

# KANDIDAATINTYÖ

## 2013

Paavo Kivistö

**Paavo Kivistö**

**Verkko-optimointiin perustuva mellakan-  
torjuntatasen laskenta mellakkapoliisin  
resurssien kohdentamisessa**

Aalto-yliopisto  
Perustieteiden korkeakoulu

Kandidaatintyö

04.02.2013

**Työn valvoja:** Professori Raimo P. Hämäläinen

**Työn ohjaaja:** Dosentti Kai Virtanen

Työn saa tallentaa ja julkistaa Aalto-yliopiston avoimilla verkkosivuilla. Muilta osin kaikki oikeudet pidätetään.

Tekijä: Paavo Kivistö	
Työn nimi: Verkko-optimointiin perustuva mellakantorjuntatasen laskenta mellakkapoliisin resurssien kohdentamisessa	
Tutkinto-ohjelma: Teknillinen fysiikka ja matematiikka	
Pääaine: Systemitieteet	Pääaineen koodi: Mat-2
Päiväys: 04.02.2013	Sivumäärä: 24
Valvoja: Professori Raimo P. Hämäläinen Ohjaaja: Dosentti Kai Virtanen Kieli: Suomi	
<p>Tässä työssä tutkitaan mellakan torjuntaa toteuttavien poliisijoukkojen toiminnan suunnittelua. Mellakat voivat vaatia kuolonuhreja ja aiheuttaa mittavia vahinkoja. Mellakoita vastaan on syytä varautua, jotta kyetään suojelemaan ihmishenkiä ja omaisuutta.</p> <p>Tässä työssä mellakoitsijoiden ja poliisien välinen toiminta ajatellaan pelitilanteena, joka kuvataan työssä kehitettävällä pelimallilla. Poliisin tavoitteena on pysäyttää mellakkajoukkojen eteneminen ja estää niiden pääsy tärkeäksi arvioituihin paikkoihin. Pelimallin avulla toteutetaan tarkasteluja, joilla selvitetään poliisin tavoitteiden toteutuminen.</p> <p>Tarkastelujen tekemiseen esitetään kaksi laskentatapaa. Ensimmäinen tapa perustuu algebraan ja toinen verkko-optimointiin. Työssä vertaillaan laskentatapojen eroja ja soveltuvuutta tarkastelujen toteuttamisessa.</p> <p>Pelimallin ja siihen sovellettujen tarkastelujen avulla kyetään selvittämään, onko poliisille asetetut tavoitteet mahdollista toteuttaa. Mallin avulla voidaan tarkastella mellakoiden torjuntaan liittyvien päätöksien seurauksia. Mallia voidaan hyödyntää mellakkapoliisin toiminnanjohtajien koulutuksessa.</p>	
Avainsanat: Mellakan torjunta, verkko-optimointi, pelimalli	

# Sisältö

<b>1 Johdanto</b>	<b>2</b>
<b>2 Pelitilanne</b>	<b>4</b>
<b>3 Tarkastelut</b>	<b>5</b>
3.1 Kantama-alueet . . . . .	5
3.2 Kohtaus- ja mellakantorjuntatasat . . . . .	5
3.3 Reittipisteiden huomiointi . . . . .	7
<b>4 Ratkaisumenetelmät</b>	<b>8</b>
4.1 Algebrallinen laskentatapa . . . . .	8
4.1.1 Kantama-alueet . . . . .	8
4.1.2 Kohtaus- ja mellakantorjuntatasat . . . . .	11
4.1.3 Reittipisteiden huomiointi . . . . .	13
4.2 Verkko-optimointiin perustuva laskentatapa . . . . .	14
4.2.1 Kantama-alueet . . . . .	14
4.2.2 Kohtaus- ja mellakantorjuntatasat . . . . .	15
4.2.3 Reittipisteiden huomiointi . . . . .	17
<b>5 Esimerkkejä</b>	<b>17</b>
5.1 Mellakantorjuntatasa ja kantama-alueet . . . . .	17
5.2 Lähtötietojen muuttuminen . . . . .	18
5.2.1 Poliisipartioiden lähtöviiveiden lyhentämisen vaikutus . . . . .	18
5.2.2 Poliisipartioiden nopeuden lisäämisen vaikutus . . . . .	19
5.3 Kantama-alueet reittipisteistä lähtien . . . . .	19
5.4 Laskentatapojen vertailu . . . . .	21
<b>6 Yhteenveto</b>	<b>22</b>
<b>7 Viitteet</b>	<b>24</b>

# 1 Johdanto

Mellakoita esiintyy esimerkiksi suurten kokousten ja jalkapallo-otteluiden yhteydessä. Rauhallisenakin pidetyssä maassa voi syntyä mielenilmauksena suuria mellakoita. Isossa-Britanniassa 2011 mellakat vaativat useita kuolonuhreja ja aiheuttivat satojen miljoonien vahingot [Guardian, 2011][YLE, 2011]. Jalkapallon EM-kisoissa 2012 Varsovassa jalkapallohuligaanit ottivat rajusti yhteen ja useita ihmisiä loukkaantui [Helsingin Sanomat, 2012]. Mellakoita vastaan on syytä varautua, jotta kyetään suojelemaan ihmishenkiä ja omaisuutta. Mitä paremmin mellakoiden torjunta on suunniteltu, sitä tehokkaammin niitä voidaan torjua.

Tässä työssä tarkastellaan mellakan torjuntaa toteuttavien poliisijoukkojen toiminnan suunnittelua. Poliisin toimintaa tulisi ohjata siten, että he kykenisivät puuttumaan ongelmiin mahdollisimman tehokkaasti. Poliisin resurssit ovat rajalliset, joten kaikkiin tärkeäksi arvioituihin kohteisiin ei voida sijoittaa suurta määrää joukkoja. Tämä on eräs syy suunnitella poliisien resurssien käyttöä. Resurssien hyvällä käytöllä voidaan minimoida materiaalihinkojen syntyä ja loukkaantuneiden ihmisten määrää.

Mellakoitsijoiden ja poliisien välinen toiminta voidaan ajatella pelitilanteena, joka kuvataan tässä työssä pelimallilla. Hyvä malli ja sen tuottamien tulosten selkeä esittäminen voivat auttaa tekemään perusteltuja päätöksiä hankalissa tilanteissa. Lisäksi mallin avulla voidaan tarkastella aiempien päätösten seurauksia kriittisesti sekä kouluttaa uusia mellakkapoliisin toiminnanjohtajia.

Jos pelitilanne on sellainen, että poliisien resursseja tarvitaan vain tietyillä hyvin rajatuilla mellakka-alueilla, resurssien optimaalisesta käytöstä voidaan muodostaa aikataulutehtävä kokonaisluoptimoimnin avulla [Kokkala, 2010]. Aikataulutehtävässä poliisien ajat lähtöpaikasta mellakka-alueille tulee tietää tarkasti, minkä takia pelitilanteen tulee olla muuttumaton tarkastelun ajan.

Jos pelitilanteen avulla halutaan tutkia poliisien liikkuttelua eri tavoin mellakka-alueille, tilanne voidaan mallintaa joukkojensiirto-ongelmana [Baker et al., 2002]. Siinä optimoidaan poliisien kuljetusten nopeutta ja kustannuksia mellakka-alueille, mutta siinä ei huomioida, mitä mellakka-alueilla tapahtuu ja kuinka poliisit ja mellakkajoukot vaikuttavat toisiinsa.

Poliisin joukot voidaan tulkita aseiksi, jotka lähetetään mellakka-alueille. Tällöin puhutaan weapon target tai missile allocation -ongelmasta [Matlin, 1970]. Siinä arvioidaan, kuinka eri aseet vaikuttavat kohteisiinsa ja etsitään kullekin aseelle kohde ja lähtöjärjestys niin, että arvioidut vaikutukset saadaan maksimoitua.

Pelitilanteen etenemistä voidaan tarkastella stokastisella simuloinnilla [Wallenius and Suzic, 2005]. Eri-

laisten tapahtumien todennäköisyydet arvioidaan, jolloin simuloinnilla saadaan todennäköisyyksiä mellakan mahdollisille seurauksille. Simulointia voidaan myös käyttää poliisipartioiden sijoittamiseen geneettisten algoritmien avulla [Schubert and Suzic, 2007]. Poliisipartiot sijoitetaan niin, että mellakoitsijoiden aiheuttamat vahingot saadaan minimoitua.

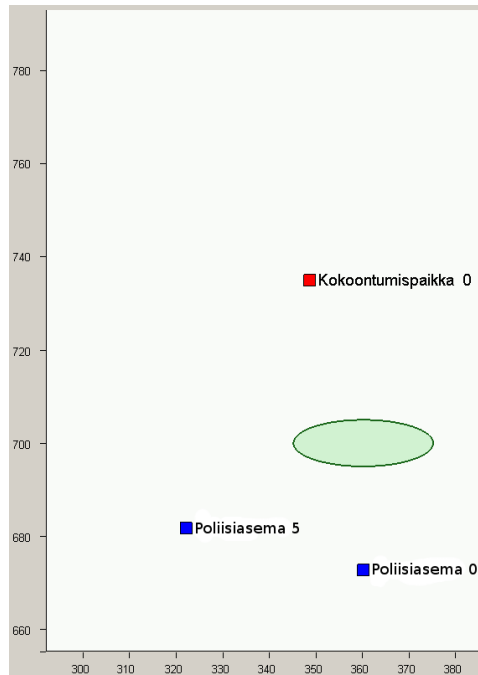
Tässä työssä kehitetään pelimalli, joka kuvaa tilannetta, johon kuuluu poliisi ja mellakkoitsijat sekä pelikenttä eli alue, jossa poliisi ja mellakoitsijat liikkuvat. Poliisin joukot muodostuvat poliisipartioista ja mellakoitsijat mellakkajoukoista. Poliisipartioita ja mellakkajoukkoja kutsutaan toimijoiksi. Poliisin tavoitteena on rajoittaa mellakkajoukkojen etenemistä esimerkiksi estämällä mellakoitsijoiden pääsy pelitilanteen määrittelyssä tärkeäksi arvioituun kohteeseen. Mellakoitsijoiden tavoitteena on aiheuttaa mahdollisimman paljon tuhoa ja vältellä poliisia.

Pelikenttä pitää sisällään poliisiasemia, jotka toimivat poliisipartioiden lähtöpaikkoina, ja mellakoitsijoiden kokoontumispaikkoja, jotka toimivat mellakkajoukkojen lähtöpaikkoina. Pelikentälle voidaan määrittellä esteitä, jotka rajoittavat toimijoiden liikkeitä. Jokaiselle toimijalle on määritetty nopeus, jolla se voi liikkua pelikentällä. Toimijalle on määritetty lähtöviive, joka kertoo kuinka kauan toimijalta kuluu aikaa pelitilanteen alkamisesta lähtöpaikasta lähtemiseen.

Pelimalli on deterministinen eli erilaiset epävarmuudet jätetään huomiotta. Mallia varten ei tarvitse tehdä todennäköisyysarvioita. Tuloksiin ei tule stokastiikasta seuraavaa vaihtelua eli ne ovat samoilla lähtökohdilla aina samanlaiset.

Pelimallin avulla tehdään simulointitarkasteluja. Simuloinneilla kuvataan pelitilanteen etenemistä ajassa, kun toimijoille on oletettu ominaisuudet ja toimintatavat. Simulointitarkasteluilla selvitetään, mitkä alueet voidaan saada suojattua ja mille alueille mellakoijat ehtivät ennen poliisia. Tarkasteluisa voidaan määrittää reittejä poliisille tai mellakoitsijoille ja arvioida näiden reittivalintojen vaikutusta tavoitteiden toteutumiseen. Pelimallin tarkoituksena ei ole löytää optimaalisia toimintastrategioita toimijoille.

Työn rakenne on seuraavanlainen. Kappaleessa 2 esitellään pelitilanteen malli. Kappaleessa 3 kerrotaan mallin mahdollistamat tarkastelut ja kappaleessa 4 esitetään laskentatavat tarkasteluiden tekemiseen. Esimerkit tarkastelujen soveltamisesta ovat kappaleessa 5 ja työn yhteenveto sekä jatkotutkimusmahdollisuuksia esitellään kappaleessa 6.



Kuva 1: Pelitilanteen alussa partiot ovat poliisiasemalla ja mellakkajoukko kokoontumispaikassa. Poliisiaseman ja kokoontumispaikan perässä oleva numero kertoo siellä olevan toimijan lähtöviiveen. Vihreä väri kuvaa estettä.

## 2 Pelitilanne

Työssä tarkasteltavassa pelitilanteessa toimijat ovat jakautuneet poliisipartioihin ja mellakkajoukkoihin. Partiot ovat sijoittuneet aluksi poliisiasemille ja mellakkajoukot kokoontumispaikkoihin. Pelitilanteeseen voi lisäksi kuulua alueita, joilla jompikumpi tai kumpikaan osapuoli ei voi liikkua, eli esteitä. Poliisiasemat, kokoontumispaikat ja esteet eivät muutu pelin edetessä. Pelitilanne on esitetty kuvassa 1.

Toimijoille on lähtöpaikan lisäksi määritelty muita ominaisuuksia. Lähtöviive kertoo kuinka kauan toimijalla kestää lähteä poliisiasemalta liikkeelle tilanteen käynnistyttyä. Toimijat voivat liikkua korkeintaan niille asetettua maksiminopeutta. Lisäksi poliisipartioilla ja mellakoitsijoilla on energiaressursia, jota kuuluu toimijalle määritetyn kulutuksen mukaan. Resurssikulutus on verrannollinen aikaan, mikä rajoittaa pelitilanteen kesto.

Pelikentällä olevilla esteillä voidaan rajoittaa toimijoiden liikkeitä. Esteet ovat ellipsin muotoisia ja niiden vaikutus määritellään erikseen poliiseille ja mellakkajoukoille. Yksittäinen este siis rajoittaa joko poliisin, mellakoitsijoiden tai molempien liikettä.

Annetusta alkutilanteesta voidaan toteuttaa erilaisia tarkasteluita poliisiasemien ja kokoontumis-

paikkojen sijaintien suhteen, jolloin tarkastelun tulokset riippuvat toimijoiden ominaisuuksista sekä poliisiasemien ja kokoontumispaikkojen sijainneista. Tarkasteluun voidaan lisätä reittipisteitä, joka tarkoittaa toimijan sijaintia tietyllä ajanhetkellä. Tällöin voidaan tarkastella reittipisteistä muodostuvaa liikuttamisstrategiaa ja vertailla tuloksia ilman reittipisteitä saatuihin tuloksiin.

### 3 Tarkastelut

Edellämainituilla tekijöillä määritellään pelitilanne. Tilanteen kulkua voidaan tarkastella erilaisilla simulointitarkasteluilla. Tarkastelujen avulla voidaan esimerkiksi arvioida partioiden nopeuden tai lähtöviivien vaikutusta sekä pohtia poliisiasemien sijainnin merkitystä mellakan torjunnalle.

#### 3.1 Kantama-alueet

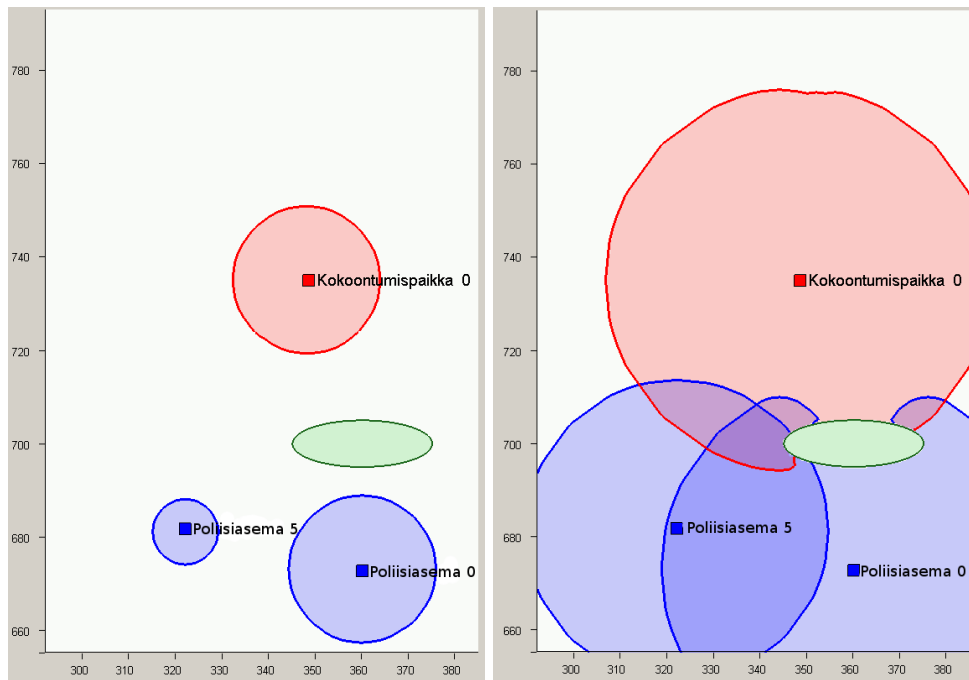
Alue, jossa partio tai mellakkajoukko voi annettulla ajanhetkellä olla, on toimijan kantama-alue. Mikäli esteet eivät vaikuta toimijan liikkeeseen, niin sen mahdolliset paikat ovat ympyrän sisällä. Ympyrän koko riippuu ajanhetkestä ja toimijan suurimmasta mahdollisesta nopeudesta. Kuvassa 2 vasemmalla puolella on esitetty kahden partion ja yhden joukon kantama-alueet. Ellipsin muotoisen esteen kiertäminen muuttaa kuitenkin kantama-alueen muotoa huomattavasti. Kuvassa 2 oikealla puolella kantama-alueet ovat saavuttaneet esteen ja kantama-alueiden muodon muutos näkyy kuvasta.

Kantama-alueita tutkimalla nähdään toimijoiden mahdolliset sijainnit tietyllä ajanhetkellä. Tästä tiedosta saadaan selville esimerkiksi se, että mikä toimija ehtii tietylle alueelle ensimmäisenä tai minkälaiset voimasuhteet tietyllä alueella on jos kaikki toimijat suuntaavat sinne. Kantama-alueiden tutkiminen tarjoaa yhden lähestymistavan mellakan torjuntaan. Tarkastelua voidaan laajentaa laskemalla mellakantorjuntatasa.

#### 3.2 Kohtaus- ja mellakantorjuntatasat

Kantama-alueiden laajetessa ne leikkaavat toisensa. Tämä näkyy kuvassa 2 oikealla puolella. Kahden kantama-alueen leikkauspisteiden kautta kulkee kahden toimijan välinen kohtaustasa. Kohtaustasa on käyrä, joka koostuu yksittäisen poliisipartion ja yksittäisen mellakkajoukon mahdollisista kohtauspisteistä, kun niiden oletetaan liikkuvan maksiminopeuttaan. Tällainen tasa voidaan määritellä jokaiselle partio-joukko-parille erikseen.



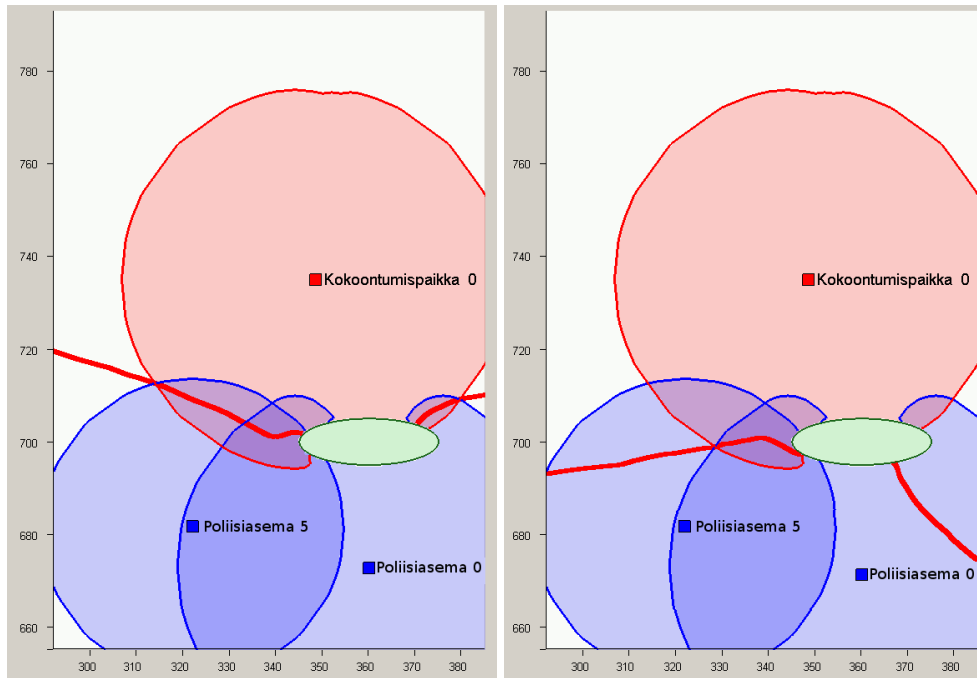


Kuva 2: Sininen väri kuvaa aluetta, jossa alueen keskeltä lähtenyt poliisipartio voi olla annetulla ajanhetkellä. Punainen väri kuvaa vastaavaa aluetta mellakkajoukolle. Vasemmassa kuvassa alueet liittyvät aiempaan ajanhetkeen kuin oikeassa kuvassa.

Kohtaustasoista voidaan yhdistää mellakantorjuntatasoja, jotka kuvaavat kaikkien toimijoiden välisiä mahdollisia kohtaustapaikkoja. Mellakantorjuntataso, joka muodostuu toimijoiden ensimmäisistä mahdollisista kohtaustapaikoista, on esitetty kuvassa 3 vasemmalla puolella. Lisäksi voidaan tarkastella, missä mellakoiijat voivat kohdata ensimmäisen kerran toisen poliisipartion. Tällainen mellakantorjuntataso on esitetty kuvassa 3 oikealla puolella. Tällöin voidaan arvioida tilanteita, jossa mellakkajoukko onnistuu ohittamaan ensimmäisen partion ja toinen partio varmistaa tilanteen tai ensimmäinen partio on suunnannut eri mellakkajoukon torjuntaan.

Mellakantorjuntatasasta nähdään mille alueille poliisit ehtivät ennen mellakoitsijoita. Jos mellakoiijat ehtivät alueelle, johon heitä ei saisi päästä ennen poliisia, voidaan arvioida, kuinka poliisiasemien sijaintoja tai partioiden lähtöviiveitä tulisi muuttaa tilanteen korjaamiseksi.

Mellakantorjuntataso ei ota huomioon miten osapuolet kohtaavat toisensa ja ehtivätkö ne vaikuttaa toisiinsa. Tästä johtuen pidemmälle menevien päätelmien tekeminen mellakantorjuntatasasta jää tulosten tulkitsijalle.



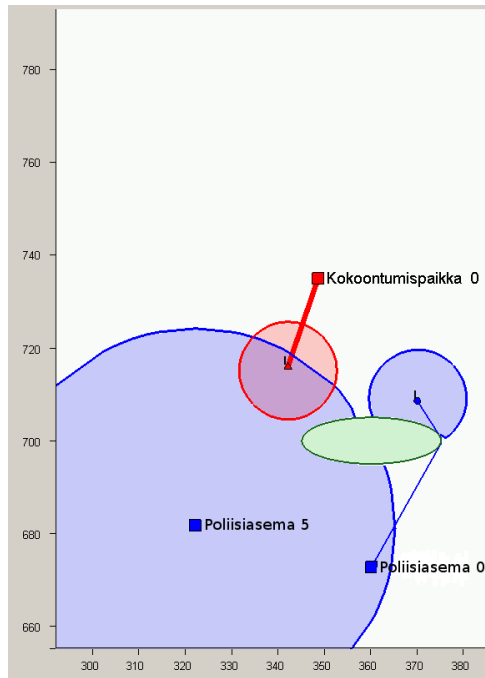
Kuva 3: Vasemman puoleisessa kuvassa mellakkajoukon ja sen ensimmäisenä kohtaavan partion välinen mellakantorjuntatasa. Oikean puoleisessa kuvassa mellakkajoukon ja sen toisena kohtaavan partion välinen mellakantorjuntatasa.

### 3.3 Reittipisteiden huomiointi

Toimijoille voidaan määrittää reittipisteitä. Reittipiste on sijainti, jossa toimija on määrättyllä ajanhetkellä. Kun toimijalle määritetään reittipiste tietyllä ajanhetkellä, niin tämän perusteella määräytyy toimijan reitti ja nopeus ennen kyseistä ajanhetkeä. Ajanhetken jälkeen toimijalle voidaan määrittää reittipisteestä laajeneva kantama-alue. Kuvassa 4 on tilanne, jossa on määritelty kahdelle toimijalle reittipiste.

Reittipisteiden avulla kantama-alue- ja mellakantorjuntatasatarkasteluita voidaan laajentaa. Esimerkiksi määrämällä partioille reittipisteitä voidaan tarkastella reittipisteistä muodostuvan liikuttamisstrategian toimivuutta suhteessa annettuihin tavoitteisiin kuten mellakkajoukkojen pääsyn estäminen tärkeille alueille.

Kun pelitilanteeseen lisätään yksikin reittipiste, niin alkuperäinen mellakantorjuntatasa ei välttämättä pidä enää paikkaansa. Muuttunutta tilannetta vastaava mellakantorjuntatasa voidaan kuitenkin tarvittaessa laskea, jolloin voidaan tehdä mellakantorjuntatasatarkastelu reittipisteiden suhteen.



Kuva 4: Pelitilanne, johon on määritelty kaksi reittipistettä ja laskettu reittipisteiden suhteen kantama-alueet.

## 4 Ratkaisumenetelmät

Seuraavaksi esitellään kaksi laskentatapaa, joilla saadaan määritettyä kantama-alueet, kohtaustasat, mellakantorjuntatasat ja reittipisteet. Ensimmäisessä tavassa laskenta perustuu algebraan ja geometriaan. Toisessa tavassa hyödynnetään verkko-optimointia ja pelitilanne mallinnetaan verkon avulla.

### 4.1 Algebrallinen laskentatapa

Yksi mahdollinen tapa laskea kantama-alueet, kohtaustasat, mellakantorjuntatasat ja reittipisteet on käyttää geometriaa ja algebraa. Menetelmällä on rajoituksensa, joten se ei esimerkiksi sovi pelitilanteisiin, joissa on useita esteitä.

#### 4.1.1 Kantama-alueet

Kantama-alue on ympyrä, jos toimijan liikkeisiin ei vaikuta yksikään este. Lasketaan kantama-alue toimijalle, joka liikkuu nopeudella  $v$  ja on ajanhetkellä  $t = 0$  pisteessä  $(x_C, y_C)$ . Kun  $t > 0$ , niin kantama-alueen

reunapisteiden x- ja y-koordinaatit voidaan esittää muodossa

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \end{bmatrix}, \theta \in [0, 2\pi[,$$

jossa  $s$  on toimijan kulkema matka,  $\theta$  on kantama-alueen reunapisteen ja x-akselin välinen kulma. Matka saadaan laskettua ajanhetkestä  $t$  ja toimijan nopeudesta  $v$  kaavalla  $s = vt$ .

Ellipsin muotoisen esteen kiertäminen muuttaa laskentaa huomattavasti. Aluksi este rajoittaa partion tai mellakkajoukon kantama-alueen laajenemista. Myöhemmillä ajanhetkillä kantama-alue kiertyy esteen taakse, minkä näkee kuvasta 2 oikealla puolella. Lyhin reitti esteen ohi kulkee lähtöpisteen ja ellipsin välistä tangenttia, ellipsin kaarta sekä ellipsin ja kantama-alueen reunapisteen välistä tangenttia pitkin.

Koska lyhin reitti esteen ohi kulkee tangenttia pitkin, pitää laskea ellipsin reunalla olevien tangenttien kordinaatit. Laskennan aluksi tehdään koordinaatistomuunnos, jolla ellipsi muunnetaan yksikköympyräksi. Muunnosta varten tehdään origon siirto ellipsin keskipisteeseen, koordinaatiston kierto ja skaalaus tässä järjestyksessä. Kierto tehdään siten, että esteen ellipsin pääakseli on yhdensuuntainen x-akselin kanssa. Nämä muunnokset ovat

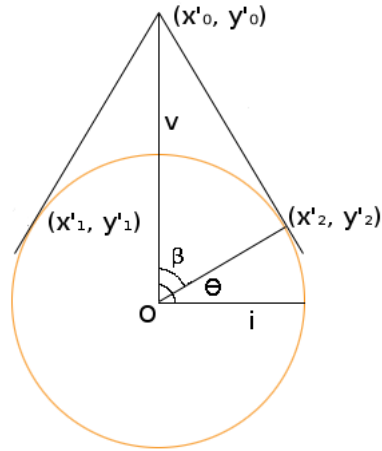
$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} \cos(\Phi) & \sin(\Phi) \\ -\sin(\Phi) & \cos(\Phi) \end{bmatrix}, \lambda_2 = \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{bmatrix},$$

joissa  $a$  ja  $b$  ovat ellipsin puoliakselien pituudet ja  $\Phi$  on ellipsin pääakselin ja x-akselin välinen kulma. Piste  $(x_0, y_0)$ , joka vastaa lähtöpistettä, on muunnetussa koordinaatistossa

$$\begin{bmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{bmatrix} = \lambda_2 \cdot \lambda_1 \cdot \left[ \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - C_{ell} \right],$$

jossa  $C_{ell}$  on ellipsin keskipisteen sijainti. Piste  $(x'_0, y'_0)$  muunnetussa koordinaatistossa on esitetty kuvassa 5. Piste  $(x_0, y_0)$  ja origon O välisen vektorin eli kuvassa olevan vektorin  $v$  ja x-akselin välinen kulma  $\theta$  lasketaan pistetulon avulla. Tässä  $i$  on x-akselin suuntainen yksikkövektori

$$\langle v, i \rangle = \|v\| \cdot \|i\| \cdot \cos \theta = v^T \cdot i \rightarrow \cos \theta = \frac{x'_0}{\|v\|}.$$



Kuva 5: Ellipsin ja pisteen  $(x'_0, y'_0)$  väliset tangentit muunnetussa koordinaatistossa.

Toinen kuvaan 5 merkitty kulma eli  $\beta$  saadaan seuraavasta

$$\beta = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}}\right).$$

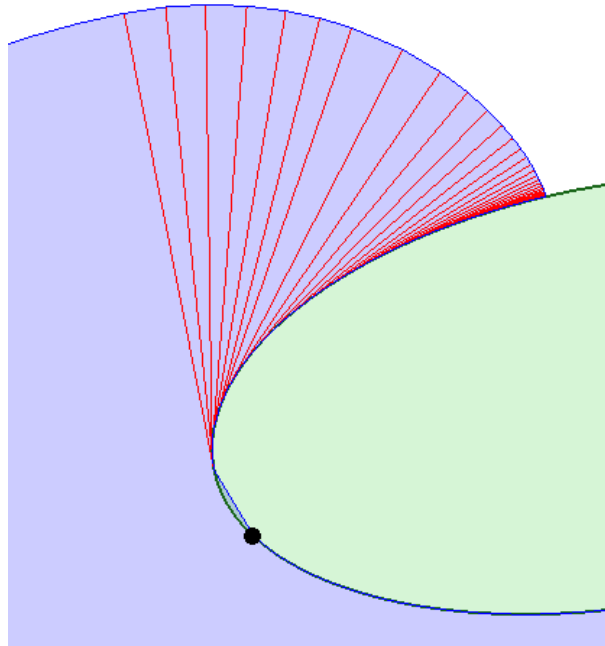
Kun kulmat  $\theta$  ja  $\beta$  ovat tiedossa ja huomioidaan se, että tangenttipisteet ovat muunnetussa koordinaatistossa yksikköympyrän kehällä, niin tangenttipisteiden xy-koordinaatit saadaan polaarimuodosta laskemalla

$$\begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta \pm \beta) \\ \sin(\theta \pm \beta) \end{bmatrix}.$$

Tangenttipisteet saadaan muunnettua alkuperäiseen koordinaatistoon käänteismuunnoksella

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \lambda_1^{-1} \cdot \lambda_2^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \end{bmatrix} + C_{ell}.$$

Kun tangenttipisteet on laskettu, niin tiedetään reitti lähtöpisteestä esteen reunalle. Kuvassa 6 on merkitty mustalla tangenttipiste. Tämän jälkeen lasketaan ellipsin kehältä lisää pisteitä, joita pitkin reitti kulkee. Näistä reunapisteistä lasketaan tangenttisuora, joka on merkitty kuvassa 6 punaisella, ja edetään sitä pitkin niin paljon kuin matkaa  $s$  on kulkematta jolloin saadaan kantama-alueen reunapisteitä.



Kuva 6: Kantama-alueen reunan laskenta esteen takana kulkevan mustan tangenttipisteen, esteen reunan ja punaisen tangenttiviivan kautta.

#### 4.1.2 Kohtaus- ja mellakantorjuntatasat

Kohtaustasa on käyrä, joka koostuu yksittäisen poliisipartion ja mellakkajoukon mahdollisista kohtauspisteistä, kun niiden oletetaan liikkuvan maksiminopeuttaan. Kuvassa 7 on kohtaustasa, joka syntyy kun pisteestä A lähtee poliisipartio nopeudella  $v_1$  ja pisteestä B mellakkajoukko nopeudella  $v_2$ . Laskennan ja esimerkin yksinkertaistamiseksi toimijat on sijoitettu x-akselille ja ne lähtevät liikkeelle ajanhetkellä  $t = 0$ .

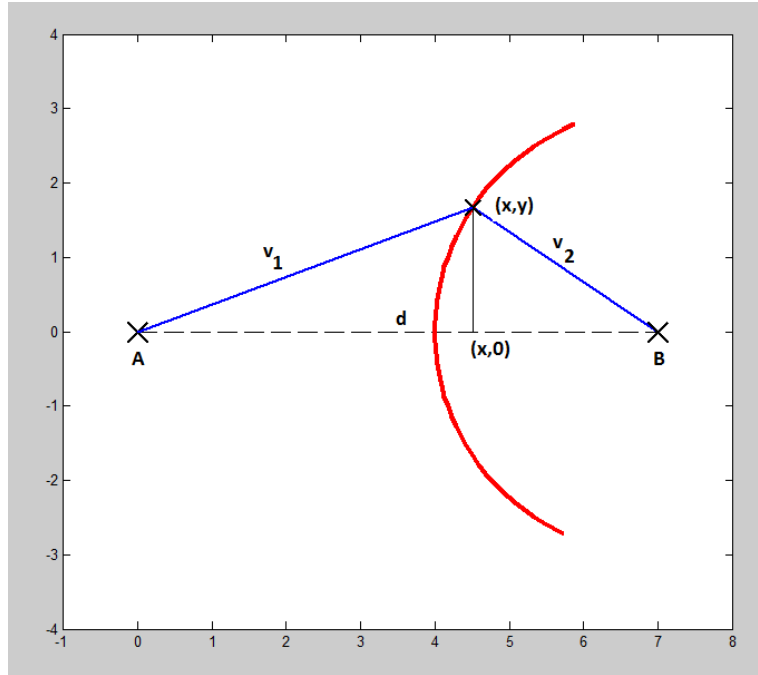
Kohtaustasan piste  $(x, y)$  toteuttaa Pythagoraan lauseen perusteella ehdot

$$x^2 + y^2 = (v_1 t)^2,$$

ja

$$(d - x)^2 + y^2 = (v_2 t)^2,$$

joissa  $t$  on kohtausaika ja  $d$  toimijoiden lähtöpisteiden välinen etäisyys. Kun ehdoista eliminoidaan aika, niin saadaan



Kuva 7: Pisteestä A nopeudella  $v_1$  lähtevän poliisipartion ja pisteestä B nopeudella  $v_2$  lähtevän mellakka-joukon välinen kohtaustasa on esitetty punaisella.

$$\left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)x^2 + \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)y^2 - 2dx + d^2 = 0,$$

joka on toisen asteen käyrän yhtälö. Esittämistä varten yhtälö muutetaan origokeskeiseen standardimuotoon

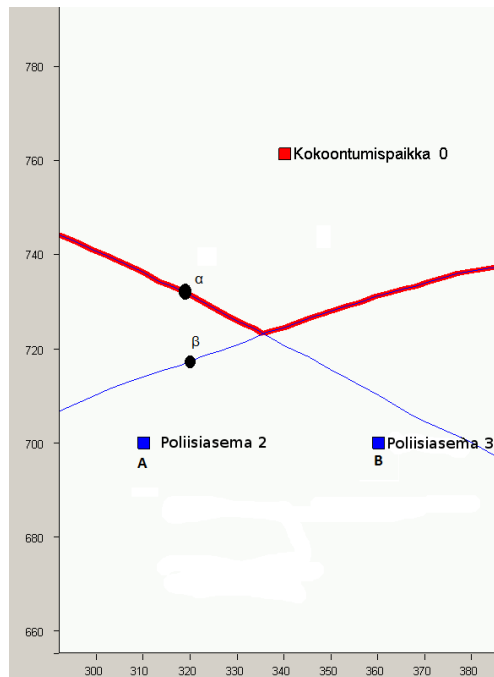
$$\frac{x^2}{a^2} \mp \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Miinusmerkkiä käytetään kun käyrä on hyperbeli ja plusmerkkiä ellipsin tapauksessa. Standardimuodon avulla saadaan laskettua polttopisteen etäisyys  $\sqrt{a^2 \pm b^2}$  origosta ja käyrän pisteet polaarimuodossa

$$r = \frac{b^2}{a - \sqrt{a^2 \pm b^2} \cos \theta}, \theta \in [0, 2\pi[,$$

jossa  $r$  on käyrän pisteen etäisyys polttopisteestä ja  $\theta$  on pisteen ja x-akselin välinen kulma.

Kohtaustasoista saadaan yhdistettyä mellakantorjuntatasa, joka kuvaa kaikkien toimijoiden välisiä



Kuva 8: Sinisellä merkityistä kohtaustasoista saadaan yhdistettyä punaisella merkitty mellakantorjuntatasa.

mahdollisia kohtaustasopaikkoja. Kuvassa 8 on esitetty kahden poliisipartion ja yhden mellakkajoukon väliset kohtaustasot ja mellakantorjuntatasa. Kuvassa on valittu kohtaustasoista kaksi pistettä, joissa lasketaan jokaiselle toimijalle saapumisaika  $t$ . Koska mellakkajoukkoja on vain yksi niin se saapuu jokaiseen pisteeseen ensimmäisenä mellakkajoukkona. Piste  $\alpha$  kuuluu mellakkajoukon ja poliisipartion A väliseen kohtaustasaan. Poliisipartio B saapuu pisteeseen myöhemmin kuin partio A, jonka perusteella piste kuuluu mellakantorjuntatasaan. Piste  $\beta$  kuuluu mellakkajoukon ja poliisipartion B väliseen kohtaustasaan. Poliisipartio A saapuu pisteeseen aiemmin kuin partio B, jonka kohtaustasaan piste kuuluu. Tämän perusteella piste ei kuulu mellakantorjuntatasaan. Valitsemalla kohtaustasoista riittävä määrä pisteitä saadaan niistä yhdistettyä mellakantorjuntatasa. Esteiden huomioon ottaminen ei onnistu algebrallisella laskentatavalla, mikä rajoittaa sen soveltamista.

#### 4.1.3 Reittipisteiden huomiointi

Jos lähtö- ja reittipisteen välillä ei ole estettä, niin reitti kulkee suoraan pisteiden välissä. Jos välissä on yksi este, niin lyhin reitti kulkee ensin lähtöpisteen ja esteen välistä tangenttia pitkin. Siitä reitti kulkee esteen reunaan pitkin kunnes päästään esteen ja reittipisteen väliselle tangentille, jota pitkin kuljetaan loppumatka kuten nähdään kuvassa 4. Tangenttipisteet saadaan laskettua kappaleessa 4.1.1 esitetyllä



tavalla.

Laskemalla ellipsin reunan pituus numeerisesti päästään haluttuun tarkkuuteen, kun otetaan reunalta riittävästi pisteitä. Laskenta tehdään siten, että ellipsin kehältä valitaan pisteitä ja vierekkäisten kehän pisteiden etäisyydet summataan, joilloin saadaan likiarvo kuljetulle matkalle esteen reunalla. Tarkka laskeminen on laskennallisesti vaativa toimenpide, koska kaaren pituuden kaava sisältää toisen lajin elliptisen integraalin.

## 4.2 Verkko-optimointiin perustuva laskentatapa

Työssä tarkasteltavan pelitilanteen analysointiin voidaan hyödyntää verkko-optimointia. Verkko-optimointiongelma on erikoistapaus lineaarisen ohjelmoinnin tehtävästä [Bertsimas and Tsitsiklis, 1997]. Tehtävä mallinnetaan verkkona, joka koostuu solmuista ja solmuja yhdistävistä kaarista. Kaareen liittyy kustannus, joka voi merkitä esimerkiksi matkaa, rahaa tai aikaa, joka kuluu kun siirrytään solmusta toiseen. Verkko-optimointitehtävän ratkaisuna voi esimerkiksi olla solmujen joukko tai kaarista muodostuva polku.

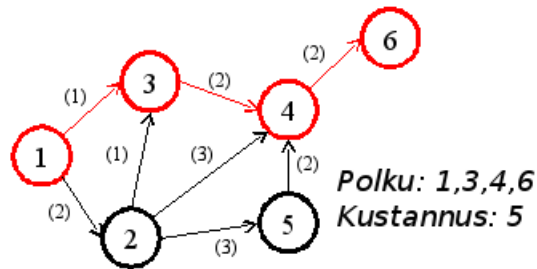
Verkko-optimoinnilla kantama-alueen, mellakantorjuntataseen ja reittipisteeseen liittyvän reitin laskenta tehdään ratkaisemalla lyhimmän polun verkko-optimointitehtävä. Verkko-optimoinnissa saadaan huomioitua kaikki pelitilanteeseen kuuluvat esteet, mikä on ongelmallista algebrallisessa lähestymistavassa.

Lyhimmän polun ongelmassa on tavoitteena löytää lyhin eli kokonaiskustannukseltaan vähäisin polku lähtösolmusta kohdesolmuun. Kuvassa 9 on verkko, joka koostuu kuudesta solmusta ja kahdeksasta kaaresta. Kuvassa on esitetty ratkaisu ongelmalle, jossa etsitään lyhin eli kokonaiskustannuksen minimoiva polku lähtösolmusta 1 kohdesolmuun 6. Kahden solmun välisen polun lisäksi voidaan etsiä kaikkien solmujen väliset lyhimmät polut, lyhimmät polut lähtösolmusta muihin solmuihin tai lyhimmät polut kaikista solmuista kohdesolmuun. Kaikille mainituille lyhimmän polun ongelman tyypeille on olemassa tehokkaita ratkaisumenetelmiä.

Lyhimmän polun laskemiseen lähtösolmusta kaikkiin muihin solmuihin voidaan käyttää Dijkstran algoritmia [Dasgupta et al., 2006]. Algoritmi ratkaisee lyhimmät polut ja niitä vastaavat optimikustannukset.

### 4.2.1 Kantama-alueet

Kantama-alueiden laskentaa varten pitää määrittää laskennassa käytettävä verkko. Verkon rakenne on esitetty kuvassa 10. Verkon solmut muodostavat neliöhilan ja lähellä toisiaan olevien solmujen välillä on kaari. Kuvan verkon jokaisesta solmusta lähtee kaari 16 muuhun solmuun. Kaarien määrää muuttamalla



Kuva 9: Punaisella värillä on esitetty ratkaisu lyhimmän polun ongelmaan, jossa halutaan löytää lyhin polku lähtösolmusta 1 kohdesolmuun 6. Optimipolun kustannus on 5. Kaarien kustannukset on merkitty suluissa kaaren viereen.

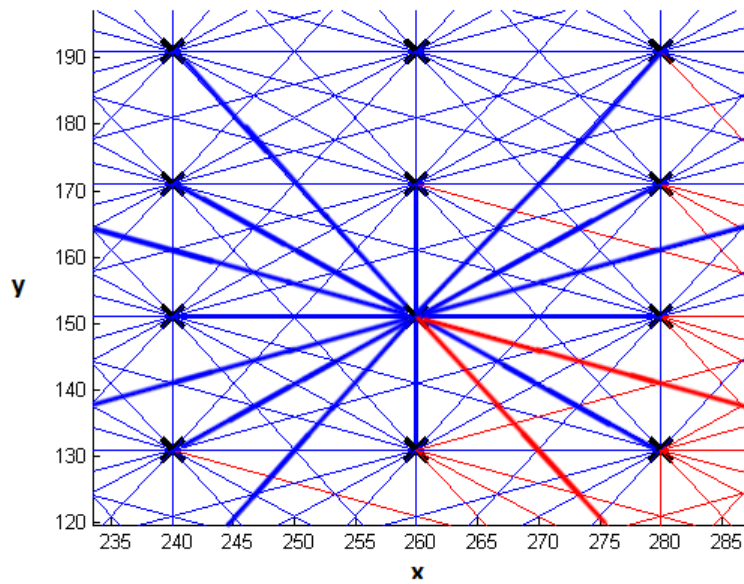
vaikutetaan siihen, kuinka tarkkaa laskenta on. Esteiden päällä kaareen liittyvä kustannus on ääretön ja muualla solmujen välinen etäisyys. Kuvassa äärettömät kustannukset on esitetty punaisella ja etäisyyttä vastaavat kustannukset sinisellä.

Kantama-alueiden laskenta alkaa ratkaisemalla toimijoille lyhimmän polun ongelma eli kustannukset niiden lähtösolmusta kaikkiin muihin solmuihin. Etäisyydet saadaan muutettua toimijoiden matka-ajaksi, kun tiedetään toimijan suurin mahdollinen nopeus. Kuvassa 11 on verkko, jonka keskeltä lähtevälle toimijalle on ratkaistu ajat kaikkiin solmuihin. Kuvassa punaisella on esitetty kantama-alueen reuna ajanhetkellä  $t = 2$ .

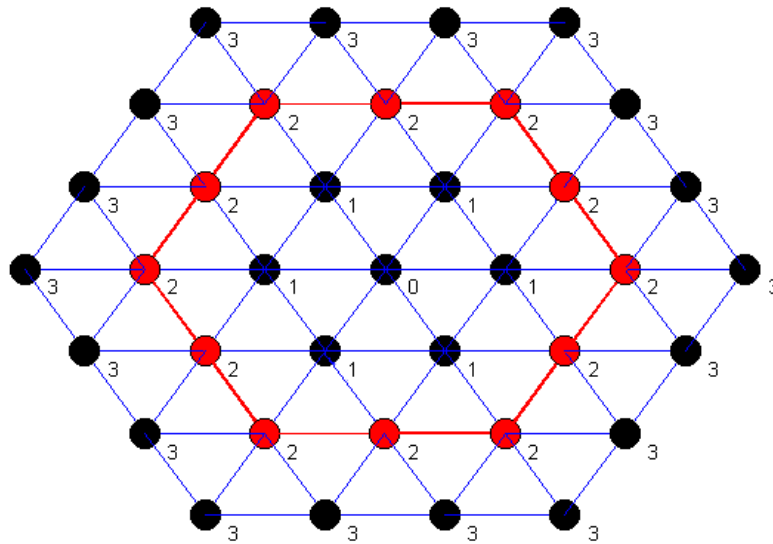
#### 4.2.2 Kohtaus- ja mellakantorjuntatasat

Poliisipartion ja mellakkajoukon välinen kohtaustasa saadaan, kun niiden lyhimmän polun ongelman ratkaisut yhdistetään. Kuvassa 12 vasemmalla puolella on verkko, jossa solmussa A on poliisipartio asemalla ja solmussa B mellakkajoukko kohtaamispaikassa. Kaikkien kaarien kustannukset ovat yhtäsuuret ja toimijat lähtevät liikkeelle ajanhetkellä  $t = 0$  samalla nopeudella. Kuvaan on merkitty lyhimmän polun ongelman ratkaisua vastaavat kustannukset eli ajat. Kuvan 12 oikealla puolella on laskettu näiden aikojen erotukset. Kuvassa punaisella merkitty kohtaustasa on aikojen erotuksille korkeudelle nolla tehty korkeuskäyrä.

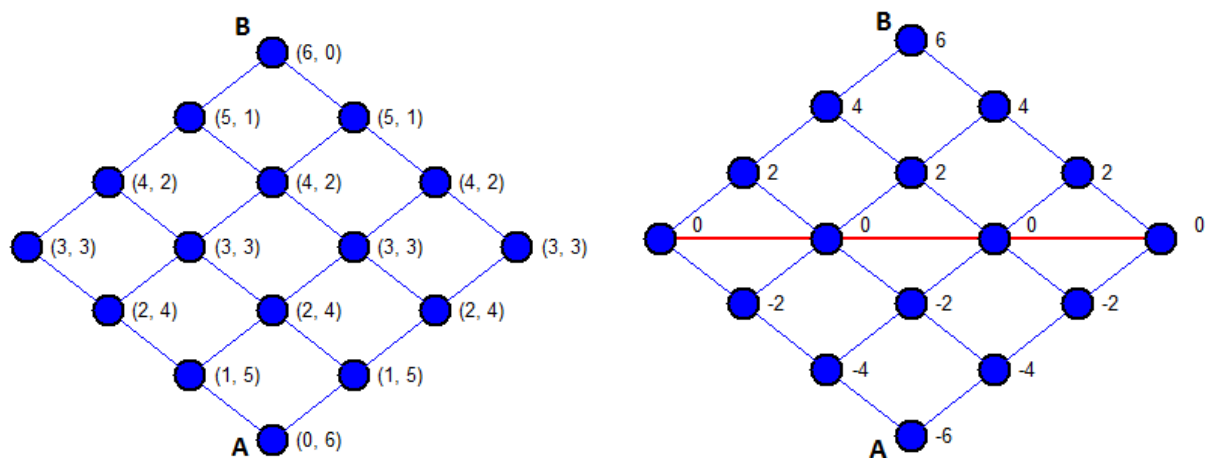
Mellakantorjuntatasa saadaan, kun yhdistetään jokaisen toimijan lyhimmän polun ongelman ratkaisu. Jokaisessa solmussa valitaan poliisipartioiden ja mellakkajoukkojen nopein aika ja lasketaan niiden erotus. Mellakantorjuntatasa on korkeudelle nolla piirretty korkeuskäyrä.



Kuva 10: Verkon rakenne, mustat rastit ovat solmuja, punaiset viivat ovat kaaria, joiden kustannus on ääretön ja siniset viivat ovat kaaria, joiden kustannus on solmujen välinen etäisyys.



Kuva 11: Kantama-alueen reuna ajanhetkellä  $t = 2$  on punaisella piirretty tasa-arvokäyrä.



Kuva 12: Kohtaustasan laskeminen verkossa. Vasemmanpuoleisessa kuvassa on esitetty ratkaisu toimijoiden lyhimmän polun ongelmaan ja oikeanpuoleisessa kuvassa on ratkaisujen erotukset sekä punaisella piirretty kohtaustasa.

### 4.2.3 Reittipisteiden huomiointi

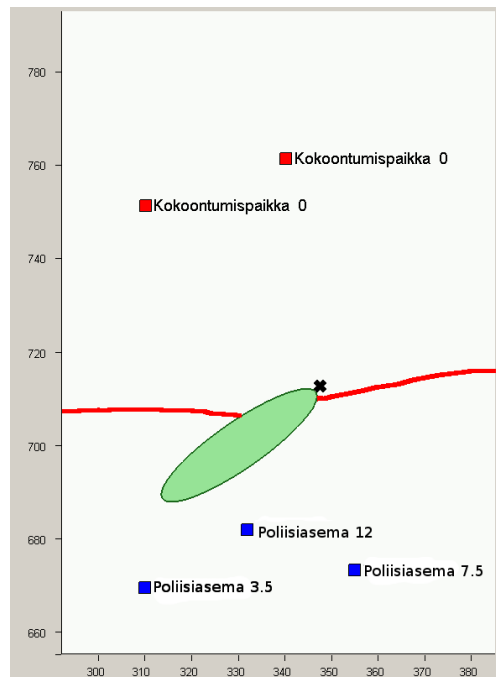
Kun toimijalle lisätään reittipiste pelitilanteeseen, niin reitti ja reitin pituus lähtöpisteestä reittipisteeseen on valmiina toimijan lähtöpisteessä lasketun lyhimmän polun ongelman ratkaisussa. Reittipisteessä ratkaistaan uusi lyhimmän polun ongelma. Tämän ratkaisun avulla saadaan laskettua toimijalle reittipisteestä laajeneva kantama-alue. Sitä voidaan myös käyttää, kun halutaan laskea mellakantorjuntatasa reittipisteiden suhteen.

## 5 Esimerkkejä

### 5.1 Mellakantorjuntatasa ja kantama-alueet

Kuvassa 13 on esitetty pelitilanne, jossa kaksi mellakkajoukkoa lähtee ajanhetkellä  $t = 0$  liikkeelle. Suojeltava kohde, johon mellakoitsijoiden pääsy halutaan estää, on merkitty rastilla. Poliisilla on kolme partiota ja niiden lähtöviiveet ovat 3,5, 7,5 ja 12,0 minuuttia. Kuvan 13 mellakantorjuntatasasta voidaan päätellä, että mellakoitsijoiden pääsy kohteeseen ei voida estää.

Tarkastelua voidaan jatkaa tutkimalla kantama-alueita suojeltavan kohteen läheisyydessä. Kuvassa 14 on esitetty kantama-alueet, kun ensimmäinen poliisipartio on saapunut kohteeseen. Kuvan kantama-alueista voidaan päätellä, että ensimmäisenä saapunut mellakkajoukko on ehtinyt olla jonkin aikaa ko-



Kuva 13: Torjuntasa on esitetty punaisella.

hteessa ja ensimmäisen poliisipartion kanssa lähes samaan aikaan saapuu toinen mellakkajoukko.

## 5.2 Lähtötietojen muuttuminen

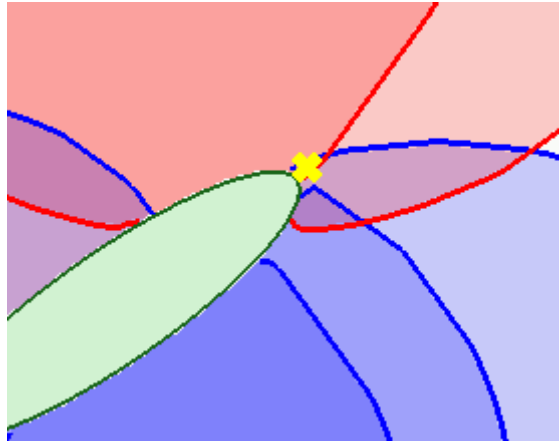
Tässä esimerkissä tutkitaan, kuinka edellisen esimerkin tilannetta voidaan kehittää, jotta suojeltava kohde saataisiin suojattua paremmin. Kriteereinä paremmuudelle voidaan käyttää mellakantorjuntatason sijaintia suhteessa kohteeseen sekä kohteessa olevaa eri puolen toimijoiden suhdetta.

### 5.2.1 Poliisipartioiden lähtöviiveiden lyhentämisen vaikutus

Yksi mahdollisuus parantaa kohteen suojelua on saada poliisipartiot liikkeelle aikaisemmin. Mitä nopeammin partiot ovat liikkeellä, sitä aiemmin ne ehtivät suojeltavaan kohteeseen.

Kuvan 15a tilanteessa partioiden lähtöviiveet on lyhennetty 3,5 minuuttiin. Mellakantorjuntatasa on siirtynyt mellakoitsijoiden ja suojeltavan kohteen väliin. Tästä voidaan päätellä, että kohde saadaan mahdollisesti suojattua mellakoitsijoilta.

Kuvassa 16a on esitetty kantama-alueet hetkellä, jolloin ensimmäinen mellakkajoukko ehtii suojeltavaan kohteeseen. Kuvasta nähdään, että kyseisenä ajanhetkenä yksi poliisipartio on jo ehtinyt alueelle ja toinen on saapumassa sille. Poliiseilla on alueella siis joko ylivoima tai alueella on yhtä paljon partioita ja mel-



Kuva 14: Kantama-alueista voidaan päätellä, millainen voimasuhde keltaisella merkityllä suojeltavalla alueella on.

lakkajoukkoja, mikä on selkeä parannus alkuperäiseen tilanteeseen.

### 5.2.2 Poliisipartioiden nopeuden lisäämisen vaikutus

Toinen mahdollisuus parantaa kohteen suojelua on lisätä poliisipartioiden nopeutta. Mitä nopeammin partiot ovat liikkuvat, sitä aiemmin ne ehtivät suojeltavaan kohteeseen.

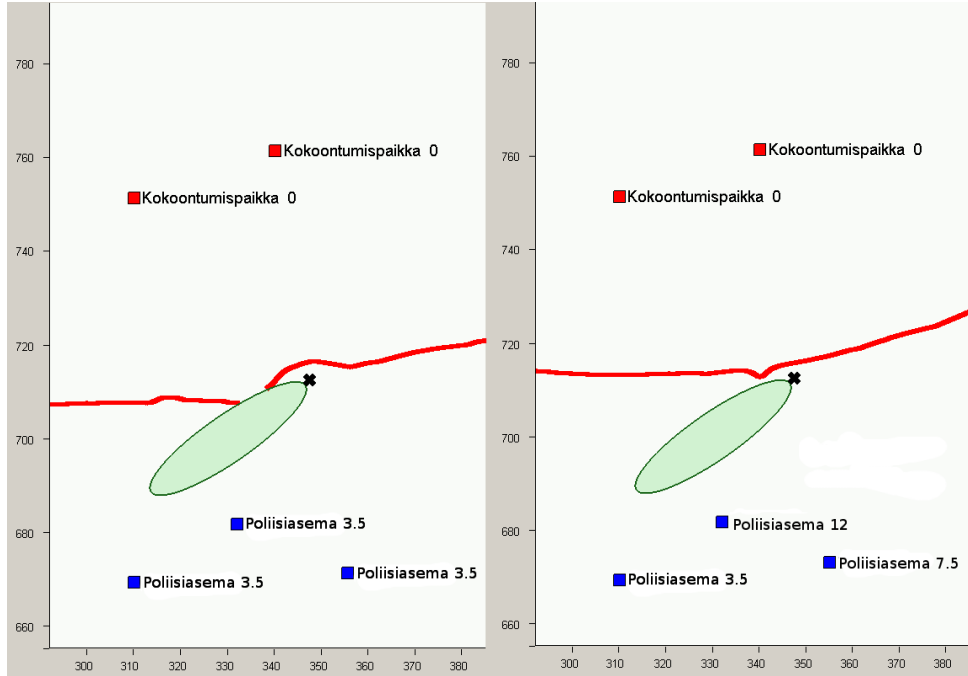
Kuvan 15 oikean puoleisessa tilanteessa partioiden nopeutta on kasvatettu 40 prosentilla. Mellakan-torjuntatasa on siirtynyt mellakoitsijoiden ja suojeltavan kohteen väliin. Lisäksi tasa on lähempänä mellakkajoukkoja verrattuna tilanteeseen, jossa oli lyhennetty lähtöaikoja. Tästä voidaan päätellä, että kohde saadaan mahdollisesti suojattua mellakoitsijoilta.

Kuvassa 16 oikealla puolella on esitetty kantama-alueet hetkellä, jolloin ensimmäinen mellakkajoukko ehtii suojeltavaan kohteeseen. Kuvasta nähdään, että kyseisenä ajanhetkenä kaksi poliisipartiota on jo ehtinyt alueelle ja kolmas on saapumassa sille. Poliiseilla on alueella ylivoima jatkuvasti siitä hetkestä lähtien, kun ensimmäinen partio saapuu paikalle.

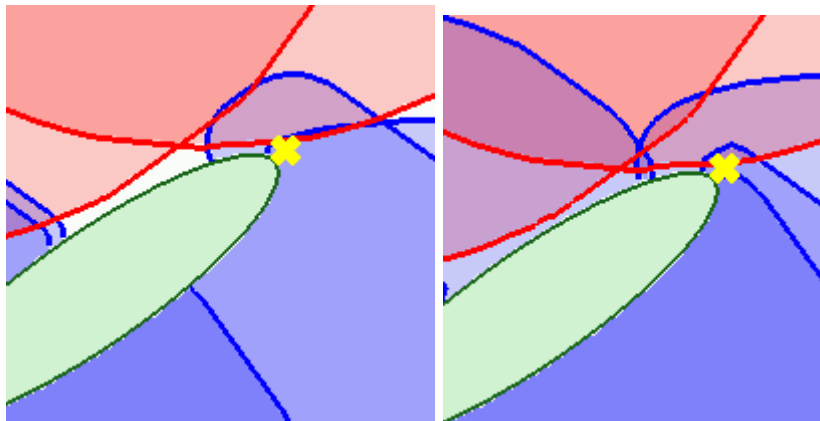
## 5.3 Kantama-alueet reittipisteistä lähtien

Tässä esimerkissä tarkastellaan, kuinka reittipisteiden avulla voidaan luoda haluttu tilanne eri lähtötiedoilla ja kuinka luotua tilannetta voidaan tarkastella kantama-alueiden avulla. Poliisien tavoitteena on pysäyttää mellakkajoukon eteneminen, minkä onnistumisen mahdollisuutta arvioidaan kantama-alueiden perusteella. Muuttuvana lähtötietona on mellakkajoukon nopeus.

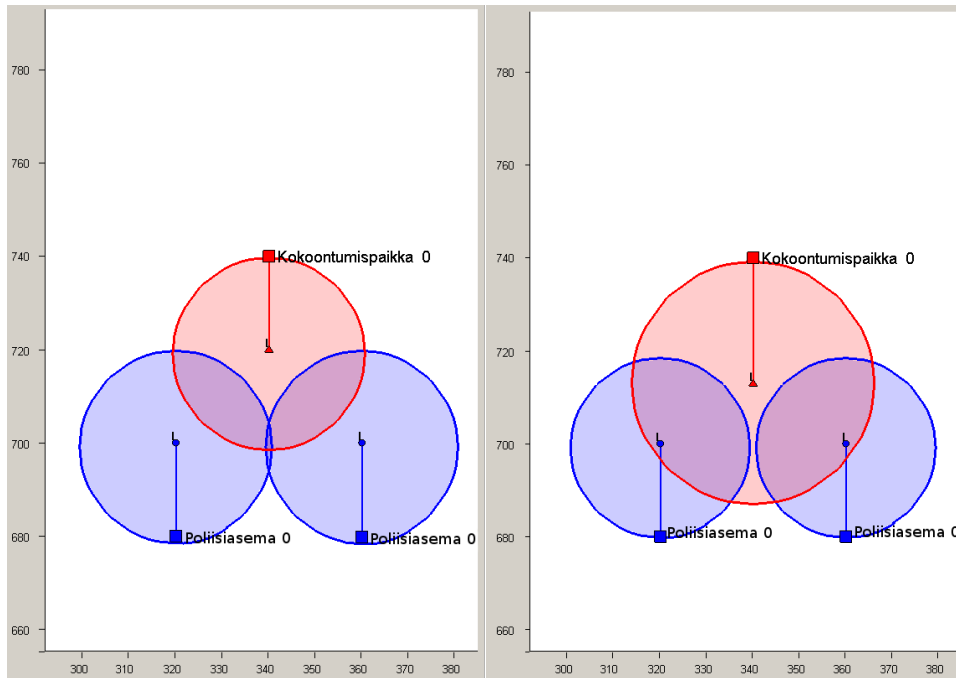
Pelitalanteessa kaksi poliisipartiota ja yksi mellakkajoukko lähtevät yhtä aikaa liikkeelle. Poliisien



Kuva 15: Vasemmanpuoleisessa kuvassa on mellakantorjuntatasa lähtöviiveiden lyhentämisen jälkeen ja oikeanpuoleisessa nopeuden kasvattamisen jälkeen.



Kuva 16: Vasemmanpuoleisessa kuvassa on kantama-alueet suojeltavan kohteen lähellä lähtöviiveiden lyhentämisen jälkeen ja oikeanpuoleisessa nopeuden kasvattamisen jälkeen.



Kuva 17: Reittipisteistä laajenevista kantama-alueista voidaan päätellä että vasemman puoleisessa tilanteessa poliiseilla on mahdollisuus pysäyttää mellakkajoukon eteneminen etelään. Oikean puoleisessa kuvassa mellakkajoukko pääsee poliisien ohi niin halutessaan.

halutaan lähtevän valmiiksi määritellyllä tavalla liikkeelle ja tekevän sen jälkeen suunnan muutoksen mellakoitsijoiden liikkeiden perusteella. Tarkastelu tehdään niin, että ensin mellakkajoukko kulkee yhtä nopeasti kuin poliisit ja toisessa tarkastelussa mellakkajoukon nopeus on 40% poliisien nopeutta suurempi.

Kuvissa 17 vasemmalla ja oikealla puolella poliiseille on määritetty reittipisteet, jotka vastaavat haluttua liikkeellelähtötapaa. Mellakkajoukko kulkee etelään maksiminopeuttaan ja sille on määritetty tämän mukainen reittipiste. Mellakkajoukon nopeuden muutoksen havaitsee siitä, että kuvan 17 oikealla puolella se on etelämpänä kuin kuvan 17 vasemmalla puolella.

Reittipisteistä laajenevista kantama-alueista voidaan päätellä, että kuvan 17 vasemmanpuoleisessa tilanteessa poliiseilla on mahdollisuus pysäyttää mellakkajoukko, jos se jatkaa matkaansa etelään. Kuvan 17 oikeanpuoleisessa tilanteessa mellakkajoukko pääsee poliisien ohi.

## 5.4 Laskentatapojen vertailu

Algebrallinen ja verkko-optimointiin perustuva laskentatapa eroavat toisistaan. Seuraavaksi arvioidaan laskentatapojen nopeuseroja ja laskenta-ajan muutosta kun pelitilanteeseen lisätään toimijoita. Verkko-optimoinnissa verkon koolla voidaan olettaa olevan vaikutusta laskenta-aikaan, joten myös sitä arvioidaan.



Toimijoiden määrä	2	4	10	20
Aika (algebra) (s)	0,02	0,13	13,55	214,35
Aika (verkko-optimointi) (s)	12,88	13,16	14,76	17,46

Taulukko 1: Toimijoiden määrän vaikutus laskenta-aikaan.

Verkon koko solmuina	24 x 35	36 x 52	48 x 70	60 x 87
Solmujen määrä	840	1872	3360	5220
Laskenta-aika (s)	3,41	7,79	14,76	24,79

Taulukko 2: Verkon koon vaikutus laskenta-aikaan.

Vertailukohtana käytetään mellakantorjuntatasan laskemiseen kuluvaan aikaan, kun pelikentällä ei ole esteitä.

Jokainen mellakantorjuntatasan laskenta suoritetaan viisi kertaa ja aikana käytetään laskenta-aikojen keskiarvoa. Molempia laskentatapoja testataan kun toimijoita on 2, 4, 10 ja 20 kappaletta. Verkon koon vaikutusta testataan neljällä eri kokoisella verkolla kun toimijoiden määrä pysyy samana.

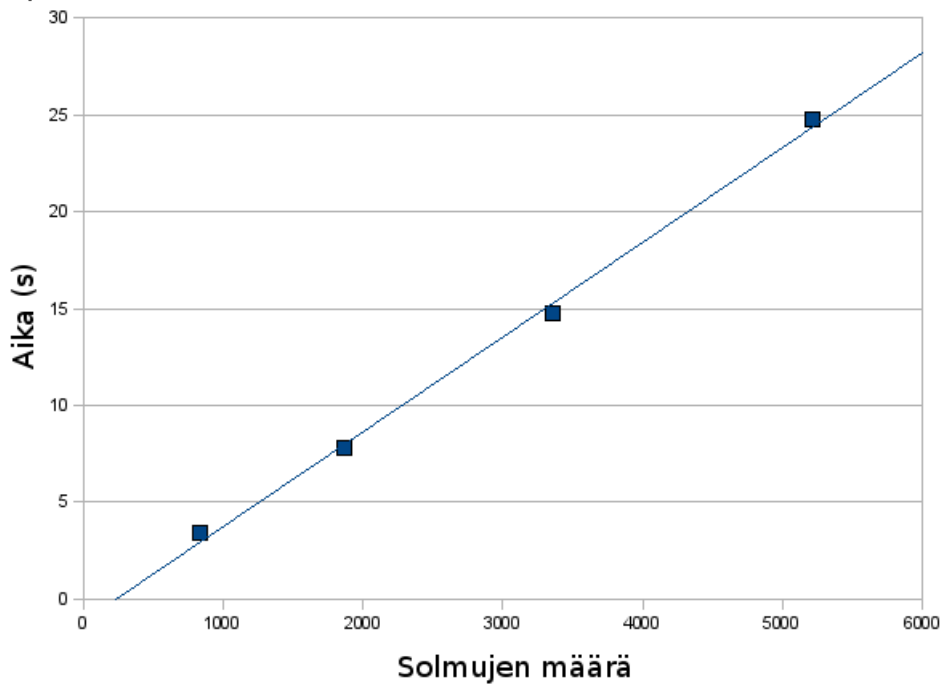
Taulukossa 1 on esitetty tulokset toimijoiden määrän vaikutuksesta mellakantorjuntatasan laskentaan kuluvaan aikaan. Algebrallinen laskentatapa on nopea, kun toimijoita on vähän. Toimijoiden määrän kasvaessa laskenta-aika kasvaa voimakkaasti. Verkko-optimoinnilla laskettaessa suurin osa ajasta kuluu verkon luomiseen ja toimijoiden lisääminen vaikuttaa aikaan vähemmän kuin algebrallisessa tavassa. Testeissä verkon koko oli 48 x 70 solmua.

Taulukossa 2 on esitetty laskenta-ajat mellakantorjuntatasalle eri kokoisilla verkoilla. Kaikissa tapauksissa toimijoiden määrä on ollut kymmenen. Laskenta-ajoista ja verkon solmujen määrästä tehty kuvaaja on esitetty kuvassa 18. Kuvaajassa on regressiosuora  $t(x) = 0,00489 \cdot x - 1,12$ . Tekijöiden välinen korrelaatio on 0,9987, josta voidaan päätellä että mellakantorjuntatasan laskenta-aika  $t$  ja verkon solmujen lukumäärä  $x$  ovat voimakkaasti lineaarisesti riippuvia.

## 6 Yhteenveto

Tässä työssä kuvattiin mellakajoukkojen ja poliisien välinen tilanne pelimallina. Työssä esitettiin mallilla toteutettavia tarkasteluita, joilla tilannetta voidaan tutkia. Lisäksi kehitettiin kaksi erilaista, algebraan ja verkko-optimointiin perustuva, ratkaisumenetelmää tarkasteluiden toteuttamiseksi.

Tarkastelujen avulla kyettiin selvittämään, onko asetetut tavoitteet, kuten esimerkiksi mellakoitsijoiden pääsyn estäminen tietyille alueelle, mahdollista toteuttaa. Mikäli tavoitteet toteutuivat tämän työn tarkastelujen perusteella, niin niiden täyttyminen saattaa olla mahdollista myös todellisuudessa.



Kuva 18: Mellakantorjuntataseen laskenta-aika verkon solmujen lukumäärän funktiona

Pelitalanteeseen kuuluu ellipsin muotoisia esteitä. Ellipsi voi olla pyöreä tai pitkulainen, joten yhdellä muodolla voidaan luoda monenlaisia esteitä. Pelitalanteen muuttaminen vaati aina uuden laskennan, jotta nähdään muutoksen vaikutukset. Esimerkiksi pienimmän muutoksen, joka täytti halutut ehdot, arvioiminen on haasteellista.

Työssä esitettyä mallia voidaan kehittää lisäämällä eri muotoisia esteitä, kun laskentaan käytetään verkko-optimoinnilla toteutettua laskentatapaa. Laskentaperiaatteisiin ei tarvitse tehdä muutoksia, koska esteet tarvitsee huomioida vain verkkoa luotaessa. Esimerkiksi suorakaiteen muotoisilla esteillä voitaisiin luoda kaupungin katuja ja kortteleita kuvaava pelitalanne.

Työssä esiteltiin, miten laskenta toteutetaan valmiiksi määritellystä pelitalanteesta. Pelitalannetta voitaisiin tarkastella myös käänteisesti. Tällöin asetettaisiin tavoitteet eli määritettäisiin alueet, mihin mellakoitsijoita ei saa päästä. Tämän jälkeen laskettaisiin poliisiasemien sijainnit tai poliisipartioiden suurimmat lähtöviiveet siten että tavoitteet täyttyvät.

## Viitteet

- S. Baker, D. Morton, R. Rosenthal, and L. Williams. Optimizing military airlift. *Operation Research*, 50(4):582–602, 2002.
- D. Bertsimas and J.N. Tsitsiklis. *Introduction to Linear Optimization*. Athena Scientific, 1997.
- S. Dasgupta, C.H. Papadimitriou, and U.V. Vazirani. *Algorithms*. McGraw-Hill, 2006.
- The Guardian. Birmingham riots: intense anger after deaths of three young men, 2011. <http://www.guardian.co.uk/uk/2011/aug/10/birmingham-riots-anger-deaths>, viitattu 17.9.2012.
- Helsingin Sanomat. Jalkapallohuligaanit ottivat rajusti yhteen varsovassa, 2012. <http://www.hs.fi/digilehti/urheilu/Jalkapallohuligaanit+ottivat+rajusti+yhteen+Varsovassa/a1339541251046>, viitattu 17.9.2012.
- J. Kokkala. Optimal allocation of defensive fighter force. Master’s thesis, Aalto University, School of Science, 2010.
- S. Matlin. A review of the literature on the missile-allocation problem. *Operations Research*, 18(2):334–373, 1970.
- J. Schubert and R. Suzic. Decision support for crowd control: Using genetic algorithms with simulation to learn control strategies. In *Military Communications Conference (MILCOM)*, 2007.
- K. Wallenius and R. Suzic. Effects based decision support for riot control: Employing influence diagrams and embedded simulation. In *Military Communications Conference (MILCOM)*, 2005.
- YLE. Britannian mellakoiden hinta yli 200 miljoonaa, 2011. <http://yle.fi/uutiset/5405285>, viitattu 17.9.2012.