Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Teknillisen fysiikan ja matematiikan tutkinto-ohjelma

Vaihtoehtoisten reittien tuottaminen tiheällä liikenneverkolla ja stokastinen valinta niiden välillä

kandidaatintyö
12.11.2013

Teemu Känsäkangas

AALTO-YLIOPISTO PERUSTIETEIDEN KORKEAKOULU PL 11000, 00076 Aalto http://www.aalto.fi	KANDIDAATINTYÖN TIIVISTELMÄ

Tekijä: Teemu Känsäkangas

Työn nimi: Vaihtoehtoisten reittien tuottaminen tiheällä liikenneverkolla ja stokastinen valinta niiden välillä

Tutkinto-ohjelma: Teknillisen fysiikan ja matematiikan tutkinto-ohjelma

Pääaine: Systeemitieteet	Pääaineen koodi: F3010

Vastuuopettaja(t): Prof. Harri Ehtamo

Ohjaaja(t): DI Osmo Salomaa, Strafica Oy

Tiivistelmä: Työssä tehdään kirjallisuuskatsaus erilaisiin menetelmiin generoida reittivaihtoehtoja tiheällä liikenneverkolla ja näiden stokastisiin valintamalleihin.

Reittigeneraatioalgoritmit perustuvat erilaisiin tapoihin laskea lyhimmän polun algoritmilla reitti lähtöpisteestä määränpäähän. Reitin voi generoida

- laskemalla lyhimmän polun jonkun linkin tai solmun kautta
- sakottamalla tai eliminoimalla linkkejä vanhalta lyhimmältä reitiltä ja laskemalla lyhimmän polun uudestaan
- määrittämällä verkon linkkien matka-ajat jostain jakaumasta ja laskemalla lyhimmän polun päivitetyllä verkolla

Reitinvalintamalleissa lasketaan deterministisen valinnan sijaan valinnan todennäköisyys, kun reitivalinnan hyötyfunktiossa on mukana stokastinen termi. Multinomiaalisessa logitmallissa (engl. multinomial logit) stokastisesta termistä tehdään jakaumaoletus ja valintatodennäköisyys lasketaan reittivaihtoehtojen determinististen hyötyjen eksponenttifunktioista.

Yhtenevyyslogitmalli (engl. C-logit), reittien kokoon perustuva logitmalli (engl. path size logit) ja reittien kokoon perustuva korjaava logitmalli (engl. path size correction logit) perustuvat multinomiaaliseen logitmalliin, mutta niissä valintamalliin tuodaan termi, joka ottaa huomioon sen onko reitillä päällekkäisiä osuuksia muiden reittien kanssa. Jos päällekkäisyyttä on, reitinvalintatodennäköisyyttä pienennetään.

Multinomiaaliseen logitmalliin perustuvassa implisiittessä saatavuusmallissa (engl. implicit availability/perception) reitinvalintamallia laajennetaan sumealla muuttujalla, joka kuvaa sitä kuinka hyvin reittivaihtoehto on saavutettavissa. Jos reitti on täysin saavutettava, malli palautuu multinomiaaliseen logitmalliin. Jos ei, valintatodennäköisyys menee nollaan.

Reititysportfolion optimointi (engl. route portfolio theory) perustuu siihen, että reitinvalinta kannattaa tehdä sopivasta portfoliosta reittejä. Portfolio määräytyy siitä kuinka vahvasti tielläliikkuja preferoi reitin matka-aikaa, kuinka paljon toisaalta tämän varianssia.

Päivämäärä: 12.11.2013	Kieli: suomi	Sivumäärä: 17

Avainsanat: Liikenneverkko, reitinvalinta, reittigeneraatio, algoritmi, kirjallisuuskatsaus

Sisällysluettelo

1 Johdanto

Liikennesuunnittelussa ja -mallinnuksessa pyritään muodostamaan kokonaiskuva liikenteestä tieverkolla. Yksi tapa mallintaa tätä on sijoittaa verkolle haluttu määrä simuloitua liikennettä ja tutkia sen jälkeen ruuhkautumista ja muita ilmiöitä. Tutkimuksen tavoitteena on saada päätöksentekijöille havainnollisempi kuva liikennemäärien tai hankkeiden vaikutuksista esimerkiksi ympäristöön tai liikenteen sujuvuuteen.

Mallintamisessa kokonaiskuvan muodostus alkaa yleensä yksittäisistä tieverkon käyttäjistä. Kuvitellaan henkilö, joka on aikeissa lähteä käymään esimerkiksi autolla ostoksilla. Ennen kuin henkilö lähtee liikkeelle kohti määränpäätään hän tekee erinäisiä valintoja. Ensimmäiseksi hän luo mielessään joukon reittivaihtoehtoja, jotka käsittävät yleensä parhaaksi todettuja ja tuttuja reittejä, mutta myös joitain uusia ja kokeilunarvoisia. Tämän jälkeen henkilö valitsee reiteistä juuri sillä hetkellä mielestään parhaan vaihtoehdon. Paras vaihtoehto voi olla melkein mikä tahansa, mutta yleensä henkilö pyrkii minimoimaan matkaan kuluvan ajan ottaen yleensä huomioon myös muita tekijöitä, kuten reitin tuttuuden, mukavuuden ja turvallisuuden. Matka-ajan arviointi ei ole yleensä kovin tarkkaa, joten valintaperusteissa on usein mukana epävarmuutta.

Tämä kandidaatintyö käsittää kirjallisuuskatsauksen erilaisiin menetelmiin tuottaa reittivaihtoehtoja tiheällä liikenneverkolla sekä mallintaa reitinvalintaa yleisellä tasolla. Lisäksi pohditaan kyseisten menetelmien käyttömahdollisuuksia erityisen tiheällä liikenneverkolla. Reittivaihtoehtojen tuottamisessa käydään läpi perinteisemmät, heuristiset menetelmät sekä kehittyneemmät algoritmit. Käsiteltävät reitinvalintamallit painottuvat vahvasti logit-malleihin, yhtä poikkeusta lukuunottamatta.

Useat tähän asti käytössä olleet liikennetutkimuksen menetelmät olettavat, että liikenneverkko on riittävän harva; tämä johtuu siitä, että vanhat digitoidut tieverkot ovat olleet hyvin yksinkertaistettuja. Niiltä osin kun tieverkko olisi todellisuudessa ollut varsin tiheää — kuten Helsingin kantakaupungissa — mallinnuksessa verkoista oli jätetty useita linkkejä pois senaikaisen puutteellisen laskutehon ja epätehokkaiden menetelmien takia. Tämän kirjallisuuskatsauksen yhtenä tavoitteena on löytää menetelmiä, jotka ovat tarpeeksi tehokkaita käytettäväksi tiheällä, monimutkaisella liikenneverkolla.

Tarkoituksena on myös ottaa huomioon se, että niin sanottua liikennesijoittelua tehdessä (asetetaan tietty määrä liikennettä verkolle mahdollisimman todenmukaisesti) kaikki kahden tietyn pisteen välinen liikenne ei sijoitu pelkästään nopeimmalle reitille, vaan sijoittelussa tapahtuu jonkin verran hajontaa, joka johtuu tielläliikkujien erilaisista reitinvalintapreferensseistä. Tämän aikaansaamiseksi käytetään niin sanottua stokastista valintaa, jossa maksimoitavan reitinvalinnan kokonaishyödyn deterministisen osan lisäksi mukana on stokastinen komponentti.

Tässä työssä esiintyvissä termeissä on käytetty suomenkielisiä käännöksiä. Kaikki termit eivät ole vakiintuneita, jolloin niille on ehdotettu käännöstä.

2 Reittien tuottaminen

Ennen reitinvalintaa täytyy liikenneverkon kaikkien reittien joukosta muodostaa sopiva osajoukko reittivaihtoehtoja. Tämä täytyy tehdä siksi, että reitinvalintamallit olettavat reittivaihtoehtojen kuuluvat joukkoon, jossa kaikki vaihtoehdot ovat jollakin tasolla mielekkäitä. Reittivaihtoehdoilta vaaditaan ainakin seuraavia asioita:

- *Reitit eivät saa olla liian samankaltaisia.* Sekä reittien päällekkäisyys, että matka-aikojen häviävän pieni ero lisäävät indifferenssiä reitinvalinnassa.
- *Reittien täytyy vastata todellisuutta.* Esimerkiksi silmukoita tai u-käännöksiä sisältävät reitit ovat epätoivottuja.
- *Reittivaihtoehtojen määrän täytyy olla tarpeeksi vähäinen.* Realistinen reitinvalinta tapahtuu yleensä vain muutaman vaihtoehdon välillä. Lisäksi runsas reittivaihtoehtojen tuottaminen on laskennallisesti raskasta.

Lähes kaikissa reittien tuottamisissa tärkeänä vaiheena on lyhimmän reitin laskeminen. Tämän ongelman ratkaisemiseen on useita algoritmeja, mutta yleisimmin käytetty on Dijkstran algoritmi. Algoritmi etenee verkon lyhintä reittiä pitkin ja pitää kirjaa lyhimmästä etäisyydestä lähtösolmun ja käsiteltävien solmujen välillä kunnes saapuu maalisolmuun. [9]

2.1 Metropolis-Hastings -menetelmä

Flötteröd (2013) esittelee artikkelissaan Metropolis-Hastings -menetelmään perustuvan heuristisen algoritmin, joka muodostaa valitun lähdön ja määränpään välillä olevasta lyhimmästä polusta uusia vaihtamalla kauttakuljettuja solmuja. [10] Algoritmi kiinnittää tietyn määrän solmuja ja linkkejä reitin alkupäästä ja loppupäästä ja antaa jäljelle jääneen osareitin kulkea todennäköisyysjakauman mukaan valitun uuden solmun läpi. Näin reittiä ikään kuin venytetään tietyltä matkalta ja saadaan aikaiseksi joku mutaatio. [10]

Algoritmin kulku: Oletetaan joku reitti lähdön ja määränpään välillä Γ, jossa on solmuja $|\Gamma|$ kappaletta. Merkitään reittiä ja indeksoituja solmuja joukolla (Γ, a, b, c), jossa indekseille pätee $1 \leq a < b < c \leq |\Gamma|$. Valitaan reitin ulkopuolelta solmu v todennäköisyysjakaumasta P_{insert}, joka on määritelty kaavalla

$$P_{insert}(v) = \frac{e^{-\tilde{\mu}(\delta_{SP}(\text{lähtö},v)+\delta_{SP}(v,\text{määränpää}))}}{\sum\limits_{w \in \mathcal{N}} e^{-\tilde{\mu}(\delta_{SP}(\text{lähtö},w)+\delta_{SP}(w,\text{määränpää}))}}, \tag{1}$$

jossa $\tilde{\mu}$ on positiivinen etäisyysparametri, jolla voidaan ohjata sitä kuinka kaukana uuden solmun v täytyy olla alku- ja lähtöpisteestä, $\mathcal{N}$ on solmuvaihtoehtojen joukko todennäköisyysjakaumassa ja $\delta_{SP}(\cdot, \cdot)$ on lyhimmän polun matka-aika parametreina annettujen solmujen välillä. Muutetaan reitin kiinnittämätön osa kulkemaan solmun v kautta seuraavalla tavalla:

1. määritetään lyhimmät osareitit $\Gamma_1 = SP(a, v)$ ja $\Gamma_2 = SP(v, c)$
2. uusi reitti on $\Gamma = \Gamma(1, a) + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma(c, |\Gamma|)$
3. muutetaan indeksit siten, että $a = a$, $b = \Gamma^{-1}(v)$ ja $c = b + |\Gamma_2| - 1$.

$SP(v, w)$ on lyhin reitti solmujen v ja w välillä ja merkintä $\Gamma^{-1}(v)$ tarkoittaa solmun v paikkaa. Todennäköisyydellä P_{splice} suoritetaan yllämainittu operaatio ja tuotetaan uusi reitti Γ. Toisaalta todennäköisyydellä $1 - P_{splice}$ sekoitetaan indeksien paikkaa; kuitenkin sillä tavalla, että järjestys $1 \leq a \leq b \leq c \leq |\Gamma|$ pysyy. Flötterödin (2013) mukaan todennäköisyyksillä $P_{splice} \in [0.5, 0.75]$ on saatu yleensä hyviä tuloksia.

Flötterödin mukaan etäisyysparametri $\tilde{\mu}$ pitäisi valita siten, että reitin tuottamistodennäköisyys riippuu käänteisesti matka-ajasta. Muutetaan etäisyysparametri kertoimeksi $\tilde{\mu} = \mu$, joka riippuu parametrista ξ siten, että pituudeltaan $\xi\delta_{SP}$ oleva reitti tuotetaan puolella todennäköisyydellä pituuden δ_{SP} reitistä. Pituuskertoimeksi saadaan

$$\mu = \frac{\ln 2}{(\xi - 1)\delta_{SP}} \tag{2}$$

Jos $\xi \to 1$, niin $\mu \to \infty$ ja vain lyhyin reitti matka-ajalla δ_{SP} tuotetaan. Jos $\xi \to \infty$, niin $\mu \to 0$ ja kaikki reittivaihtoehdot muodostuvat riippumatta matka-ajasta.

Flötteröd (2013) suoritti algoritmilla esimerkkiajon Israelin Tel-Avivin kaupungin liikenneverkolla, keskustan erittäin tiheällä alueella. Algoritmi tuottaa itsenäisen reittivaihtoehdon noin 3 - 140 sekunnissa riippuen parametrien μ ja P_{splice} arvoista. Pienellä μ -arvolla reittivaihtoehdot olivat varsin hajallaan verkolla, kun taas isolla arvolla reitit ovat vain vähän lyhyimmästä reitistä poikkeavia. Flötteröd pitää tulosta varsin hyvänä ottaen huomioon, että testiverkossa oli 17118 linkkiä ja 7879 solmua. Algoritmin voi olettaa toimivan hyvin tyypillisellä tiheällä liikenneverkolla, varsinkin pienemmillä iteraatiomäärillä.

Metropolis-Hastings -algoritmin toimivuus erikoistapauksissa vaihtelee runsaasti. Jos kuvitellaan esimerkiksi verkko, jossa lähtö- ja määränpääsolmujen välillä on kaksi yhdensuuntaista, nopeaa valtatietä ja näiden välissä tiheämpi, hidas verkko. Tällöin tuotetut reitit sijoittuvat todennäköisesti hitaalle verkolle sen sijaan, että vaihtoehdoksi valikoituisi toinen nopea vaihtoehto.

Metropolis-Hastings toimineekin hyvin vain nopeuksiltaan homogeenisella, tiheällä verkolla.

2.2 Linkkieliminaatio

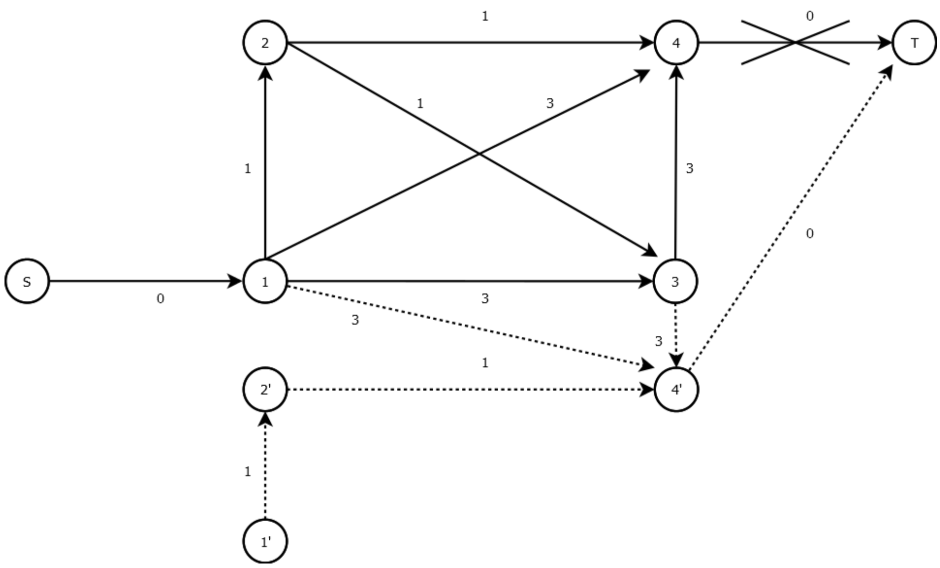
Linkkieliminaatiossa uusia reittejä tuotetaan poistamalla yksi tai useampi linkki kyseisellä iteraatiolla nopeimmasta reitistä ja laskemalla uusi nopein reitti lähdöstä määränpäähän. Poistettavan linkin valintaan käytetään yleensä jotain päättelysääntöä; esimerkiksi se voi olla aina ensimmäinen tai viimeinen linkki tai joku vaihteleva reitin osa riippuen jostain tekijästä.

Bellman ja Kalaba (1968) esittelevät erään periaatteen eliminoitavien linkkien valinnassa: valitaan joku linkki, jonka alkupää on senhetkisellä lyhimmällä reitillä ja loppupää reitin ulkopuolella. Tämän jälkeen uusi lyhin reitti lasketaan tämän linkin kautta eliminoimalla muut lähtösolmusta lähtevät linkit. Kauttakulkulinkit voidaan valita esimerkiksi järjestyksessä lyhimmältä reitiltä lähdöstä määränpäähän tai matka-aikajärjestyksessä [3].

Azevedo et al. (1993) esittelevät artikkelissaan [2] erään implementaation algortmista, jossa verkko ensin laajennetaan lähtösolmua edeltävällä aloittavalla solmulla ja maalisolmun jälkeisellä päättävällä solmulla sekä nollakustannuksellisilla linkeillä. Tämän jälkeen jokaisella iteraatiolla

1. poistetaan nopeimman reitin viimeinen linkki (terminoivaan solmuun)
2. lisätään verkkoon apusolmut, joiden indeksit ja linkkien kustannukset ovat samat kun kyseisen iteraation nopeimmalla reitillä; kuitenkin ilman kaarta initioivaan solmuun
3. lisätään kaaret varsinaisen verkon solmuista apuverkon solmuihin siten, että apusolmujen kaaret ovat yhteydessä toisiinsa ja varsinaisen verkon solmut ovat yhteydessä kyseistä verkkoa vastaaviin apusolmuihin
4. lasketaan uusi nopein reitti

Kuvassa 1 näkyy algoritmin esimmäinen iteraatio yksinkertaisella esimerkkiverkolla.



Kuva 1: Verkon ensimmäisen linkkieliminaatioiteraation havainnekuva. Lähtösolmun 1 viereen on lisätty initioiva solmu S ja maalisolmun 4 viereen terminoiva solmu T.

Linkkieliminaation ongelmana on sen ehdottomuus; jos lyhimmän reitin kaikki linkit poistetaan, useita vain hieman kyseistä reittiä myötäileviä, analyysin kannalta mielenkiintoisia reittejä jää muodostamatta. Toisaalta jos linkkejä poistetaan vain yksi joka iteraatiossa, reittivaihtoehtojoukosta tulee liiankin yhtenäinen. Näiden vaihetoehtojen väliltä löytyvä sopiva kompromissi voi olla hankala saavuttaa.

2.3 Linkkisakko

Kyseessä on menetelmä, jossa uusia reittejä tuotetaan asettamalla nopeimman reitin yhden tai useamman linkin matka-aika niin suureksi, että lyhin reitti muuttuu. Linkkisakon voi käsittää linkkieliminaation yleiseksi tapaukseksi: sakko muuttuu eliminaatioksi siinä tapauksessa kun se lähenee ääréttömyyttä.

Akgün et al. (2000) esittelevät artikkelissaan alun perin Ruphail et al. (1995) kehittämän metodin nimeltä Iterative Penalty Method (IPM), jossa jokaisen iteraation lyhimmän reitin linkeille, solmuille tai molemmille näistä asetetaan joko additiivinen tai kertoimellinen sakko. [1] [14] Sakon suuruudella voidaan määritellä se, kannattaako sakotetun reitin linkkejä tai solmuja käyttää missään vaiheessa uudestaan jollain toisella lyhyimmällä reitillä. Akgünin mukaan IPM:n implementaatiossa on neljä huomioonotettavaa aspektia:

- *Sakotettavat verkon osat.* Sakotetaanko linkkejä, solmuja vai molempia. Solmuja sakottaessa täytyy ottaa huomioon, että silloin katkaistaan todennäköisesti enemmän reittejä varsinkin runsaslinkkisissä risteyksissä.
- *Sakon tyyppi.* Sakko voi olla additiivinen tai jokin kerroin. Lisäksi sakon voi asettaa joko alkutilanteen tai edellisen iteraation suhteen.
- *Sakon suuruus.* Jos lyhimmän reitin linkkejä tai solmuja ei haluta käyttää seuraavissa iteraatioissa, sakko voidaan asettaa tarpeeksi suureksi.
- *Sakon sijoittelu.* Sakon voi asettaa joko senhetkisen iteraation lyhimmälle reitille, tai kumulatiivisesti myös edellisten iteraatioiden lyhimmille reiteille.

Menetelmä on hyvin yksinkertainen, koska se vaatii käytännössä vain lyhimmän polun laskentaa ja yllämainitut linkkisakkomääritykset. Toisaalta menetelmän ongelmana on tuotettujen reittien laadullisen tarkistamisen mahdottomuus, jolloin neljän ylläolevan kohdan sopiva määritys saattaa vaatia kokeilua.

2.4 Lyhin reitti kauttakulkulinkin kautta (engl. gateway sortest path)

Akgün et al. (2000) esittelevät artikkelissa myös metodin lyhin reitti kauttakulkulinkin kautta[1], jossa lyhin reitti etsitään joka iteraatiolla sillä vaatimuksella, että reitti kulkee aina jonkun tietyn, vaihtuvan linkin läpi. [1] Jokaisen reitin tuottamisessa käytetään siis lyhimmän polun algoritmia kahdesti. Reittien samankailtaisuutta tarkastellaan tutkimalla reittien rajaamien alueiden pinta-alojen eroja. Menetelmällä saa muodostettua varsin tehokkaasti suuren määrän reittivaihtoehtoja. Ongelmana on kauttakulkulinkin valinta, jonka löytämiseen ei ole olemassa minkäänlaista menetelmää. Varsinkin verkolla,

[1] Ehdotettu käännös.

jossa osa linkeistä ovat joen ylittäviä siltoja voi muodostunut reitti tehdä varsin pitkän kiertotien.

- Reitit saattavat sisältää silmukoita.
- Jotkut käyvät reitit saattavat joutua eliminoiduksi, jos ne ovat dominoituja, eli lyhin reitti on liian samankaltainen sen kanssa.
- Liian samankaltaisia reittejä saattaa muodostua, koska kandidaattien samankaltaisuutta verrataan ainoastaan alkuperäiseen, lyhimpään reittiin.

2.5 Simulaatiomenetelmä

Simulaatiomenetelmässä uusien reittien tuottaminen perustuu behavioristiseen oletukseen, että reittien matka-ajat eivät ole verkolla liikkuvan tarkasti laskettavissa. Tämän seurauksena uusia reittivaihtoehtoja voidaan tuottaa laskemalla linkkien matka-ajat jostain todennäköisyysjakaumasta. Sheffi et al. esittelivät multinomiaalisen probitmallin, jota voidaan pitää eräänlaisena simulaatiomenetelmän esiasteena. [15] Menetelmässä linkkien matka-ajat otetaan Monte Carlo -tekniikalla probit-jakaumasta.

Yksinkertaisimmillaan simulaatiomenetelmä on silloin, kun matka-ajat lasketaan rajoitetusta normaalijakaumasta. Jakauma on määritelty siten, että mediaani ja varianssi ovat estimoitu linkkien matka-ajoista ja reunaehdot linkkien matka-ajoista maksimi ja miniminopeudella.

Ongelmaksi voi muodostua tiheä liikenneverkko, jossa on paljon linkkejä. Jos oletetaan, että matka-ajat ovat toisistaan riippumattomia, niin matka-aikojen poikkeamien summan odotusarvo lähenee nollaa. Lisäksi linkkien suuresta määrästä johtuen suuremmat poikkeamat vaimentuvat ja varianssi on hyvin pientä. Tällöin simuloiduista matka-ajoista muodostuneet lyhyimmät reitit ovat pieniä poikkeamiltaan. Yhtenä ratkaisuna tähän voisi olla se, että linkit jaettaisiin eräänlaisiin kategorioihin tiettyjen ominaisuuksien, kuten väylätyypin mukaan. Tämän jälkeen matka-aikojen simulointi tehtäisiin kategorioittain, jolloin voisi olettaa, että pienemmällä otoskoolla poikkeamat kasvaisivat.

3 Reitinvalintamallit

Kun tarvittava joukko reittivaihtoehtoja on tuotettu, on vuorossa mallintaa tiellä liikkuvan todennäköisyyttä valita tästä joukosta tietty reitti. Seuraavissa kappaileissa esitellään muutamia yleisimmin käytettyjä ja hieman harvinaisempiakin reitinvalintamalleja. Jokaisen kohdalla otetaan myös yksinkertainen esimerkki, jossa reittivaihtoehtoja on kaksi kappaletta: ensimmäinen on pienempi matka-ajan odotusarvoltaan, mutta suurempi matka-ajan varianssin suhteen kuin toinen reitti.

3.1 Multinomiaalinen logitmalli (engl. multinomial logit)

Multinomiaalinen logitmalli (engl. lyhennetty MNL) on yksinkertaisuutensa vuoksi yleisimmin käytetty malli reitin ja kulkutavan valintamalleissa liikennesuunnittelussa. [4]

Malli perustuu niinkutsutun satunnaisen hyötymallin määrittelemään henkilön n hyötyyn kun hän valitsee reitin i

$$U_{in} = V_{in} + \epsilon_{in}, \tag{3}$$

jossa V_{in} on henkilön n deterministinen hyöty valitessaan reitin i ja ϵ_{in} on riippumaton ja identtisesti jakautunut, hyödyn tuntemattomia vaikutussuhteita kuvaava kohina. Jos deterministinen hyöty riippuu pelkästään reitin matka-ajasta, se voi olla esimerkiksi muotoa

$$V_{in}(t) = \beta_n t_i,\ \beta_n < 0\ \forall n, \tag{4}$$

jossa β_n on deterministisen hyödyn vaikutuskerroin. Vaikutuskerroin voi olla universaalisti vakio, tai (kuten tässä tapauksessa) yksilökohtainen vaikutuskerroin.

Hyötyfunktion satunnaisen termin ϵ_{in} jakaumaoletuksen avulla voidaan määrittää henkilön n todennäköisyys valita reitti i yksilökohtaisesta reittivaihtoehtojoukosta C_n

$$P(i|C_n) = \frac{e^{V_{in}}}{\sum\limits_{j \in C_n} e^{V_{jn}}}, \tag{5}$$

jota kutsutaan multinomiseksi logittimalliksi. Multinomisen logittimallin etu on sen yksinkertaisuus; ainoa estimoitava parametri on hyötyfunktion kerroin β ja logit-malli on ratkaistavissa suljetussa muodossa. Toisaalta MNL olettaa reittien olevan täysin toisistaan eriäviä, minkä takia yhteisiä linkkejä sisältävät reitit saavat liian suuren painoarvon.

3.2 Yhtenevyyslogitmalli (engl. C-logit)

Multinominen logit ei ota huomioon sitä, että reittien päällekkyys vahvistaa verkolla liikkuvan indifferenssiä reittivaihtoehtojen välillä. Cascetta et al. (1996) esittelevät yhtenevyyslogitmallin[1], joka korjaa keskenään päällekkäin olevien reittien valinnasta saatua hyötyä. [7] Reitinvalintamalli on muotoa

$$P(i|C_n) = \frac{e^{V_{in}+CF_i}}{\sum\limits_{j \in C_n} e^{V_{jn}+CF_j}}, \tag{6}$$

jossa yhtenevyyskerroin CF_k on määritelty

$$CF_k = \beta_{CF} \ln \sum_{l \in C_n} \left(\frac{L_{lk}}{\sqrt{L_l L_k}} \right)^{\gamma} \tag{7}$$

ja jossa β_{CF} sekä γ ovat estimoitavia parametreja, L_l ja L_k ovat reittien l ja k pituudet ja L_{lk} on näiden reittien yhtenäisten osuuksien kokonaispituus.

Prato (2009) esittelee artikkelissaan myös muita vaihtoehtoisia formulaatioita yhtenevyyskertoimelle, jotka ovat

$$CF_k = \beta_{CF} \ln \sum_{a \in \Gamma_k} \left(\frac{L_a}{L_k} \sum_{l \in C_n} \delta_{al} \right), \tag{8}$$

$$CF_k = \beta_{CF} \sum_{a \in \Gamma_k} \left(\frac{L_a}{L_k} \ln \sum_{l \in C_n} \delta_{al} \right) \text{ ja} \tag{9}$$

$$CF_k = \beta_{CF} \ln \left[1 + \sum_{\substack{l \in C_n \\ k \neq l}} \left(\frac{L_{kl}}{\sqrt{L_k L_l}} \right) \left(\frac{L_k - L_{kl}}{L_l - L_{kl}} \right) \right]. \tag{10}$$

Näistä yhtälöistä (8) ja (9) a on reitin k linkit ja δ_{al} on yksi, jos linkki a kuuluu myös reittiin l, muuten nolla. [13]

Tarkastellaan yhtenevyyskertoimien arvoja eri tilanteissa. Oletetaan m kappaletta samanpituista reittejä, joissa kussakin on kaksi 0.5 pituista linkkiä. Reittien ollessa täysin toisistaan eriävät yhtenevyyskertoimen arvoksi tulee mallilla (7) $CF_k = 0$ ja malli yksinkertaistuu tavalliseen multinomiseen logitmalliin (5). Jos yksi reitti jakaa toisen linkkinsä jonkun reitin kanssa, niin kerroin tällä reitillä k_a saa arvon $CF_{k_a} = \beta_{CF} \ln \left(1 + \frac{1}{2} + (m-2) \times 0\right)^{\gamma} = \beta_{CF} \ln \left(\frac{3}{2}\right)^{\gamma}$. Linkkien yhtenevyyden on tarkoitus vähentää vastaavien reittien valintatodennäköisyyttä, joten parametrille β_{CF} estimoidaan negatiivisia arvoja. Parametrilla γ säädetään yhtenevyyden vaikutusta hyötyyn.

Kerroinkaavalla (8) täysin toisistaan eriävillä reiteillä kerroin saa taas arvon $CF_k = 0$. Yhden reitin jakaessa toisen linkkinsä toisen reitin kanssa kertoimeksi tulee $CF_{k_a n} = \beta_{CF} \ln \left(\frac{3}{2}\right)$. Kaavalla (9) vastaavat tilanteet tuottavat niin ikään kertoimen arvot $CF_k = 0$ ja $CF_{k_a} = \frac{1}{2}\beta_{CF} \ln 2$. Viimeiseksi kaavalla (10) tuotetut kertoimet ovat $CF_k = \beta_{CF} \ln [1 + (m-1) \times 0] = 0$ ja $CF_{k_a} = \beta_{CF} \ln \left[1 + \frac{1}{2} + (m-2) \times 0\right] = \beta_{CF} \ln \left(\frac{3}{2}\right)$. Yhtenevyyskertoimien antavat arvot ovat siis samantyyppisiä eri tilanteissa, mutta ottavat hieman eri tavalla huomioon reitin yhtenevyyden.

Praton (2009) mukaan yhtenevyyslogitin etuja ovat robustit hyötyfunktion parametriestimaatit pienelläkin otoskoolla, mutta ongelmana on yhtenevyyskertoimen valintaan liittyvän teorian puute.

3.3 Reittien kokoon perustuva logitmalli (engl. path size logit)

Reittien kokoon perustuva logitmalli[1] (engl. lyhennetty PSL) on Ben-Akivan ja Rammingin (1998) esittelemä malli, jossa — kuten yhtenevyyslogitmallissa — otetaan huomioon reittivaihtoehtojen mahdolliset yhteiset linkit. Mallissa reiteille määritellään niinkutsuttu koko-ominaisuus, joka kuvaa reitin uniikkien linkkien osuutta koko pituudesta. [5] PSL laajentaa multinomiaalisen logitmallin siten, että reitin valintatodennäköisyydeksi muodostuu

$$P(i|C_n) = \frac{e^{V_{in}+PS_i}}{\sum\limits_{j \in C_n} e^{V_{jn}+PS_j}}. \tag{11}$$

Reittien kokoa kuvaa termi

$$PS_k = \beta_{PS} \ln \sum_{a \in \Gamma_k} \frac{L_a}{L_k} \frac{1}{\sum\limits_{l \in C_n} \delta_{al}} \text{ tai vaihtoehtoisesti} \tag{12}$$

$$PS_k = \beta_{PS} \ln \sum_{a \in \Gamma_k} \frac{L_a}{L_k} \frac{1}{\sum\limits_{l \in C_n} \left(\frac{L_k}{L_l}\right)^{\gamma_{PS}} \delta_{al}}, \tag{13}$$

joissa β_{PS} ja γ_{PS} ovat estimoitavia parametreja, Γ_k on linkkien joukko reitillä k, L_a ja L_k ovat linkkien ja reittien pituudet ja δ_{al} on Kroneckerin delta (saa arvon 1 kun $a \in l$ ja 0 kun $a \notin l$).

Yhtälössä (12) PS_{kn} on summa linkkien pituuksien ja koko reitin suhteesta kerrottuna osamäärällä, joka summautuu ykköseksi, jos kyseinen linkki sisältyy vain yhteen reittiin. PS_{kn} kuvaa sitä kuinka suuri osa reitistä k on muista reiteistä poikkeavaa. Summa saa siis arvoja välillä $(0, 1)$ ja sen vaikutus valintatodennäköisyyteen on logaritminen, eli vaihtelee välillä $(-\infty, 0)$.

Mitä enemmän reitillä on yhteneviä linkkejä muiden reittien kanssa, sitä heikentävämpi vaikutus sillä on reitinvalintatodennäköisyyteen.

Vastaavasti yhtälössä (13) korjauskertoimen vaikutusta lisätään erityisen pitkillä reiteillä suhteessa lyhyisiin reitteihin ja parametrilla γ_{PS} tätä vaikutusta voidaan ohjata.

Oletetaan samat kaksi tilannetta, kuin kappaleessa 3.2. Päällekkäisyystermien (12) arvoiksi muodostuu täysin eriävien reittien tapauksessa $PS_{kn} = \beta_{PS}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) = \beta_{PS}\ln\frac{3}{4}$ ja $PS_{k_a n} = 0$. Parametrille β_{PS} estimoidaan positiivisia arvoja. Käytettäessä kaavaa (13) tulokset ovat muuten samoja, mutta erityisen pitkillä reiteillä suhteessa muihin negatiivinen vaikutus kasvaa voimakkuudella, joka riippuu parametrin γ_{PS} arvosta.

PSL:n etuina on MNL:n tapaan yksinkertaisuus ja helppo parametrien estimointi – lukuunottamatta γ_{PS}-parametria kaavassa (13), jonka kohdalla mallia yleensä tutkitaan sen eri arvoilla. Toisaalta Praton (2009) mukaan PSL ottaa huomioon vain osan reittien korreloituneisuudesta ja harhattomien estimaattien saamiseksi korjauskerroin on laskettava koko reittivaihtoehtojoukosta. [13]

3.3.1 Reittien kokoon perustuva korjaava logitmalli (engl. path size correction logit)

Reittien kokoon perustuva korjaava logitmalli[1] (engl. lyhennetty PSCL) on Bovy et al. (2008) kehittämä vaihtoehtoinen lähestymistapa PSL-malliin kappaleessa 3.3, jossa korjaustermi on muodostettu approksimatiivisesti yleisten ääriarvomallien (generalized extreme value models) pohjalta. [6] PSCL laajentaa multinomiaalisen logitmallin valintatodennäköisyysfunktion muotoon

$$P(i|C_n) = \frac{e^{V_{in}+PSC_i}}{\sum\limits_{j\in C_n} e^{V_{jn}+PSC_j}}, \tag{14}$$

jossa PSC_i ja PSC_j ovat päällekkäisten reittien korjauskertoimet (vrt. yhtälöön (12)) muotoa

$$PSC_k = -\beta_{PSC} \sum_{a \in \Gamma_k} \left(\frac{L_a}{L_k} \ln \sum_{l \in C_n} \delta_{al} \right), \tag{15}$$

jossa β_{PSC} on estimoitava parametri. PSCL painottaa kulkutavan valintamallissa reittejä kaikilla niiden reittien määrän logaritmeilla, joissa esiintyy samoja linkkejä. Toisin kuin PSL - jonka PS-kertoimen vaihteluväli on $(0, 1)$ - PSCL:n vaihtelee välillä $(-\infty, 0)$, sillä samaa linkkiä käyttävien reittien määrällä ei ole teoriassa ylärajaa.

Kappaleissa 3.2 ja 3.3 esitetyssä tilanteessa täysin toisistaan erillään olevien reittien PSCL-kertoimeksi tulee $PSC_k = 0$ ja kahden reitin yhteisen linkin tapauksessa $PSC_{k_a} = -\frac{1}{2}\beta_{PSC} \ln 2$. Koska kertoimen on tarkoitus vaihdella välillä $(-\infty, 0)$, parametri β_{PSC} saa positiivisia arvoja.

3.4 Implisiittinen saatavuus (engl. implicit availability/perception)

Implisiittisen saatavuuden[1] malli (englannin kielessä lyhennetty IAP) perustuu Cascettan et al. (2001) teoriaan, että liikkujan saama hyöty reitistä riippuu deterministisen ja stokastisen hyödyn lisäksi sumeasta muuttujasta, joka kuvaa reitin saatavuutta kyseiselle yksilölle. [8] Malli laajentaa reitinvalinnasta saadun kokonaishyödyn muotoon

$$U_{in} = V_{in} + \ln \mu_{C_n}(i) + \epsilon_{in}, \tag{16}$$

jossa reitin i saatavuutta tai näkyvyyttä yksilölle n kuvaava sumea satunnaismuuttuja $\mu_{C_n}(i)$ vaihtelee välillä $[0, 1]$. Jos reitti on täysin käytettävissä muuttuja saa arvon 1, jolloin termi $\ln \mu_{C_n}(i)$ saa arvon 0 ja kaava (16) supistuu samaksi kuin kaava (3). Toisaalta termi ja samalla funktion arvo lähenee rajatta negatiivista äärettömyyttä, jos muuttujan arvo lähenee nollaa, mikä tuntuu varsin intuitiiviselta.

Ei voida olettaa, että reitin saatavuus henkilölle n olisi varmasti määritettävissä. Tämän takia on perusteltua käyttää odotusarvoa $\bar{\mu}_{C_n}(i) = E\left[\mu_{C_n}(i)\right]$. Approksimoimalla hyötyfunktiota samalla tavalla kuin multinomisessa logitmallissa (3), mutta käyttämällä ytimenä saatavuuskerrointa saadaan valintamalliksi

$$P(i|C_n) = \frac{e^{\alpha\left(V_{in}+\ln\bar{\mu}_{C_n}(i)-\frac{1-\bar{\mu}_{C_n}(i)}{2\bar{\mu}_{C_n}(i)}\right)}}{\sum\limits_{j\in C_n} e^{\alpha\left(V_{jn}+\ln\bar{\mu}_{C_n}(j)-\frac{1-\bar{\mu}_{C_n}(j)}{2\bar{\mu}_{C_n}(j)}\right)}}, \tag{17}$$

jossa α on estimoitava parametri. Jos kaikki reitit ovat täysin henkilön saatavilla ja havaittavissa, malli supistuu multinomiseen logittimalliin (5). Reitin i ollessa ei-saatavilla tai näkymättömissä silloin, kun muut vaihtoehdot ovat täysin saatavilla eksponentin sumea ydin lähenee nollaa positiiviselta puolelta $\lim_{\bar{\mu}_{C_n}(i)\to 0^+}\left(\ln\bar{\mu}_{C_n}(i) - \frac{1-\ln\bar{\mu}_{C_n}(i)}{2\ln\bar{\mu}_{C_n}(i)}\right) = -\infty$. Tällöin valintatodennäköisyydeksi tulee $P(i|C_n) = 0$.

3.5 Reititysportfolion optimointi (engl. route portfolio theory)

Edellä mainitut reitinvalintamallit olettavat, että tielläliikkuja valitsee reittivaihtoehdoista vain yhden yksiselitteisen reitin tietyllä todennäköisyydellä. Levinson (2013) väittää artikkelissaan, että tielläliikkujan on paras valita portfolio parhaista reittivaihtoehdoista ja valita näiden välillä jonkun todennäköisyysjakauman mukaisesti. [11] Reitinvalintaan vaikuttaa Levinsonin reititysportfolion optimointiteorian[1] mukaan pääsääntöisesti matka-aika ja tämän varianssi. Reitinvalinnassa halutaan siis minimoida funktionaalia

$$\min J = \alpha E(t) + \tau V(t) + \delta C, \tag{18}$$

jossa $E(t)$ on odotettu matka-aika, $V(t)$ on matka-ajan varianssi ja C sisältää muut reitistä aiheutuvat kustannukset. Henkilön matka-ajan arvostusta kuvataan osamäärällä $\frac{\alpha}{\delta}$ ja matka-ajan vähäisen vaihtelun arvostusta osamäärällä $\frac{\tau}{\delta}$. Jos reittivaihtoehtojen matka-aikavektori on $t' = \{t_1, t_2, ..., t_N\}$ ja näiden matka-aikojen odotusarvot ovat $E(t') = \{E(t_1), E(t_2), ..., E(t_N)\}$, niin optimointitehtäväksi muodostuu

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & J = E(p't) \\ \text{s.t.} \quad & Var(p't) \leq v_c \\ & \sum_i p_i = 1 \\ & p_i \in [0,1] \qquad \forall i \in N, \end{aligned} \tag{19}$$

jossa $p' = \{p_1, p_2, ..., p_N\}$ on valintatodennäköisyysvektori reittivaihtoehdoille ja v_c on yläraja varianssille. Tehtävästä voidaan laskea optimaalinen todennäköisyys valita reitti i, joka on joku reittien matka-aikavarianssien funktio $p_i = f(Var(t_i))$, $i \in N$. Riippuen asetetusta varianssin ylärajasta ja optimaalisesta valintatodennäköisyysvektorista optimaalinen reittivaihtoehto on joko yksi reitti, portfolio reittejä tai tyhjä joukko.

Oletetaan tilanne, jossa rettivaihtoehtojoukkona on kaksi reittiä, joiden matka ajat ovat t_1, t_2 ja matka-aikojen varianssit $Var(t_1), Var(t_2)$. Todennäköisyysmatka-aikavektorin varianssiksi saadaan $Var(p't) = pVar(t)p' = p_1^2 Var(t_1) + p_2^2 Var(t_2) = p_1^2 Var(t_1) + (1-p_1)^2 Var(t_2)$. Jos oletamme, että $t_1 \leq t_2$ ja $Var(t_1) \geq Var(t_2)$, niin

$$Var(p't) \in \left[\frac{Var(t_1)Var(t_2)}{Var(t_1) + Var(t_2)}, Var(t_1) \right] \tag{20}$$

ja minimi saavutetaan pisteessä

$$p_1 = \frac{Var(t_2)}{Var(t_1) + Var(t_2)}. \tag{21}$$

Yleisemmässä, kahden parametrin mallissa minimoitava funktionaali on esitetty muodossa

$$\min J = \frac{\alpha}{\delta}E(t) + \frac{\tau}{\delta}V(t) + C. \tag{22}$$

Jos oletetaan, että $\delta = 1$ ja muita kustannuksia C ei ole, niin optimointitehtävä voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & J = \alpha E(p't) + \tau Var(p't) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_i p_i = 1 \\ & p_i \in [0,1] \qquad \forall i \in N. \end{aligned} \tag{23}$$

Funktionaali J voidaan minimoida derivaatan nollakohdan avulla, jolloin saadaan matka-aikavariansseista $Var(t)$ ja parametreista α ja τ riippuva todennäköisyys valita reitti i, eli $p_i = f(Var(t), \alpha, \tau)$, $i \in N$ ja $t = \{t_1, t_2, ..., t_N\}$. Hyödynnetään samaa esimerkkiä kuin varianssin ylärajan tapauksessa. Minimoitava funktionaali on

$$\min J = \alpha((p_1 t_1 + (1-p_1)t_2) + \tau(p_1^2 Var(t_1) + (1-p_1)^2 Var(t_2)). \tag{24}$$

Kun derivoidaan p_1 suhteen ja etsitään nollakohta, niin saadaan

$$p_1 = \frac{Var(t_2) - \frac{\alpha}{2\tau}(t_1 - t_2)}{Var(t_1) + Var(t_2)}. \tag{25}$$

Yhtälöstä (25) voidaan päätellä, että jos α on merkittävästi suurempi kuin τ (eli henkilö arvostaa matka-aikaa enemmän kuin tämän varianssia), niin matka-aikojen erotus $t_1 - t_2$ saa suuren painoarvon. Toisaalta jos τ on merkittävän suuri luku, erotustermi supistuu pois ja matka-aikojen variansseilla on suurempi painoarvo.

4 Yhteenveto

Tässä kandidaatintyössä tehtiin läpileikkaus olemassaoleviin reitintuottoalgoritmeihin ja reitinvalintamalleihin. Jokaisen menetelmän perusperiaatteet esitettiin lyhyesti ja tarvittessa havainnollistettiin esimerkeillä. Lisäksi mainittiin menetelmien mahdollisia ongelmakohtia, jotka koskevat varsinkin tiheitä liikenneverkkoja sekä ehdotettiin näihin ratkaisua, mikäli sellainen löytyi kirjallisuudesta.

Käsitellyt reitintuottoalogritmit perustuvat pohjimmiltaan lyhimmän polun laskemiseen verkolta erityyppisten käsittelyjen jälkeen. Menetelmien joukko oli varsin monimuotoinen, mutta niiden toimintaperiaatteet voidaan jakaa kolmeen eri kategoriaan:

1. *Reittien tuottaminen kauttakulkulinkin kautta.* Uuden nopeimman reitin tuottaminen perustuu aina johonkin uuteen solmuun tai linkkiin jonka kautta koko reitti tai osa siitä asetetaan kulkemaan. Menetelmässä lyhin reitti lasketaan siis kahteen kertaan: alkusolmusta välisolmuun ja tästä edelleen loppusolmuun. Näitä menetelmiä ovat Metropolis-Hastings (2.1) ja lyhin reitti kauttakulkulinkin kautta (2.4).

2. *Reittien tuottaminen karsitusta verkosta.* Uusi nopein reitti tuotetaan poistamalla vanhalta reitiltä yksi tai useampi linkki tai solmu. Vaihtoehtoisesti linkkien tai solmujen kustannuksia manipuloidaan siten, että uusi tuotettu reitti ei kulje välttämättä niiden kautta. Näistä menetelmistä tässä työssä käsiteltiin linkkieliminaatio (2.2) ja linkkisakko (2.3).

3. *Reittien tuotto kaikkien linkkien yli simuloinnin jälkeen.* Nopein reitti lasketaan ottamalla linkkien kustannukset jostain jakaumasta ja laskemalla reitti uudelleen (2.5).

Reitinvalintamalleissa ensimmäiseksi mainittiin multinomiaalinen logitmalli (3.1), joka laskee reitinvalintatodennäköisyyden satunnaisen hyötyfunktion deterministisestä osasta tekemällä jakaumaoletuksen funktion stokastisesta termistä. Yhtenevyyslogitmalli (3.2) ja reitin kokoon perustuva (korjaava) logitmalli (3.3, 3.3.1) ovat multinomiaalisen logitmallin laajennuksia, joissa reitinvalintamalliin (5) tuodaan mukaan termi, joka vähentää valintatodennäköisyyttä, jos reitillä on yhteisiä osuuksia muiden reittivaihtoehtojen kanssa. Implisiittinen saatavuusmalli (3.4) on multinomiaalisen logitmallin laajennus, mutta eri lähestymistavalla. Satunnaiseen hyötyfunktioon (3) otetaan mukaan reitin saatavuutta kuvaava sumea muuttuja. Tämän jälkeen multinomiaalista logitmallia laajennetaan siten, että reitin ollessa täysin saatavilla valintamalli palautuu MNL:in mukaiseen muotoon (5) ja täysin ei-saatavilla olevan reitin valintatodennäköisyys on nolla (16).

Reititysportfolion optimointi (3.5) poikkeaa muista reitinvalintamalleista. Sen ajatuksena on, että reitinvalinta kannattaa tehdä sopivasta reittivaihtoehtojen portfoliosta. Mallissa tielläliikkujalle määritetään kuinka paljon hän painottaa reitinvalinnassaan matka-aikaa ja matka-ajan varianssia. Henkilön reittiportfolio määräytyy sen mukaan mikä on reitin matka-ajan ja tämän varianssin preferenssisuhde.

Lähdeluettelo

[1] V. Akgün, E. Erkut, and R. Batta. “On finding dissimilar paths”. In: *European Journal of Operational Research* 121 (2000), pp. 232–246.

[2] J. A. Azevedo, Maria Emilía O. Santos Costa, Joaquim João E. R. Silvistre Madeira, and Ernesto Q. Vieira Martins. “An algorithm for the ranking of shortest paths”. In: *European Journal of Operational Research* 69 (1993), pp. 97–106.

[3] R. Bellman and R. Kalaba. “On kth Best Policies”. In: *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* 10 (1968), pp. 582–588.

[4] M. Ben-Akiva and S. Lerman. *Discrete Choice Analysis*. 1985, pp. 103–108.

[5] M. Ben-Akiva and S. Ramming. “Discrete choice models of traveler behavior in networks”. University Lecture. 1998.

[6] P. Bovy, S. Bekor, and C. Prato. “The factor of revised path size: an alternative derivation”. In: *Transportation Research Record* 2076 (2008), pp. 132–140.

[7] E. Cascetta, A. Nuzzolo, F. Russo, and A. Vitetta. “A modified logit route choice model overcoming path overlapping problems. Specification and some calibration results for interurban networks”. In: *Proceedings of the Thirteenth International Symposium on Transportation and Traffic Theory. Pergamon, Lyon, France*. 1996, pp. 697–711.

[8] E. Cascetta and A. Papola. “Random utility models with implicit availability/perception of choice alternatives for the simulation of travel demand”. In: *Transportation Research Part C* 9 (2001), pp. 249–263.

[9] E. Dijkstra. “A Note on Two Problems in Connexion with Graphs”. In: *Numerische Mathematik* 1 (1959), pp. 269–271.

[10] G. Flötteröd and M. Bierlaire. “Metropolis-Hastings sampling of paths”. In: *Transportation Research Part B* 48 (2013), pp. 53–66.

[11] L. Levinson and S. Zhu. “A portfolio theory of route choice”. In: *Transportation Research Part C* (2013).

[12] O. Nielsen. “A stochastic transit assignment model considering differences in passengers utility functions”. In: *Transportation Research Part B* 34 (2000), pp. 377–402.

[13] C. Prato. “Route choice modeling: past, present and future research directions”. In: *Journal of Choice Modelling* 2(1) (2009), pp. 65–100.

[14] N. Ruphail, R. Ranjithan, S. ElDessouki, W. Smith, and E. Brill. “A decision suort system for dynamic pre-trip route planning. Applications of advanced technologies.” In: *Transportation Engineering: Proceedings of The Fourth International Conference*. 1995, pp. 325–329.

[15] Y. Sheffi, R. Hall, and C. Daganzo. “On the estimation of the multinomial probit model”. In: *Transportation Research Part A* 16 (1982), pp. 447–456.