennettujen ja kahdentamattomien kaarien paikat (kuva 6).

Nyt graafissa ei ole enää piiriä, jossa kahdennettujen kaarien yhteenlasketut pituudet ylittäisivät puolet piirin pituudesta, joten graafi on kiinalaisen postimiehen kannalta optimaalinen Eulerin graafi, jossa jokainen Eulerin kierros on optimaalinen ratkaisu kiinalaisen postimiehen ongelmaan.

Kwan ei ottanut kantaa Eulerin kierrosten hakuun - käydään se tässä läpi Hierholzerin algoritmilla. Eulerin graafissa jokaisen solmun aste on parillinen eli mikäli aloitamme kierroksen $c$ solmusta $v_0$, pääsemme aina takaisin $v_0$:aan kulkematta mitään kaarta kahdesti. Mikäli kaikki kaaret eivät ole kierroksessa mukana, kierroksessa on solmu $v_a$, joka on ainakin kahteen kierrokseen kuulumattoman kaaren päätepiste. Nyt $v_a$:sta lähtien voidaan muodostaa kierros $c'$, joka alkaa ja päättyy $v_a$:han ja jossa ei ole $c$:hen kuuluvia kaaria. Alkuperäistä isompi kierros saadaan nyt liittämällä alkuperäisen kierroksen $c$ kohtaan $v_a$ uusi kierros $c'$. Kierroksen $c$ kasvattamista jatketaan samalla tavalla, kunnes kaikki graafin kaaret ovat mukana. Yksi Eulerin kierros on




Kuva 7: Eulerin kierros, joka on optimaalinen postimiehen ongelman kannalta. Kaareen liitetty numero on sen järjestys Eulerin kierroksessa.

kuvassa (7).

Kwan ei myöskään esittänyt erityistä algoritmia piirien läpikäymiseen, esimerkkitehtävässä (kuva 3) niitä on 24 (Wolfram Mathematican funktio *FindCycle*).

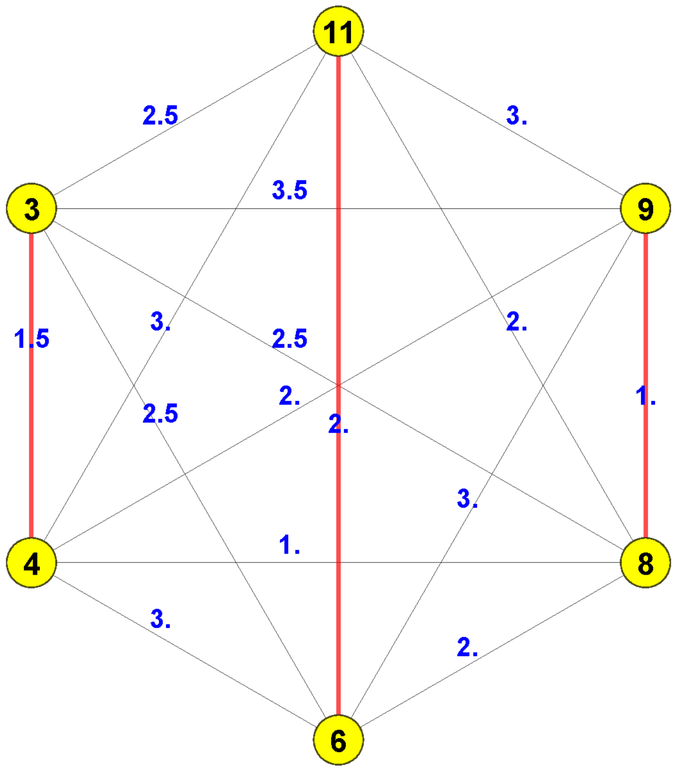
## 4.2 Edmondsin algoritmi

Edmondsin vaihtoehtoisessa tavassa (Edmonds and Johnson, 1973) ratkaista kiinalaisen postimiehen ongelma on sama pääperiaate kuin Kwanilla: graafi täydennetään Eulerin graafiksi siten, että kahdennettujen kaarien yhteenlaskettu paino on mahdollisimman pieni. Tämän jälkeen optimaalinen ratkaisu kiinalaisen postimiehen ongelmaan on mikä tahansa Eulerin kierros.

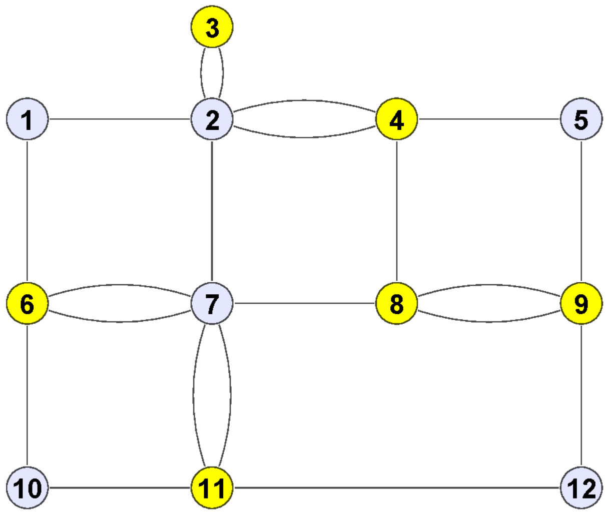
Optimointitehtävänä graafin keveimmän täydellisen sovituksen (*minimum weighted perfect matching of a non-bipartite graph*) ja graafin raskaimman sovituksen (*maximum weighted matching of a non-bipartite graph*) haku ovat ekvivalentteja tehtäviä suoraviivaisella graafin muunnoksella (Korte, 2002). Edmondsin julkaisema ratkaisu 1965a oli jälkimmäiseen ongelmaan, tässä on kyse taasen ensin mainitusta ongelmasta.

Edmonds redusoi graafin täydentämisen Eulerin graafiksi graafien sovitusteoriaan. Alkuperäisen graafin parittomista solmuista tehdään uusi täydellinen suuntaamaton painotettu graafi, jonka solmujen väliset painot lasketaan alkuperäisen graafin parittomien solmujen välisistä minimipoluista - tähän käy esim. Dijkstran algoritmi (Dijkstra, 1959). Uudessa täydellisessä graafissa solmuja on aina parillinen määrä, koska jokaisessa yhtenäisessä graafissa parittomien solmujen määrä on parillinen. Tämän ns. kättelylemman todisti jo Euler alkuperäisessä artikkelissaan 1736. Täydelliselle graafille haetaan kevein täydellinen sovitus. Tähän sovitukseen kuuluvat kaaret vastaavat alkuperäisen graafin parittomien solmujen välisiä minimipolkuja, joihin kuuluvat kaaret kahdennettuna tuottavat optimaalisen Eulerin graafin postimiehen ongelman kannalta.

Kuvissa (8) ja (9) on Edmondsin ratkaisu kiinalaisen postimiehen ongelmaan - esimerkki on sama kuin Kwanin algoritmissa. Kuvan (8) sovitukseen kuuluu kolme kaarta: 3-4, 8-9 ja 6-11. Alkuperäisessä graafissa ne vastaavat minimipolkuja 3-2-4, 8-9 ja 6-7-11 (kuva 9).




Kuva 8: Alkuperäisen graafin (kuva 3) parittomista solmuista muodostetun täydellisen graafin kevein täydellinen sovitus, johon kuuluvat kaaret on esitetty punaisella värillä.




Kuva 9: Postimiehen ongelman kannalta optimaalinen Eulerin graafi.

### 4.2.1 Lineaarista ohjelmointia

Edmonds osoitti, että graafin raskain sovitus voidaan ratkaista lineaarisella ohjelmoinnilla, kun rajoitusehtoihin lisätään ns. blossom-yhtälöt. Tällöin lineaarisen ohjelman rajoitusehtojen muodostaman monitahokkaan (*polyhedron*) ääripisteet ovat kokonaislukuarvoisia (Edmonds, 1965a), jolloin optimaalinen ratkaisukin löytyy kokonaislukujen joukosta - sovituksen kohdalla joukosta $\{0, 1\}^{|E|}$.

Blossom-yhtälöt kertovat, että minkä tahansa parittoman solmujoukon (solmujen määrä $m = 2k + 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$) solmujen välisistä kaarista korkeintaan $k$ voi kuulua sovitukseen. Tehtävän suoraviivaista ratkaisua vaikeuttaa, että parittomia solmujoukkoja on eksponentiaalinen määrä solmujen määrään nähden; jos graafissa on $n$ solmua, siinä on $N = 2^{n-1} - n$ paritonta solmujoukkoa (Papadimitriou and Steiglitz, 1998).

Tällainen tehtävä on omiaan primaali-duaali -algoritmille, jossa käypää duaaliratkaisua parannetaan vaiheittain ratkaisemalla jokaisella askeleella ns. rajoitettu primaali, jossa ovat täydentyvyys-periaatteen (*complementary slackness*) mukaisesti mukana vain ne rajoitusyhtälöt, joiden duaalivastineissa yhtäsuuruus on voimassa.

Tässä tapauksessa rajoitettu primaali on painottamattoman virittävän aligraafin maksimisovituksen (*maximum cardinality matching*) haku - ongelma, johon Edmonds esitti kuuluisan blossom-algoritminsa (Edmonds, 1965b).

### 4.3 Huomioita

Kiinalaisen postimiehen ongelman ratkaisu ei ole välttämättä yksikäsitteinen - ei kaarien kahdentamisen eikä Eulerin kierrosten kannalta. Kaarien kahdentamisen suhteen tästä ovat esimerkkinä yllä muodostetut Eulerin graafit (kuvat 6 ja 9): polut 6-7-11 ja 6-10-11 ovat yhtä pitkät.

Koska jokainen Eulerin kierros on optimaalinen ratkaisu kiinalaisen postimiehen ongelmaan, optimaalisten ratkaisujen lukumäärä on Eulerin kierrosten lukumäärä. Yllä olevassa ratkaisussa (kuva 6) Eulerin kierroksia on 8576 (Wolfram Mathematican funktio *FindEulerianCycle*). Yleisesti suuntaamattoman graafin Eulerin kierrosten laskeminen on vaikea ongelma (Brightwell and Winkler, 2004) ja tässä työssä käytetyssä laskentaympäristössä jo $K^7$:n (täydellinen graafi, jossa on 7 solmua ja kaari jokaisen solmuparin välillä) Eulerin kierrosten lukumäärän laskenta epäonnistui.

Edmondsin (1965b) sovitusalgoritmi kuuluu laskennallisesti luokkaan $\mathcal{P}$ ja Edmondsin oma arvio laskennallisesta vaativuudesta oli konservatiivinen $\mathcal{O}(|V|^4)$; Kolmogorov (2009) ja Syslo (2006) arvioivat algoritmin kompleksisuuden luokkaa paremmaksi $\mathcal{O}(|E||V|^2)$. Teoreettisesti nopein algoritmi vuonna 2006 (Syslo et al.) oli Micali-Vaziranin $\mathcal{O}(|E||\sqrt{V}|)$, josta todistus (*proof of correctness*) julkaistiin joitakin vuosia myöhemmin (Vazirani, 2012).

# 5 Ongelman muunnelmia

Liitteessä A on listattu kiinalaisen postimiehen ongelman (CPP) muunnoksia. Joissakin lähteissä C-kirjain tiputetaan pois lyhenteestä, mikäli kaikkia kaaria ei tarvitse kulkea - puhutaan siis postimiehen ongelmasta (PP, *Postman Problem*). Joissakin lähteissä C jätetään pois pelkästään vain lyhyemmän merkinnän takia.

Eri versioissa kiinalaisen postimiehen ongelmaan asetetaan joko lisää rajoituksia tai vaihtoehtoisesti siitä poistetaan rajoituksia. Ehtojen lisäämisestä on esimerkkinä sekalainen kiinalaisen postimiehen ongelma (MCPP), jossa jotkut kaaret ovat yksisuuntaisia - eivät kuitenkaan kaikki, koska tällöin olisi kyseessä suunnattu kiinalaisen postimiehen ongelma (DCPP). Rajoitusten poistosta on esimerkkinä maalaispostimiehen ongelma (RPP), jossa joitakin kaaria ei tarvitse kulkea, mutta niitä pitkin voi kulkea, jos siten kokonaismatkasta saadaan pienempi. Eri vaihtoehtoja voi luonnollisesti yhdistellä, esim. sekalainen maalaispostimiehen ongelma (MRPP), jossa joitakin yksi-tai kaksisuuntaisia kaaria ei tarvitse kulkea (Eiselt et al., 1995b).

Kiinalaisen postimiehen ongelma (CPP) ja sen suunnattu versio (DCPP) ovat ratkaistavissa polynomiaikaisesti - CPP on redusoitavissa graafin sovitustehtävään ja DCPP minimikustannusvirtaustehtävään (*minimum cost flow problem*). Muut postimiehen ongelman versiot ovat pääsääntöisesti $\mathcal{NP}$-vaikeita optimointitehtäviä joitakin yksittäistapauksia lukuun ottamatta. Jälkimmäisestä on esimerkkinä tuulinen kiinalaisen postimiehen ongelma (WCPP), jossa kaarien painot voivat olla erilaiset eri suuntiin kuljettaessa; yleisesti WCPP on $\mathcal{NP}$-vaikea optimointitehtävä, mutta mikäli pohjana oleva graafi on Eulerin graafi, tehtävälle on olemassa polynomiaikainen ratkaisu (Eiselt et al., 1995a).

# 6 Ongelman sovelluskohteita

Tässä postimiehen ongelmaa käsitellään laajassa merkityksessä reititysongelmana edellisen luvun 5 hengessä eikä rajoituta tiukasti kiinalaisen postimiehen ongelmaan, jossa määritelmän mukaan on kuljettava yhtenäisen suuntaamattoman multigraafin kaikki kaaret.

Postimiehen ongelmalla on lukuisia käytännön sovelluksia, ongelma on selvästi asetettu, mutta yksinkertaista ja yleispätevää algoritmia ei ole (Kramberger and Žerovnik, 2007). Kwanin alkuperäisessä hengessä käyttökohteina ovat kaikki reititysongelmat, joissa on olennaista optimoida kulku pitkin kaarta: postin jakelu, lumen auraus, jätteen keräys, sähkölinjojen tarkastus ja pysäköinnintarkastajien reitin suunnittelu.

Postimiehen ongelmaa voidaan soveltaa luovasti myös alkuperäisen käyttötarkoituksensa ulkopuolella. Seuraavaksi joitakin esimerkkejä eri tieteenaloilta yksityiskohtaisemmin käsiteltynä.

Leikkuualgoritmeja, joissa yhdestä aihiosta leikataan useita eri kappaleita nostamatta leikkuuterää välillä ylös, voidaan mallintaa maalaispostimiehen ongelmana (Rodrigues and Ferreira, 2012).

Elektronisten integroitujen piirien (VLSI) testaukseen, jossa signaalin reitti piirin läpi riippuu syötteestä ja piirin tilasta, voidaan hakea minimimittainen testisuunnitelma, jossa kaikki vaihtoehtoiset reitit käydään läpi, kiinalaisen postimiehen reitillä (Füredi and Kurshan, 2004).

Valikkopohjaisten käyttöliittymien (matkapuhelimet, kamerat, pesukoneet ym.) testaus käytettävyyden kannalta on kiinalaisen postimiehen ongelma, jonka ratkaisu antaa pienimmän mahdollisen testipolun, jolla kaikki siirtymät tilasta toiseen saadaan testattua. Mallin graafissa napin painallus on kaari ja valikon tila on solmu; mikäli napilla ei ole toimintoa kyseisessä tilassa, se on silmukka. Samaan sarjaan kuuluu myös verkkosivustojen linkkien eheyden ja oikeellisuuden analysointi. Kiinalaisen postimiehen reitti ei kerro linkkien laadusta, mutta se antaa lyhimmän tavan testata jokainen linkki. Malligraafissa linkki on kaari ja sivu on solmu (Thimbleby, 2003).

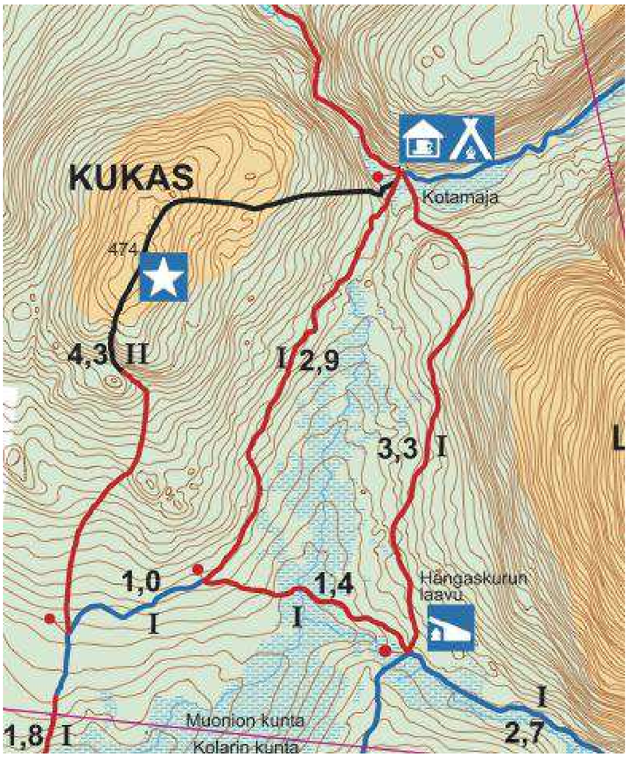
Bioinformatiikassa käyttökohde on DNA:n rakenneosien (nukleotidien) järjestyksen määrittäminen (*DNA fragment assembly*). DNA:ta ei pystytä lukemaan kerralla vaan luku tehdään tietyn pituisissa sekvensseissä. Lukemisen jälkeen oikea DNA-ketju pitäisi koota luetuista sekvensseistä, joiden järjestystä ei tiedetä, joissa on päällekkäisyyksiä ja jotka ovat eri pituisia. Lyhin DNA-ketju, joka sisältää kaikki kerätyt sekvenssit, on osoittautunut kelvolliseksi arvioksi oikealle DNA-ketjulle. Tämä ongelma voidaan muotoilla kiinalaisen postimiehen ongelmana, jossa graafina on lukusekvenssien määrämittaisista paloista koottu de Bruijnin graafi (Kundeti et al., 2012).

Yleispiirteenä voidaan todeta, että kaikki yllä olevat sovellukset ovat mallinnettavissa graafeina, joissa siirtymät ja niiden optimointi ovat oleellisia.

## 6.1 Konkreettinen ratkaisuesimerkki: hiihtoa Ylläksellä

Otetaan konkreettinen esimerkki murtomaahiihdosta Pohjois-Suomessa sijaitsevan Ylläs-tunturin alueelta, jossa on kohtuullisen kattava hiihtolatujen verkosto: yli 300 km yksistään Ylläksen hoitoalueella. Hiihtäjän aikomuksena on sivakoida yhteen menoon kaikki ladut, mutta fyysiset rajansa tuntien hän haluaa minimoida hiihdettävän kokonaismatkan.

Alueen laduista on olemassa latukartta (kuva 10), joka voidaan tulkita luontevasti graafiksi siten, että solmu on latujen risteys tai päätepiste ja kaari on kahden solmun välinen latuosuus. Kaaren painoksi sopii sen pituus.

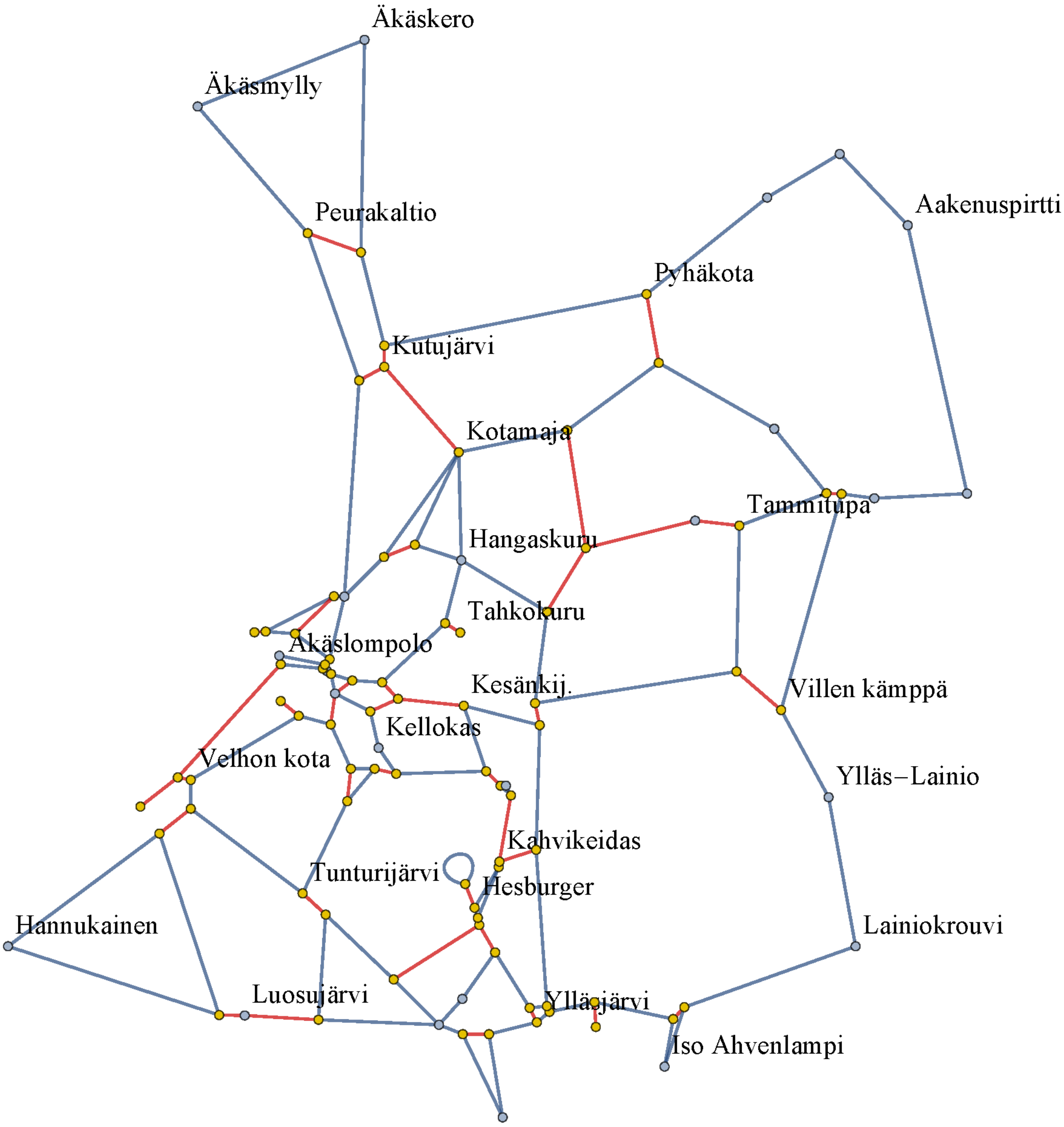



Kuva 10: Ote Ylläksen latukartasta vuodelta 2011 (Ylläksen Rasti ry, 2011).

Hiihtäjän ongelma on nyt täsmälleen kiinalaisen postimiehen ongelma, jossa latukarttaa mallintavassa graafissa on 98 solmua, 135 kaarta ja kaarien yhteenlaskettu pituus on 299 km (kuva 11). Parittomien solmujen lukumäärä on 74, joten graafi ei ole Eulerin graafi ja optimaalinen hiihtolenkki on kiinalaisen postimiehen kierros. Huomattakoon, että Kwanin ensimmäinen optimaalisuusehto takaa, että optimiratkaisussa mitään latua ei hiihdetä kahta kertaa enempää. Optimaalisen hiihtolenkin pituudelle saadaan siis triviaalisti alarajaksi kaarien pituuksien summa 299 km ja ylärajaksi sama kahteen kertaan eli 598 km.

Sekä kartan muunnos graafiksi että kiinalaisen postimiehen ongelman ratkaisu tehtiin Wolfram Mathematicalla, jossa on optimointiin valmis funktio *FindPostmanTour*. Uudehkolla kannettavalla tietokoneella (ns. ultrabook eikä tehopakkaus) optimointi vei seinäkelloaikaa muutaman millisekunnin eli 1960-luvun termillä voidaan todeta algoritmin olevan hyvä. Lopullinen hiihtomatka venyi latuverkoston 299 kilometristä 355 kilometriin, kahteen kertaan hiihdettävien latujen kokonaispituudeksi tuli siis 56 km 47 pätkässä.

Kuvassa (11) ei ole esitetty varsinaisesti postimiehen kierrosta vaan yhteen




Kuva 11: Latukartasta muodostettu graafi, jossa on merkitty punaisella kahteen kertaan hiihdettävät ladut.

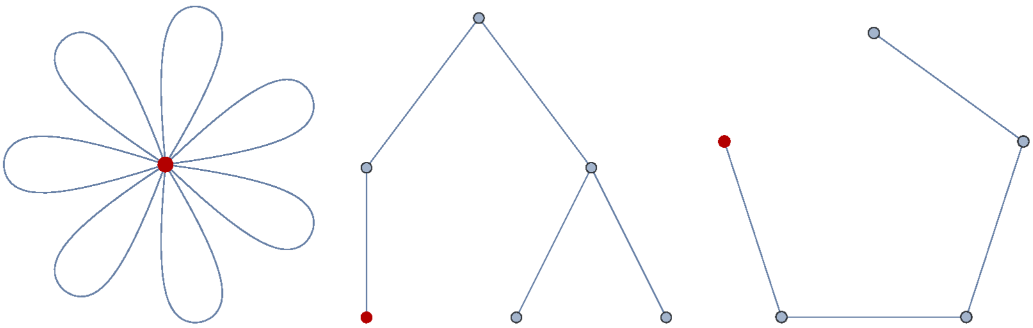
(sinisellä) ja kahteen (punaisella) kertaan hiihdettävät ladut siten, että kahteen kertaan hiihdettävien osuuksien yhteenlaskettu pituus on mahdollisimman pieni. Mikäli punaiset kaaret muutetaan kahdeksi rinnakkaiseksi kaareksi (esim. kuva 6), saadaan Eulerin graafi, jossa jokainen Eulerin kierros on optimaalinen kiinalaisen postimiehen kierros. Yksittäisiä Eulerin kierroksia voi nyt hakea Hierholzerin algoritmilla (luku 4.1).

Ylläksen matkailusivustolla (yllas.fi, 2015) mainitaan Ylläksen hoitoalueen latujen kokonaispituudeksi 330 km, mikä on samaa suuruusluokkaa tässä mallina käytetyn graafin kaarien kokonaispituuden 299 km kanssa. Mallissa on poistettu joitakin vähän hoidettuja tai hoitamattomia osuuksia - esim. Pirunkuru ja Aakenuksen laki.

Mallin käyttökelpoisuuden kannalta on tietysti olennaista, että 355 km voidaan hiihtää osapuilleen yhteen menoon. Vertailukohta löytyy tarkastelemalla 24 tunnin hiihdon tuloksia: nykyinen naisten ennätys on 344 km (IS, 2015) ja miesten 433 km (ESS, 2010). Koska 24 tunnit hiihdot hiihdetään käytännössä yhteen menoon, 355 km matkana ei tuntuisi ylitsepääsemättömältä. Hiihtäjän huollon järjestäminen vaatinee erityisen huolellisia järjestelyjä: 24 tunnin hiihdot tehdään yleensä tasaisella, lyhyellä (alle 2 km) lenkillä jatkuvasti saatavissa olevan huollon vuoksi.

Yllä mainitun miesten ennätyksen hiihtäjä Teemu Virtanen myönsi Etelä-Suomen sanomien haastattelussa kuntonsa olleen hyvä. Passiivisemmalle hiihdon harrastajalle saadaan hiihdettävämpi vaihtoehto, kun kappaleen 5 hengessä malliksi otetaan esimerkiksi MM k-WMCPP:n (*Min-Max Windy Mixed k- Chinese Postman Problem*). Selkokielellä lyhenne tarkoittaa, että kaikki ladut hiihdetään vähintään kerran (CPP). Tämän voi tehdä kuitenkin $k$ kierroksella (k); kaikkien kierrosten alku ja loppu ovat samassa pisteessä. Kierrosten pituuksien tasoittamiseksi minimoidaan pisimmän lenkin pituus (MM). Jotkin laduista voivat olla yksisuuntaisia (M) latujen turvallisuusohjeen mukaisesti. Kun kaarien painona ei käytetä yksioikoisesti matkaa vaan esim. hiihtämiseen kuluvaa aikaa vakiorasituksella, kaksisuuntaisen kaaren paino voidaan asettaa erilaiseksi eri suuntiin hiihdettäessä (W).

Kun $k$:n arvoa kasvatetaan, intuitiivisesti voi päätellä, että pisimmän lenkin pituus voi pienentyä tiettyyn rajaan asti. Kuvassa (12) on hahmoteltu muutama yksinkertaistettu esimerkkitapaus. Kuvassa 12a maksimikierroksen pituus pienenee $k$:n arvoon 7 saakka, jolloin lyhin pisimmillään hiihdettävä lenkki on yksi kaaren mitta. Kuvassa 12b arvolla $k = 2$ saadaan pisin lenkki lyhenemään kahdeksan kaaren mittaiseksi kierrokseksi. Kuvassa 12c pisimmän kierroksen pituus on aina kahdeksan kaarta, mikä on kyettävä hiihtämään kerralla $k$:n arvosta riippumatta.



(a) Arvolla $k = 1$ saadaan yksi seitsemän kaaren mittainen kierros. Arvolla $k = 7$ saadaan seitsemän yhden kaaren mittaista kierrosta. Kokonaismatka on sama kaikilla $k \in \{1, \ldots, 7\}$.

(b) Arvolla $k = 1$ saadaan yksi 10 kaaren mittainen kierros. Arvolla $k = 2$ saadaan kaksi kahdeksan kaaren mittaista kierrosta. Kokonaismatka pitenee siis 10 kaaresta 16 kaareen, kun hiihtoa ei tehdä yhteen menoon.

(c) Arvolla $k = 1$ saadaan yksi kahdeksan kaaren mittainen kierros. Kierrosten lisääminen ei muuta tilannetta.

Kuva 12: k-CPP:n testailua.

Esimerkkien valossa vaikuttaisi selvältä, että $k$:n arvolle on löydettävissä järkevä yläraja, jolla tarpeetonta kaarien toistoa vältetään; kuvan (12c) tapauksessa yksinkertainen min-max optimointi arvolla $k = 2$ johtaisi kahteen identtiseen kahdeksan kaaren mittaiseen kierrokseen.

Latukarttagraafi ei ole k-CPP:lle ongelmallinen puu. Valitsemalla lisäksi lähtöpaikka keskeiseltä paikalta (oma optimointitehtävänsä), saataneen pisimmän kerralla hiihdettävän matkan pituus lyhenemään 355 km:stä, mikä on k-CPP -mallin ensisijainen tavoite.

Hiihdettävyydellä on kuitenkin hintansa, sillä laskennallisesti MM k-WMCPP on $\mathcal{NP}$-vaikea optimointiongelma, joka ei ratkea Edmondsin algoritmilla. Itse asiassa kaikki lisäykset - tuulisuus, sekalaisuus ja $k$-kierrosta - riittäisivät yksinäänkin muuttamaan ongelman vaikeaksi (Eiselt et al., 1995a; Osterhues and Mariak, 2005).

Usean kierroksen mallille tulee lisähintaa myös kasvaneesta kokonaiskilometrimäärästä. Latukarttagraafin Eulerin versiossa solmun korkein aste on kuusi, mikä tarkoittaa, että $k$:n ollessa suurempi kuin kolme, hiihdettäviin latuihin tulee toistoa lähtöpaikasta riippumatta.

# 7 Yhteenveto

Tässä työssä käsiteltiin kiinalaisen postimiehen ongelmaa 1700-luvulta nykypäivään - ajallisesti koko ongelman historia. Periaatetasolla käsiteltiin myös kaksi ensimmäistä ratkaisualgoritmia 1960-luvulta.

Kiinalaisen postimiehen ongelma on siitä mielenkiintoinen ongelma, että sille kehitettiin hyvä (polynomiaikainen) ratkaisualgoritmi pian ongelman täsmällisen määrittelyn jälkeen. Tämä ei ole kuitenkaan estänyt algoritmien jatkokehittelyä ja siitä onkin julkaistu useita paranneltuja versioita. Vain alkuperäinen kiinalaisen postimiehen ongelma (mallina suuntaamaton graafi) ja tämän täysin suunnattu versio ovat ratkaistavissa polynomiaikaisella algoritmilla - muut postimiehen ongelman versiot kuuluvat pääsääntöisesti $\mathcal{NP}$-vaikeisiin ongelmiin, jotka ovat nykyäänkin ratkeamattomia.

Jatkotutkimukselle on edelleen tilaus, voidaan parantaa tunnettua hyvää ratkaisua tai keskittyä johonkin ongelman erityisversioon ja lähteä hakemaan ratkaisua vaikeaan ongelmaan. Jälkimmäiseen hyvänä motivaationa on ongelman käyttökelpoisuus moneen alkuperäisen reitinvalintaongelman ulkopuolella olevaan tieteenalaan - yksi työssä käsitelty ongelma oli DNA:n rakenteen määrittäminen.

Työn laskennallisessa osassa sovellettiin kiinalaisen postimiehen kierroksen hakua Ylläksen latuverkostoon hiihtäjän näkökulmasta. Laskennassa käytettiin valmista ohjelmistoa ja lopputulos oli positiivinen pettymys - ratkaisu löytyi sekunnin tuhannesosissa tavallisella modernilla kannettavalla tietokoneella. Samassa yhteydessä käsiteltiin monimutkaisemman mallin käyttöä.

# Viitteet

Biggs, N., 1976. Graph theory 1736-1936. Clarendon Press, Oxford [Eng.].

Brightwell, G. R., Winkler, P., 2004. Note on counting Eulerian circuits. lanl. arXiv. org.Viitattu 7.2.2015.
URL http://pdf.aminer.org/000/816/448/note_on_counting_eulerian_circuits.pdf

Diestel, R., 2010. Graph theory, 4th Edition. No. 173 in Graduate texts in mathematics. Springer, Heidelberg ; New York.

Dijkstra, E., 1959. A Note on Two Problems in Connexion with Graphs. Numerische Mathematlk 1 (1), 269–271.
URL http://www-m3.ma.tum.de/foswiki/pub/MN0506/WebHome/dijkstra.pdf

Edmonds, J., 1965a. Maximum Matching and a Polyhedron with 0,1-Vertices. Journal of Research of the National Bureau of Stantards 69B.
URL http://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/jres/69B/jresv69Bn1-2p125_A1b.pdf

Edmonds, J., 1965b. Paths, trees, and flowers. Canadian Journal of mathematics 17 (3), 449–467.
URL http://cms.math.ca/openaccess/cjm/v17/cjm1965v17.0449-0467.pdf

Edmonds, J., Johnson, E., 1973. Matching, Euler tours and the Chinese postman. Mathematical Programming 5 (1), 88–124.
URL http://dx.doi.org/10.1007/BF01580113

Eiselt, H. A., Gendreau, M., Laporte, G., Apr. 1995a. Arc Routing Problems, Part I: The Chinese Postman Problem. Operations Research 43 (2), 231–242.
URL http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/opre.43.2.231

Eiselt, H. A., Gendreau, M., Laporte, G., Jun. 1995b. Arc Routing Problems, Part II: The Rural Postman Problem. Operations Research 43 (3), 399–414.
URL http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/opre.43.3.399

ESS, 2010. Lahtelainen Teemu Virtanen hiihti vihdoin 24 tunnin maailmanennätyksen. Viitattu 4.12.2015.
URL http://www.ess.fi/uutiset/paijathame/2010/11/19/lahtelainen-teemu-virtanen-hiihti-vihdoin-24-tunnin%E2%80%93maailmanennatyksen

Euler, L., 1736. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis.
URL http://eulerarchive.maa.org/pages/E053.html

Füredi, Z., Kurshan, R., May 2004. Minimal length test vectors for multiple-fault detection. Theoretical Computer Science 315 (1), 191–208.
URL
http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0304397503006224

Grötschel, M., Yuan, Y.-x., 2012. Euler, Mei-Ko Kwan, Königsberg, and a Chinese Postman. Optimization Stories, 43.
URL http://www.emis.ams.org/journals/DMJDMV/vol-ismp/vol-ismp-all.pdf#page=49

Hierholzer, C., Wiener, C., Mar. 1873. Ueber die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren. Mathematische Annalen 6 (1), 30–32.
URL http://link.springer.com/10.1007/BF01442866

IS, 2015. Iisalmelaishiihtäjä rikkoi 24 tunnin hiihdon maailmanennätyksen. Viitattu 4.12.2015.
URL http://www.iisalmensanomat.fi/news/iisalmelaishiihtaja-rikkoi-24-tunnin-hiihdon%E2%80%93maailmanennatyksen/

Kolmogorov, V., 2009. Blossom V: a new implementation of a minimum cost perfect matching algorithm. Mathematical Programming Computation 1 (1), 43–67.
URL http://dx.doi.org/10.1007/s12532-009-0002-8

Korte, B. H., 2002. Combinatorial optimization: theory and algorithms, 2nd Edition. No. 21 in Algorithms and combinatorics. Springer, Berlin ; New York.

Kramberger, T., Žerovnik, J., 2007. Priority constrained chinese postman problem. Logistics & Sustainable Transport 1 (1).
URL
http://jlst.fl.uni-mb.si/index.php/journal/article/view/5

Kundeti, V., Rajasekaran, S., Dinh, H., 2012. An efficient algorithm for Chinese postman walk on bi-directed de Bruijn graphs. Discrete Mathematics, Algorithms and Applications 4 (02), 1250019.
URL http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S179383091250019X

Kwan, M.-k., 1962. Graphic programming using odd or even points. Chinese Mathematics 1.
URL http://web.eecs.umich.edu/~pettie/matching/Kwan-Guan-chinese-postman-english.pdf

Osterhues, A., Mariak, F., 2005. On variants of the k-Chinese Postman Problem. Operations Research and Wirtschaftsinformatik, University Dortmund (30).
URL http://www.wiso.tu-dortmund.de/wiso/or/Medienpool/publikationen/dispap30.pdf

Papadimitriou, C. H., Steiglitz, K., 1998. Combinatorial optimization: algorithms and complexity. Dover Publications, Mineola, N.Y.

Pieterse, V., Black, P., 2014. Chinese postman problem. Viitattu 5.2.2015.
URL http://xlinux.nist.gov/dads/HTML/chinesePostman.html

Pohjolainen, S. (Ed.), 2010. Matemaattinen mallinnus, 1st Edition. WSOYpro Oy.

Rodrigues, A. M., Ferreira, J. S., 2012. Cutting path as a rural postman problem: solutions by memetic algorithms.Viitattu 5.11.2015.
URL http://repositorio-aberto.up.pt/handle/10216/57210

Ruohonen, K., 2013. Graafiteoria. Viitattu 19.1.2015.
URL http://math.tut.fi/~ruohonen/GT.pdf

Syslo, M. M., Deo, N., Kowalik, J. S., Dec. 2006. Discrete Optimization Algorithms: With Pascal Programs. Courier Corporation.

Thimbleby, H., 2003. The directed chinese postman problem. Software: Practice and Experience 33 (11), 1081–1096.
URL http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/spe.540/abstract

Vazirani, V. V., 2012. A Simplification of the MV Matching Algorithm and its Proof. arXiv preprint arXiv:1210.4594.Viitattu 22.11.2015.
URL http://arxiv.org/abs/1210.4594

Wikipedia Eulerian Graph, Nov. 2015. Eulerian path. Page Version ID: 689198071. Viitattu 18.11.2015.
URL https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Eulerian_path&oldid=689198071

Wolfram reference, 2015. The Seven Bridges of Königsberg. Viitattu 18.11.2015.
URL http://reference.wolfram.com/language/example/VisualizeEulerianCycles.html

yllas.fi, 2015. Ladut, reitit ja latukahvilat - Ylläs. Viitattu 3.12.2015.
URL http://www.yllas.fi/tekemista/hiihto/ladut-reitit-ja-latukahvilat.html

Ylläksen Rasti ry, 2011. Latukartta. Viitattu 5.1.2015.
URL
http://yllas.fi/sites/default/files/latukartta_2011_1.pdf

# A Ongelman muunnelmia

Kiinalaisen postimiehen ongelmasta on lukuisia muunnelmia, seuraavassa niistä valikoitu joukko.

Eiselt et al. (1995a,b)

| | |
|---|---|
| CPP | Chinese Postman Problem. Kiinalaisen postimiehen ongelma.<br>Hae kierros graafissa $G$ siten, että kaikki kaaret kuljetaan vähintään kerran ja kokonaismatka on pienin mahdollinen. Graafi $G$ on yhtenäinen, painotettu, suuntaamaton multigraafi. |
| DCPP | Directed Chinese Postman Problem. Suunnattu kiinalaisen postimiehen ongelma.<br>Kuin CPP, mutta kaikki kaaret ovat suunnattuja. Graafin pitää olla vahvasti yhtenäinen. |
| MCPP | Mixed Chinese Postman Problem. Sekalainen kiinalaisen postimiehen ongelma.<br>Kuin CPP, mutta osa kaarista on suunnattuja. |
| WCPP | Windy Chinese Postman Problem. Tuulinen kiinalaisen postimiehen ongelma.<br>Kuin CPP, mutta kaarien painot voivat olla erisuuntaisia eri suuntaan kuljettaessa. |
| RPP | Rural Postman Problem. Maalaispostimiehen ongelma.<br>Kuin CPP, mutta osaa kaarista ei tarvitse kulkea (voi kyllä, mikäli se pienentää kokonaismatkaa). |
| MRPP | Mixed Rural Postman Problem. Sekalainen maalaispostimiehen ongelma.<br>Kuin MCPP, mutta osaa kaarista ei tarvitse kulkea (voi kyllä, mikäli se pienentää kokonaismatkaa). |
| SCP | Stacker Crane Problem. Hyllynosturiongelma.<br>MRPP, jossa kaikki suunnatut kaaret on kuljettava. Suuntaamattomia kaaria ei tarvitse kulkea kuin tarpeen mukaan. |
| HCPP | Hierarchical Postman Problem. Hierarkinen postimiehen ongelma.<br>Graafin kaaret jaetaan prioriteetin mukaisiin ryhmiin; alemman prioriteetin kaaret palvellaan vasta kun kaikki ylemmän prioriteetin kaaret on palveltu. Kulku pitkin alemman prioriteetin kaarta pitkin on sallittu ennen ylemmän prioriteetin kaaren palvelua. |

Postimiehen tapauksessa palvelu vastaa postin jakoa, kulku ohikävelyä.

ARP
: Arc Routing Problem. Kaarireititysongelma.
Yleinen ongelmaluokka, jossa graafin kaarien määrätty joukko on kuljettava minimikustannuksin.

CARP
: Capasitated Arc Routing Problem. Kapasitiivinen kaarireititysongelma.
Kuin ARP, mutta usealla toimijalla, jolla kullakin on rajoitettu kapasiteetti.

GRP
: General Routing Problem. Yleinen reititysongelma.
Yleinen ongelmaluokka, jossa graafin kaarien ja solmujen määrätty joukko on kuljettava minimikustannuksin.

Osterhues and Mariak (2005)
: Kaaren painona on sen kulkemiseen tarvittava aika - palveluaika (posti jaetaan) tai läpikulkuaika (postia ei jaeta, puhdas läpikulku). Hiihtäjän tapauksessa matka käy yhtä hyvin.

k-CPP
: k- Chinese Postman Problem. k:n kiinalaisen postimiehen ongelma.
Kuin CPP, mutta postimiehiä on $k$ kappaletta. Graafin kaikki kaaret on kuljettava. Tehtävässä minimoidaan kaikkien postimiesten käyttämä yhteenlaskettu aika.

MM k-CPP
: Min-Max k-CPP. Min-max k:n kiinalaisen postimiehen ongelma.
Kuin k-CPP, mutta nyt minimoidaan pisin postimiehen käyttämä aika.

MAD k-CPP
: Minimum Absolute Deviation k-CPP. k:n kiinalaisen postimiehen ongelma, jossa minimoidaan postimiesten käyttämän ajan yhteenlaskettu poikkeama ohjeellisesta ajasta.

MSD k-CPP
: Minimum Square Deviance k-CPP. k:n kiinalaisen postimiehen ongelma, jossa minimoidaan postimiesten käyttämän ajan yhteenlaskettu neliöllinen poikkeama ohjeellisesta ajasta.

MOT k-CPP
: Minimum Overtime k-CPP. k:n kiinalaisen postimiehen ongelma, jossa minimoidaan postimiesten käyttämän ajan yhteenlaskettu

ohjeellisen ajan ylitys.

Kramberger and Žerovnik (2007)

GCPP Generalized Chinese Postman Problem. Yleistetty kiinalaisen postimiehen ongelma.
Kuin CPP, mutta kaaret on jaettu erillisiin joukkoihin. Kustakin kaarijoukosta on kuljettava vähintään yksi kaari siten, että kokonaismatka on pienin mahdollinen.

CCPP Capacitated Chinese Postman Problem. Kapasitiivinen kiinalaisen postimiehen ongelma.
Kuin k-CPP, mutta postimiehillä on rajallinen kapasiteetti (postisäkin koko).

RPPDC Rural Postman Problem with Deadline Classes. Aikarajoitettu maalaispostimiehen ongelma.
Kuin RPP, mutta nyt kuljettavat kaaret on jaettu joukkoihin, joilla kullakin on oma määräaikansa, mihin mennessä kaikki sen kaaret on kuljettava.

PCCPP Priority Constrained Chinese Postman Problem. Järjestetty kiinalaisen postimiehen ongelma.
Kuin CPP, mutta optimaalisten vastausten joukosta haetaan ratkaisu, joka toteuttaa lisäehdot mahdollisimman hyvin. Lisäehdot ovat tässä järjestetty lista solmuja $v_1, v_2, \ldots, v_k$, joiden kautta halutaan kulkea mahdollisimman aikaisin. Ensin optimaalisten ratkaisujen joukosta valitaan ne, joissa $v_1$:ssä vieraillaan mahdollisimman aikaisin, sitten taasen näistä valitaan edelleen ratkaisut, joissa $v_2$:n kautta kuljetaan mahdollisimman aikaisin jne.