Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Teknillisen fysiikan ja matematiikan tutkinto-ohjelma

Yhteisviat ja intervallitodennäköisyydet vikapuuanalyysissä

Kandidaatintyö
17.01.2013

Tomi Jussila

Aalto-yliopisto

AALTO-YLIOPISTO
PERUSTIETEIDEN KORKEAKOULU
PL 11000, 00076 Aalto
http://www.aalto.fi

KANDIDAATINTYÖN TIIVISTELMÄ

Tekijä: Tomi Jaakko Johannes Jussila

Työn nimi: Yhteisviat ja intervallitodennäköisyydet vikapuuanalyysissä

Tutkinto-ohjelma: Teknillisen fysiikan ja matematiikan tutkinto-ohjelma

Pääaine: Systeemitieteet | Pääaineen koodi: F3010

Vastuuopettaja(t): Prof. Ahti Salo

Ohjaaja(t): DI Antti Toppila

Tiivistelmä:

Laajoja teknisiä järjestelmiä tarkastellaan luotettavuusanalyysin menetelmin, jotta voitaisiin varmistaa, että nämä järjestelmät täyttävät niille asetetut luotettavuusvaatimukset. Eräs käytetyimmistä menetelmistä on vikapuuanalyysi, jossa järjestelmän luotettavuutta tarkastellaan sen komponenttien vikaantumisten kautta. Vikapuuanalyysin kiinnostavimpiin käyttötarkoituksiin kuuluu järjestelmän luotettavuuden kannalta kriittisten osien tunnistaminen. Tämä on mahdollista, kun järjestelmän rakenne ja komponenttien vikaantumisten todennäköisyydet tunnetaan.

Usein järjestelmän komponenttien vikaantumisten todennäköisyyksiä ei tunneta tarkasti. Tämän lisäksi toisen haasteen vikapuuanalyysin soveltamiseen tuo useamman komponentin samanaikaisen samasta syystä johtuvan vikaantumisen, eli yhteisvian, mahdollisuus. Aikaisemmin on kehitetty malli, jonka avulla järjestelmän riskit voidaan priorisoida epävarmuuden vallitessa esittämällä todennäköisyydet intervalleina. Tämä kandidaatintyö pohjautuu tähän malliin. Työssä se laajennetaan tarkastelemaan yhteisvikoja. Työssä yhteisvikoja mallinnetaan betafaktorimallilla sen helppokäyttöisyyden vuoksi. Koska myös betafaktorimalleihin liittyy epävarmuutta, työssä esitetään miten tämän mallin parametri β voidaan esittää intervallimuodossa. Lisäksi työssä esitellään Mathematicalla toteutettu algoritmi, joka mahdollistaa komponenttien priorisoinnin, kun komponenttien vikaantumisten todennäköisyydet esitetään intervalleina ja järjestelmässä saattaa olla yhteisvikoja. Tämä tapahtuu laskemalla komponenttien väliset dominanssirelaatiot.

Mallin tuloksia havainnollistetaan esimerkkitapauksella. Sitä tutkitaan silloin, kun yhteisvikoja ei voi tapahtua, sekä myös silloin, kun yhteisviat ovat mahdollisia. Tuloksena huomataan yhteisvikojen merkittävä vaikutus järjestelmän riskiin nähden. Tilanteessa, jossa ei ole yhteisvikoja, jokin komponentti saattaa olla toisen komponentin dominoima jonkin riskitärkeysmitan suhteen. Jos tämä dominoitu komponentti saattaakin vikaantua yhteisvian takia, niin on mahdollista, että se dominoi sitä komponenttia, joka dominoi sitä aiemmin.

Kandidaatintyön tuloksien valossa yhteisvioilla voi olla merkittävä vaikutus järjestelmän luotettavuuteen, ja yhteisvikoihin liittyy paljon epävarmuutta. Tässä kandidaatintyössä esitelty menetelmä huomioi yhteisviat ja ottaa huomioon epävarmuuden sekä vikaantumisten todennäköisyyksissä että yhteisvikamallissa.

Päivämäärä: 17.01.2013 | Kieli: suomi | Sivumäärä: 24

Avainsanat: luotettavuusanalyysi, vikapuuanalyysi, yhteisviat, intervallitodennäköisyydet

Sisältö

1. Johdanto

Vikapuuanalyysi on yksi käytetyimpiä menetelmiä laajojen ja monimutkaisten järjestelmien luotettavuuden tarkastelemista varten. Sitä pidetään tehokkaana menetelmänä järjestelmän riskitason arvioimiseen (Ericson, 1999), sillä sen avulla saadaan muodostettua kuva järjestelmän vikaantumiseen johtavista tapahtumista. Sen avulla voidaan muun muassa varmistaa se, että järjestelmä täyttää sille asetetut luotettavuusvaatimukset, ja tämän lisäksi sen avulla voidaan tunnistaa järjestelmän luotettavuuden kannalta kriittisimmät kohdat. Tätä varten on kehitetty useita riskitärkeysmittoja kuvaamaan järjestelmän komponenttien merkitystä järjestelmän luotettavuuden kannalta. Muun muassa Fussell-Veselyn riskitärkeysmitta (Fussell, 1975) on yksi näistä. Näiden arvot voidaan laskea kullekin järjestelmän komponentille, kun tunnetaan järjestelmän rakenne ja sen komponenttien vikaantumisien todennäköisyydet, jotka saadaan vikapuuanalyysin avulla. Usein vikaantumisista on kuitenkin sen verran vähän havaintoja, että niiden todennäköisyyksien estimaatteihin liittyy erittäin paljon epävarmuutta. Niiden luottamusväli saattaa olla erittäin leveä, jolloin jonkin komponentin vikaantumisen todellinen todennäköisyys saattaa poiketa huomattavasti sen aineiston pohjalta muodostetun arvion, eli estimaattorin arvosta. Vuonna 2012 kuitenkin esitettiin malli (Toppila ja Salo, 2012), joka ottaa tämän epävarmuuden huomioon. Siinä komponenttien vikaantumisien todennäköisyydet esitetään intervallimuodossa niiden ala- ja ylärajan avulla, ja sen jälkeen lasketaan komponenttien väliset dominanssirelaatiot jonkin riskitärkeysmitan suhteen. Komponentti dominoi toista riskitärkeyksien suhteen, jos se saa kaikilla käyvillä todennäköisyyksillä vähintään yhtä suuren riskitärkeysmitan arvon ja ainakin yhdellä käyvällä todennäköisyydellä aidosti suuremman arvon.

Tässä kandidaatintyössä tämä malli on laajennettu yhteisvikojen tarkasteluun. Yhteisvioilla tarkoitetaan tilanteita, joissa useampi komponentti vikaantuu samanaikaisesti saman syyn takia. Esimerkiksi jossakin huoneessa syttynyt tulipalo, joka vikaannuttaa kaikki siinä huoneessa olevat komponentit, on yhteisvika. Yksi tapa mallintaa yhteisvikoja on K.N. Flemingin vuonna 1975 esittelemä betafaktorimalli (Modarres, 2006), joka on yksinkertaisuutensa vuoksi suosittu menetelmä, sillä mallissa tarvitaan vain yhtä parametria yhteisvikojen kuvaamiseksi. Tämän kandidaatintyön tavoitteena on selvittää, miten betafaktorimallia voidaan soveltaa järjestelmän riskien priorisoinnissa, ja miten tämän mallin β-parametrin estimaattori ja sen luottamusväli muodostetaan. Tämän lisäksi tätä kandidaatintyötä varten on luotu esimerkkitapaus, jossa sovelletaan työssä kehitettyä menetelmää järjestelmän riskien priorisoimiseksi. Lisäksi työssä esitellään Mathematicalla toteutettu algoritmi, jolla lasketaan komponenttien väliset dominanssirelaatiot.

Työ rakentuu siten, että luvussa 2 esitellään vikapuuanalyysi, betafaktorimalli ja intervallitodennäköisyyksillä mallintamisen perusteet. Luvussa 3 esitetään tässä kandidaatintyössä muodostettu menetelmä riskien priorisoimiseksi tilanteissa, joissa todennäköisyyksiin liittyy epävarmuutta ja yhteisviat ovat mahdollisia. Luvussa 4 esitellään työtä varten luotu esimerkkijärjestelmä ja työssä kehitetyn menetelmän antamat tulokset siihen järjestelmään. Luvussa 5 esitetään pohdinnat ja yhteenveto.

2. Aikaisempi tutkimus

2.1. Vikapuuanalyysi

Bell Labs- tutkimuskeskuksessa 1961 – 62 kehitetty vikapuuanalyysi on nykyisin yksi suosituimmista menetelmistä luotettavuusanalyysissa (Ericson, 1999). Vikapuuanalyysin etuna on kyky löytää koko järjestelmän vikaantumisen kannalta tärkeät komponenttien vikaantumiset ja luoda sen perusteella hyvä lähtökohta järjestelmän vikaantumisen todennäköisyyden arvioimiseksi.

Vikapuuanalyysin avulla selvitetään miten jokin ei-toivottu tapahtuma eli *huipputapahtuma* toteutuu. Tätä varten täytyy selvittää kaikki mahdolliset syyt, eli osatapahtumat, jotka voivat aiheuttaa huipputapahtuman toteutumisen. Tavoitteena on muodostaa järjestelmälle vikapuu, joka esittää järjestelmän vikaantumisen komponenttien vikaantumisien avulla. Tämä tapahtuu siirtymällä järjestelmän vikaantumisesta alkaen taaksepäin etsien syitä, joilla aina sillä hetkellä tutkittava seuraus voi toteutua. Tavoitteena on määrittää, minkä ehtojen toteutuessa jokin tapahtuma toteutuu. Nämä eri ehdot yhdistetään jollakin operaattorilla, joka noudattaa Boolen logiikkaa. Yleisimmin käytetyt operaattorit ovat ja- sekä tai-operaattori. Näillä operaattoreilla mallinnetaan sitä, että järjestelmä vikaantuu, jos tapahtumat A ja B toteutuvat, tai jos joko tapahtuma A tai B toteutuu. Jos löydetyt ehdot eivät ole riittävän yksinkertaisia, jotta niiden todennäköisyydet pystyttäisiin arvioimaan, näille ehdoille toteutetaan samanlaista tarkastelua. Tämän seurauksena saadaan vikapuun seuraava kerros, jolla on esitettynä ehtojen ehdot loogisten operaattoreiden avulla yhdistettynä siten, että alkuperäiset ehdot toteutuvat. Näin jatketaan niin monta kerrosta eteenpäin, kunnes saatavien ehtojen todennäköisyydet pystytään arvioimaan.

Eräs kiinnostavimmista asioista järjestelmän luotettavuutta tarkasteltaessa on arvioida järjestelmän eri komponenttien vikaantumisen merkitystä järjestelmän kokonaisriskiin. Tämä riskien priorisointi on mielenkiintoista, sillä sen avulla voidaan parantaa järjestelmän luotettavuutta järjestelmää suunniteltaessa ja suunnitella millä tavalla järjestelmän komponenttien toiminta kannattaa tarkastaa. Komponenttien vikaantumisiin, joilla on suurempi merkitys järjestelmän luotettavuuden kannalta, voidaan riskien priorisoinnin johdosta joko kiinnittää enemmän huomiota tai niille voidaan jo suunnitteluvaiheessa lisätä varajärjestelmä. Riskien priorisointia varten on luotu muutamia riskitärkeysmittoja, joiden toiminta perustuu vikapuuanalyysiin. Yksi käytetyimpiä riskitärkeysmittoja on W.E. Veselyn esittelemä ja myöhemmin J.B. Fussellin kehittämä Fussell-Veselyn riskitärkeysmitta (Fussell, 1975), joka määritellään ehdollisena todennäköisyytenä sille, että tutkittava perustapahtuma on tapahtunut ehdolla sille, että huipputapahtuma on tapahtunut. Oletetaan, että järjestelmän vikaantuminen voidaan esittää sen minimikatkosjoukkojen summana. Tämä on mahdollista, jos minimikatkosjoukkojen leikkaus approksimoidaan tyhjäksi joukoksi. Tällöin Fussell-Veselyn riskitärkeysmitta määritellään

$$I_{FV}(A) = \frac{\sum_{\{C_i | A \in C_i\}} \mathbb{P}(C_i)}{\sum_{C_i} \mathbb{P}(C_i)} \approx \mathbb{P}(A|T), \tag{1}$$

jossa A on tutkittava komponentti, T on järjestelmän vikaantuminen ja C_i kuvaa järjestelmän i:nnettä minimikatkosjoukkoa. Fussell-Veselyn riskitärkeysmitta kuvaa sitä osuutta kaikista järjestelmän vikaantumisista, joihin tutkittava komponentti kuuluu.

2.2. Yhteisviat

Joskus perustapahtumat eivät ole toisistaan riippumattomia. Joissakin tapauksissa sama syy aiheuttaa monen komponentin samanaikaisen vikaantumisen. Esimerkiksi tulipalon varalle rakennetun sprinklerijärjestelmän kaikki pumput saattavat olla samassa huoneessa ja tulipalon syttyessä siinä huoneessa kuumuus saattaa vikaannuttaa kaikki pumput samanaikaisesti, ja siten myös koko järjestelmän. Näitä tapahtumia kutsutaan yhteisvikaantumisiksi. Eräs määritelmä yhteisvikaantumiselle on niiden tapahtumien joukko, jossa kaksi tai useampaa vikaantumista esiintyy samanaikaisesti johtuen yhteisestä syystä (Modarres, 2006). Yhteisvikaantumisten vaikutus järjestelmän kokonaisriskiin on yleensä merkittävä, sillä järjestelmän vikaantuminen vaatii tavallisesti useamman komponentin vikaantumisen ja useamman komponentin samanaikaisen, toisistaan riippumattoman vikaantumisen todennäköisyys on pieni komponenttien ollessa luotettavia.

Yhteisvikaantumisten mallintamista varten on kehitetty useita eri yhteisvikamalleja. Yksi käytetyimpiä näistä on K.N. Flemingin vuonna 1975 kehittämä betafaktori-malli. Kyseinen malli olettaa, että yhteisvika vikaannuttaa kaikki komponentit, joihin tämä yhteisvika liittyy. Tämän oletuksen johdosta malli on helppokäyttöinen, joka selittänee mallin suosion vielä nykyisinkin. Tarkastellaan järjestelmää, johon kuuluu m komponenttia, joiden vikaantumisen todennäköisyys on p_t. Betafaktorimallissa tapahtumalla, jossa vikaantuu k komponenttia samanaikaisesti, todennäköisyys on:

$$p_k = \begin{cases} (1-\beta)p_t & k = 1, \\ 0 \quad , & 1 < k < m, \\ \beta\, p_t & k = m. \end{cases} \tag{2}$$

Tarkastellaan seuraavaksi järjestelmää, jossa on kytketty rinnan kaksi komponenttia, joiden vikaantumistapahtumat ovat A ja B, ja molemmat komponentit vikaantuvat todennäköisyydellä p. Rinnan kytketty järjestelmä vikaantuu, kun kaikki sen komponentit vikaantuvat eli kahden komponentin tapauksessa kun $A \cap B$ tapahtuu. Lisäksi nämä komponentit voivat vikaantua samanaikaisesti yhteisvian C vuoksi. Nyt $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = p$, $\mathbb{P}(A|C) = \mathbb{P}(B|C) = 1$, $\mathbb{P}(A|C^C) = \mathbb{P}(B|C^C) = (1-\beta)p$, sillä kyseessä on komponenttien riippumaton vikaantuminen, jonka todennäköisyys saadaan yhtälöstä (2), ja

$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C|A)\mathbb{P}(A) = p\beta$. Näiden todennäköisyyksien avulla voidaan esittää A:n ja B:n samanaikaiselle tapahtumiselle todennäköisyydeksi

$$\mathbb{P}(A \cap B\ ) = \mathbb{P}(A \cap B|C)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(A \cap B|C^C)\mathbb{P}(C^C),$$

joka supistuu yläpuolella esitettyjen kaavojen avulla muotoon

$$\mathbb{P}(A \cap B\ ) = p\beta + (1 - p\beta)\big((1-\beta)p\big)^2. \tag{3}$$

Kun tarkastellaan järjestelmiä, joiden komponentit ovat luotettavia, jolloin $p \ll 1$, voidaan olettaa, että $\beta \gg p$, sillä β:n arvo on tavallisesti lähellä arvoa 0.1 ja p on tätä arvoa huomattavasti pienempi. Tämän oletuksen mukaan yhtälöä (3) voidaan approksimoida termillä $p\beta$, joka tarkoittaa sitä, että oletetaan, että nämä kaksi komponenttia voivat vikaantua samanaikaisesti vain yhteisvian takia.

Betafaktori-malli on yhden parametrin malli, jossa β-parametri kuvaa yhteisvikaantumisten osuutta kaikista vikaantumisista (Modarres, 2006). Suurimman uskottavuuden estimaattori parametrille on

$$\hat{\beta} = \frac{n_c}{n_c + n_i} = \frac{n_c}{n_t}, \tag{4}$$

jossa n_c on yhteisistä syistä johtuneiden vikaantumisten lukumäärä, n_i on riippumattomista syistä aiheutuneiden vikaantumisten lukumäärä, jolloin kaikkien vikaantumisten lukumäärä on $n_t = n_c + n_i$. Monesti yhteisvikaantumisista ei ole riittävästi tietoa, jotta β-parametri voitaisiin määrittää yhtälön (4) siten, että luottamusvälistä ei tulisi huomattavan suuri. Betafaktorimallia voi kuitenkin näissäkin tilanteissa soveltaa yhteisvikaantumisien mallintamiseen. β-parametri voidaan estimoida asiantuntija-arvioita käyttämällä. William M. Goblen kehittämässä menetelmässä esitetään useita kysymyksiä järjestelmän rakenteesta, jonka jälkeen vastaukset pisteytetään, ja koko järjestelmän saaman pistemäärän mukaan järjestelmälle annetaan arvio β-parametrista (Goble, 2003). Esimerkiksi yksi menetelmän kysymyksistä selvittää, kulkevatko kaikki järjestelmän kaapelit erillään toisista. Pistemäärästä riippuen tämä menetelmä antaa β-parametrille arvon väliltä [0.005,0.05] kun menetelmällä tarkastellaan loogista järjestelmää ja arvon väliltä [0.01,0.1] kun menetelmällä tarkastellaan antureita tai toimilaitteita. Taulukossa 1 on esitettynä, miten tällä menetelmällä annetaan arvo β-parametrille pisteytyksen mukaan.

Taulukko 1: β-parametrin saamat arvot Goblen menetelmällä

Score (S or S_D)	**Corresponding value of β or β_D for the:**	
	Logic system	**Sensors or actuators**
120 or above	0.5%	1%
70 to 120	1%	2%
45 to 70	2%	5%
Less than 45	5%	10%
NOTE 1 The maximum levels of β_D shown in this table are lower than would normally be used, reflecting the use of the techniques specified elsewhere in this standard for the reduction in the probability of systematic failures as a whole, and of common cause failures as a result of this. NOTE 2 Values of β_D lower than 0.5% for the logic system and 1% for the sensors would be difficult to justify.		

2.3. Intervallitodennäköisyydet

Komponenttien vikaantumisten todennäköisyyksien piste-estimaateissa saattaa olla niin paljon epävarmuutta, että piste-estimaattien käyttäminen ei ole järkevää. Esimerkiksi heitettäessä noppaa 10 kertaa numero 3 saattaa olla kolme kertaa tuloksena. Tästä huolimatta 95 % todennäköisyydellä on mahdollista, että noppa on virheetön, sillä kolmoselle estimoitavan todennäköisyyden piste-estimaatin luottamusväli on sen verran leveä, että se sisältää myös todennäköisyyden 1/6. Otamme tämän epävarmuuden huomioon esittämällä vikaantumisten todennäköisyydet piste-estimaattien sijasta intervalleina, jotka muodostetaan tapahtuman todennäköisyyden alarajan $\underline{\mathbb{P}}(A)$ ja ylärajan $\overline{\mathbb{P}}(A)$ avulla, siten että ”oikea” todennäköisyys $\mathbb{P}(A)$ osuu näiden kahden pisteen muodostamalle välille.

$$0 \leq \underline{\mathbb{P}}(A) \leq \mathbb{P}(A) \leq \overline{\mathbb{P}}(A) \leq 1 \tag{5}$$

Tehdään koesarja, jossa on N identtistä komponenttia, jotka vikaantuvat todennäköisyydellä p. Kokeen jälkeen vikaantuneita komponentteja on n_f kappaletta ja toimivia $N - n_f$. Vikaantuneiden komponenttien lukumäärä n_f noudattaa binomijakaumaa parametrein N ja p, eli $n_f \sim Bin(p, N)$ (Modarres, 2006). Jakauman parametrina oleva vikaantumisten todennäköisyys p on tuntematon, ja sen suurimman uskottavuuden estimaattori $\hat{p}$ on vikaantuneiden komponenttien lukumäärän n_f ja havaintojen N suhde, eli

$$\hat{p} = \frac{n_f}{N}. \tag{6}$$

Tämän estimaattorin luottamusväli voidaan määrittää usealla tavalla. Yksinkertaisin menetelmä perustuu binomijakauman approksimoimiseen normaalijakaumalla. Tällöin estimaattorin luottamusvälin päätepisteiksi valitulla luottamustasolla $(1 - \alpha)$ saadaan

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}}, \tag{7}$$

jossa $z_{\alpha/2}$ tarkoittaa standardoidun normaalijakauman luottamuskerrointa valitulla luottamustasolla, joka määritetään siten, että

$$\mathbb{P}\left(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha, \tag{8}$$

jossa Z on standardi normaalijakautunut satunnaismuuttuja.

Esimerkiksi, jos valittu luottamustaso on 95 % luottamustaso, niin $z_{\alpha/2}$ tarkoittaa sitä arvoa, jota suurempia on 2,5 % havainnoista. Tässä tapauksessa $z_{\alpha/2}$ arvoksi saadaan 1.96. Tällä tavalla saadaan todennäköisyydelle estimoiduksi intervalli $\left[\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N}}\right]$, jota sanotaan myös Waldin intervalliksi.

Binomijakauman approksimointi normaalijakaumalla toimii, jos havaintojen lukumäärä N on suuri ja tapahtumien todennäköisyys p ei ole lähellä arvoja 0 tai 1. Sen sijaan jos komponentit vikaantuvat harvoin, tämä approksimaatio ei ole käyttökelpoinen. Tämän vuoksi komponenttien vikaantumisien todennäköisyyksien intervallit tulee muodostaa jollakin toisella tavalla. Sternen intervallien laskeminen on suositeltava menetelmä, kun havaintoja on korkeintaan 1000 kappaletta, ja jos havaintoja on tätä enemmän suositellaan oikaistun Waldin intervallin käyttämistä (Reiczigel, 2003). Oikaistu Waldin intervalli 95 % luottamustasolla muodostetaan siten, että havaintoihin lisätään kaksi vikaantumista ja kaksi muuta havaintoa (Agresti ja Coull, 1998). Intervalli lasketaan edelleen siten, että aluksi määritetään todennäköisyyden suurimman uskottavuuden estimaattori $\hat{p}$ yhtälön (6) avulla, joka on lisättyjen havaintojen takia

$$\hat{p} = \frac{n_f + 2}{N + 4},$$

ja tämän jälkeen lasketaan uudet luottamusvälin päätepisteet yhtälön (7) avulla, joka on lisättyjen havaintojen takia

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{N+4}}.$$

Jos komponentin vikaantumisen todennäköisyys on *p,* todennäköisyys sille, että *N* identtisestä komponentista on vikaantunut tarkalleen *r* kappaletta, on

$$\mathbb{P}_{N,r}(p) = \frac{N!}{r!\,(N-r)!}p^r(1-p)^{N-r}. \tag{9}$$

Tällöin todennäköisyys sille, että komponentteja on vikaantunut määrä, joka on korkeintaan yhtä todennäköinen kuin jokin tietty määrä *s*, on

$$\mathbb{P}(p, N, s) = \sum_r \mathbb{P}_{N,r}(p), \tag{10}$$

jonka summassa lasketaan yhteen kaikki arvot *r*, joille pätee

$$\mathbb{P}_{N,r}(p) \leq \mathbb{P}_{N,s}(p).$$

Sternen intervalli (Sterne 1954) muodostetaan siten, että etsitään lyhyin mahdollinen intervalli $\underline{p} \leq p \leq \overline{p}$, joka sisältää kaikki *p*:n arvot, joilla

$$\mathbb{P}(p, N, n_f) \geq \alpha, \tag{11}$$

jossa $(1-\alpha)$ on valittu luottamustaso ja n_f on *N* identtisen komponentin järjestelmässä vikaantuneiden komponenttien lukumäärä. Taulukossa 2 on esitettynä muutamalla eri havaintomäärällä lasketut 95 % luottamusvälit komponenttien vikaantumisten todennäköisyyksille. Kaikki luottamusvälit on laskettu tilanteissa, joissa *N* identtisen komponentin järjestelmistä 10 % on vikaantunut. Luottamusvälin laskemiseen käytetty menetelmä riippuu havaintojen määrästä.

Taulukko 2: 95 % luottamusväli vikaantumisten todennäköisyyksille, kun vikaantuminen on tapahtunut 10 % havainnoista

havaintoja	100	200	1000	10000
alaraja	0.0534	0.0642	0.082869	0.094276
yläraja	0.174	0.1494	0.120318	0.106044

Luottamusvälin laskemisessa on käytetty Sternen intervalli-menetelmää kahdessa ensimmäisessä tuloksessa kun havaintojen määrä on pienempi kuin 1000, ja muissa oikaistua Waldin intervalli-menetelmää. Kun vikaantumisten todennäköisyys on estimoitu 100 havainnosta, joista 10 on ollut vikaantuneita, niin sen 95 % luottamusväli on [0.0534,0.174]. Jos havaintoja on näin vähän, on luottamusväli erittäin leveä. Havaintojen määrän kasvaessa luottamusvälistä tulee kapeampi. Tuloksista nähdään, että kun vikaantumisten todennäköisyys on estimoitu 10000 havainnosta, joista 1000 on ollut vikaantuneita, luottamusväli on jo huomattavan kapea. Tässä tapauksessa vikaantumisten todennäköisyydessä ei ole paljoa epävarmuutta.

3. Mallin muodostaminen

Tarkastellaan seuraavaksi järjestelmää, jossa on *n* kappaletta komponentteja, jotka voivat vikaantua. Tällöin järjestelmän perustapahtumien joukko on $\{w_i\}$, jossa w_i on komponentin i vikaantuminen, ja w_i:n todennäköisyys on $p_i = \mathbb{P}(w_i)$. Perustapahtumien todennäköisyyksien vektori on $p = (p_1, \dots, p_n)$. Tietyillä perustapahtumien yhdistelmillä koko järjestelmä vikaantuu, jolloin huipputapahtuma T tapahtuu. Näitä yhdistelmiä sanotaan katkosjoukoiksi. Jos katkosjoukosta ei voi poistaa yhtäkään perustapahtumaa, jotta huipputapahtuma tapahtuisi edelleenkin, kyseinen joukko on minimikatkosjoukko. Tämä tarkoittaa siis sitä, että minkä tahansa vioittuneen komponentin korjaaminen saa koko järjestelmän toimivaksi. Oletetaan, että järjestelmän huipputapahtuman toteutuminen voidaan esittää minimikatkosjoukkojen $\{C_i\}$, jossa $i = \{1, \dots, N_{Cut}\}$, avulla

$$T = \bigcup_{j \in \{1,\dots,N_{Cut}\}} \bigcap_{i \in C_j} w_i, \tag{12}$$

jossa N_{Cut} on järjestelmän minimikatkosjoukkojen lukumäärä. Koska järjestelmän komponenttien vikaantumisen todennäköisyydet ovat yleensä pieniä, on minimikatkosjoukon tapahtumisen todennäköisyys huomattavasti suurempi kuin saman minimikatkosjoukon ja jonkin muun komponentin vikaantumisen samanaikaisen tapahtumisen todennäköisyys. Tämän takia voidaan tehdä oletus, että järjestelmän vikaantuessa vain jonkin minimikatkosjoukon komponentit ovat vikaantuneet. Tällöin koko järjestelmän vikaantumisen todennäköisyyden approksimaatio on

$$\mathbb{P}(T) \approx \sum_{i=1}^{N_{Cut}} \prod_{j \in C_i} p_j. \tag{13}$$

Yksi mielenkiintoisimmista vikapuuanalyysillä tutkittavista asioista on vertailla eri komponenttien tärkeyttä järjestelmän luotettavuuden kannalta. Tätä varten on kehitetty muutamia eri riskitärkeysmittoja, joista yksi käytetyimpiä on Fussell-Veselyn riskitärkeysmitta, jota sovelletaan jatkossa tässä työssä. Sen määritelmä on esitetty kaavassa (1), joka voidaan johtaa muotoon

$$I_{FV}(w_i) = \frac{\mathbb{P}(T) - \mathbb{P}(T \middle| w_i^C)}{\mathbb{P}(T)}, \tag{14}$$

jossa w_i^C on perustapahtuman w_i komplementti, jolloin siis $\mathbb{P}(T \middle| w_i^C)$ tarkoittaa todennäköisyyttä, että huipputapahtuma on toteutunut ehdolla, että perustapahtuma w_i ei ole toteutunut. Sijoittamalla tähän lausekkeeseen yhtälö (13), saadaan perustapahtuman w_i Fussell-Veselyn riskitärkeysmitan arvon laskemiselle kaava

$$I_{FV}(w_i) = \frac{\sum_{i=1}^{N_{Cut}} \prod_{j \in C_i} p_j - \sum_{\substack{i=1 \\ w_i \notin C_i}}^{N_{Cut}} \prod_{j \in C_i} p_j}{\sum_{i=1}^{N_{Cut}} \prod_{j \in C_i} p_j}. \tag{15}$$

3.1. Betafaktorimallin soveltaminen riskien priorisoinnissa

Tässä kappaleessa tarkastellaan yhteisvikojen mahdollisuuden vaikutusta järjestelmän komponenttien priorisointiin. Yhteisvikojen mallintamiseen käytetään betafaktorimallia, jonka todennäköisyydet p_k saadaan yhtälöstä (2). Järjestelmässä on s komponenttia, jotka voivat vikaantua samanaikaisesti jonkin yhteisen syyn takia. Olkoon S näiden perustapahtumien joukko. Tällöin järjestelmässä on $n - s$ kappaletta komponentteja, joihin yhteisvikaantumiset eivät vaikuta. Nyt järjestelmässä on kolmenlaisia minimikatkosjoukkoja. On minimikatkosjoukkoja, joihin kuuluu vain perustapahtumia, jotka eivät voi vikaantua yhteisvioissa. Näitä minimikatkosjoukkoja on N_{Cut1} kappaletta ja niiden todennäköisyys on $\mathbb{P}(C_i) = \prod_{j\in C_i} p_j$. Lisäksi on minimikatkosjoukkoja, joihin kuuluu myös perustapahtumia, jotka voivat vikaantua myös yhteisvioissa, mutta yhteisvika ei kuitenkaan ole toteutunut. Järjestelmässä näitä on N_{Cut2} kappaletta ja niiden todennäköisyys voidaan esittää

$$\mathbb{P}(C_i) = (1 - p\beta) \prod_{\substack{j\in C_i \\ w_j \in S}} (1-\beta)p_j \prod_{\substack{j\in C_i \\ w_j \notin S}} p_j, \tag{16}$$

jossa $(1-\beta)p_j$ kuvaa yhteisvioissa vikaantuvien komponenttien toisistaan riippumattomia vikaantumisia ja $(1 - p\beta)$ kuvaa todennäköisyyttä, että yhteisvikaa ei tapahdu.

Luvussa 2.2 esitettiin approksimaatio järjestelmille, joiden komponentit ovat luotettavia, jonka mukaan useampi yhteisviassa vikaantuva komponentti vikaantuu samanaikaisesti vain yhteisvian ansiosta. Tämän vuoksi luotettavilla järjestelmillä yhtälön (16) approksimoidaan olevan 0. Tämän lisäksi järjestelmässä on vielä minimikatkosjoukkoja, joihin kuuluu perustapahtumia, jotka voivat vikaantua yhteisvioissa ja yhteisvika on toteutunut. Näitäkin minimikatkosjoukkoja järjestelmässä on N_{Cut2} kappaletta ja niiden todennäköisyys on $\mathbb{P}(C_i) = \beta p \prod_{\substack{j\in C_i \\ w_j \notin S}} p_j$. Tämän avulla koko järjestelmän vikaantumisen todennäköisyyden approksimaatio yhteisvikojen ollessa mahdollisia on

$$\mathbb{P}(T) \approx \sum_{i=1}^{N_{Cut1}} \prod_{j\in C_i} p_j + \sum_{i=1}^{N_{Cut2}} \beta p \prod_{\substack{j\in C_i \\ w_j \notin S}} p_j. \tag{17}$$

Sijoittamalla tämä yhtälö yhtälöön (14), ja määrittämällä myös huipputapahtuman ehdolliset todennäköisyydet, ehdolla, että jokin perustapahtuma ei tapahdu, voidaan määrittää eri komponenttien Fussell-Veselyn riskitärkeysmitan arvot, ja täten priorisoida komponentit niiden riskitärkeyksien mukaan myös silloin, kun osa komponenteista saattaa vikaantua yhteisvian takia. Ehdolliset todennäköisyydet voidaan määrittää siten, että yhtälöstä (17) poistetaan ne termit, jotka sisältävät tutkittavan perustapahtuman.

3.2. Epävarmuus $\boldsymbol{\beta}$-parametrissa

Tässä kappaleessa tarkastellaan miten β-parametrin luottamusväli määritetään. Oletetaan, että vikaantumisista on tehty n_t havaintoa, ja β-parametri on estimoitu näiden havaintojen perusteella, jolloin sen suurimman uskottavuuden estimaattori $\hat{\beta}$ on yhtälön (4) mukainen. Jokainen n_t:stä vikaantumisesta on tapahtunut joko yhteisen syyn aiheuttamana todennäköisyydellä β tai riippumattoman syyn aiheuttamana todennäköisyydellä $1 - \beta$. Tämän vuoksi siis yhteisistä syistä johtuvien vikaantumisien lukumäärä noudattaa binomijakaumaa parametrein n_t ja β, eli $n_c \sim Bin(\beta, n_t)$. Luvussa 2.3 esitetään, miten binomijakauman todennäköisyysparametrin p luottamusväli muodostetaan. Vastaavalla tavalla on mahdollista muodostaa 95 % luottamusväli myös β-parametrille. Huomionarvoista on kuitenkin se, että yhteisvikatilanteista on tyypillisesti huomattavasti vähemmän havaintoja, kuin kaikista vikaantumisista. Tämä johtuu siitä, että vain pienessä osassa kaikista havainnoista on tapahtunut yhteisvikaantuminen. Tällöin β-parametrin luottamusväli kannattaa muodostaa Sternen intervallin avulla. Taulukossa 2 esitetään millainen luottamusväli saadaan muodostettua β-parametrille 0.1 muutamalla eri havaintomäärällä. Tuloksista huomataan, että jos β-parametri määritetään 100 havainnon perusteella, sen luottamusväli on erittäin leveä. Havaintojen määrän kasvaessa luottamusväli kapenee huomattavasti, mutta yleensä havaintoja ei ole riittävästi. Tämän takia β-parametriin liittyy huomattavan paljon epävarmuutta.

3.3. Intervallien käyttäminen

Todennäköisyyksien määritelmien mukaan perustapahtumien todennäköisyyksien vektori $\bar{p}$ rajoittuu monikulmioon $\mathcal{P}^0 = \{\bar{p} = (p_1, \dots, p_n) | 0 \leq p_i \leq 1 \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$. Tähän mennessä perustapahtumien todennäköisyyksinä on käytetty piste-estimaatteja, jolloin siis kaikilla todennäköisyyksillä on yksi tietty numeerinen arvo. Joskus näiden estimaattien luottamusvälit ovat kuitenkin leveitä, minkä vuoksi voi olla järkevämpää esittää perustapahtumien todennäköisyydet intervallimuodossa. Tällöin perustapahtuman w_i todennäköisyydelle p_i määrätään rajoite $\underline{p_i} \leq p_i \leq \overline{p_i}$, jossa $\underline{p_i} \geq 0$ on todennäköisyyden alaraja ja $\overline{p_i} \leq 1$ on todennäköisyyden yläraja. Todennäköisyysvektori $\bar{p}$, joka toteuttaa nämä rajoitteet on käypä todennäköisyysvektori, ja kaikkien näiden vektoreiden joukkoa merkitään jatkossa P^F.

Käytettäessä intervallitodennäköisyyksiä perustapahtumien todennäköisyyksillä ei ole enää yhtä yksittäistä numeerista arvoa, minkä vuoksi myöskään minkään riskitärkeysmitan arvo ei saa yhtä tiettyä numeerista arvoa, vaan se vaihtelee riippuen siitä, mitä käypää todennäköisyysvektoria laskettaessa käytetään. Tästä huolimatta on mahdollista vertailla kahden komponentin riskitärkeysmittojen suhteen hyödyntämällä dominanssi-käsitettä, jonka mukaan perustapahtuma w_i dominoi perustapahtumaa w_j riskitärkeysmitan I suhteen, jos se saa jokaisella käyvällä todennäköisyydellä vähintään yhtä suuren riskitärkeysmitan arvon ja ainakin yhdellä käyvällä todennäköisyydellä tätä suuremman arvon.

Määritelmä 1 Mikäli $I(w_i, p) \geq I(w_j, p)$ kaikilla $p \in \mathrm{P}^F$ ja $I(w_i, p) > I(w_j, p)$ jollakin $p \in \mathrm{P}^F$, niin $w_i \succ_I w_j$

Dominanssirelaatio on irrefleksiivinen, antisymmetrinen ja transitiivinen. Tämä tarkoittaa sitä, että perustapahtuma ei voi dominoida itseään, w_i ei voi dominoida w_j:ta jos w_j dominoi sitä, ja jos w_i dominoi w_j:ta ja w_j dominoi w_k:ta, niin w_i dominoi w_k:ta. Nämä ominaisuudet tekevät mahdolliseksi sen, että määritettäessä koko järjestelmän dominanssirelaatioita ei tarvitse välttämättä käydä jokaista perustapahtumien paria lävitse.

Perustapahtuman w_i Fussell-Veselyn riskitärkeysmitan arvo määritetään yhtälön (14) avulla. Tutkittaessa kahden perustapahtuman välisiä dominanssirelaatioita tämän riskitärkeysmitan suhteen tutkitaan lausetta:

$$\frac{\mathbb{P}(T) - \mathbb{P}(T|w_1^C)}{\mathbb{P}(T)} \geq \frac{\mathbb{P}(T) - \mathbb{P}(T|w_2^C)}{\mathbb{P}(T)}$$

Tämä lauseke supistuu muotoon

$$\mathbb{P}(T|w_2^C) \geq \mathbb{P}(T|w_1^C), \tag{18}$$

jossa vaaditaan lisäksi, että ainakin jollakin käyvällä todennäköisyydellä epäyhtälörajoite toteutuu aitona epäyhtälönä. Jos tähän lausekkeeseen sijoitetaan huipputapahtumien ehdollisien todennäköisyyksien approksimaatiot, lauseke saadaan muotoon

$$\sum_{\substack{i=1 \\ w_2 \notin C_i}}^{N_{Cut}} \prod_{j \in C_i} p_j - \sum_{\substack{i=1 \\ w_1 \notin C_i}}^{N_{Cut}} \prod_{j \in C_i} p_j \geq 0, \forall\, \bar{p} \in \mathrm{P}^F.$$

Edelleen koska ne minimikatkosjoukot, joissa ei esiinny kumpaakaan tarkasteltavista perustapahtumista, esiintyvät molemmissa summatermeissä, ja supistuvat siksi, jolloin saadaan

$$\sum_{\substack{i=1 \\ w_2 \notin C_i \\ w_1 \in C_i}}^{N_{Cut}} \prod_{j \in C_i} p_j - \sum_{\substack{i=1 \\ w_1 \notin C_i \\ w_2 \in C_i}}^{N_{Cut}} \prod_{j \in C_i} p_j \geq 0, \forall\, \bar{p} \in \mathrm{P}^F. \tag{19}$$

Kun tämä lauseke on tosi jokaisella käyvällä todennäköisyydellä, ja tämän lisäksi ainakin yhdellä käyvällä todennäköisyydellä epäyhtälömerkin vasemmalla puolella oleva termi on suurempi kuin 0, dominoi perustapahtuma w_1 perustapahtumaa w_2 Fussell-Veselyn riskitärkeysmitan mielessä. Tässä siis täytyy tarkastella, onko epäyhtälömerkin vasemmalla puolella oleva termi positiivinen kaikilla käyvillä todennäköisyyksillä ja tämän lisäksi ainakin yhdellä käyvällä todennäköisyydellä aidosti positiivinen.

3.4. Intervallitodennäköisyyksien soveltaminen yhteisvikatilanteissa

Intervallitodennäköisyyksiä voi käyttää riskien priorisointiin järjestelmissä, joissa yhteisviat ovat mahdollisia. Koska myös betafaktorimallin β-parametriin liittyy epävarmuutta, tarkastellaan tätäkin intervalliarvoisena, ja tämä intervalli määritetään luvussa 3.2 esitetyllä tavalla. Dominanssirelaatiot määritetään edelleenkin yhtälön (18) osoittamalla tavalla, mutta nyt huipputapahtuman ehdollisten todennäköisyyksien approksimaatiot ovat muuttuneet. Yhtälöstä (17) saadaan huipputapahtuman todennäköisyyden approksimaatio, joka sievenee samalla tavalla kuin yhtälö (19) on saatu muodostettua yhteisviattomassa tilanteessa, eli ne termit, joissa ei esiinny kumpaakaan tarkasteltavista perustapahtumista, supistuvat lausekkeesta pois. Tällöin lauseke, jonka paikkansapitävyyttä tarkastellaan, jotta saataisiin määritellyksi dominanssirelaatio, on

$$\sum_{\substack{i=1\\ w_2\notin C_i\\ w_1\in C_i}}^{N_{Cut1}} \prod_{j\in C_i} p_j + \sum_{\substack{i=1\\ w_2\notin C_i\\ w_1\in C_i}}^{N_{Cut3}} \beta p_j \prod_{\substack{j\in C_i\\ w_j\notin S}} p_j - \sum_{\substack{i=1\\ w_1\notin C_i\\ w_2\in C_i}}^{N_{Cut1}} \prod_{j\in C_i} p_j - \sum_{\substack{i=1\\ w_1\notin C_i\\ w_2\in C_i}}^{N_{Cut3}} \beta p_j \prod_{\substack{j\in C_i\\ w_j\notin S}} p_j \geq 0, \quad \forall \bar{p} \in \mathcal{P}^F. \tag{20}$$

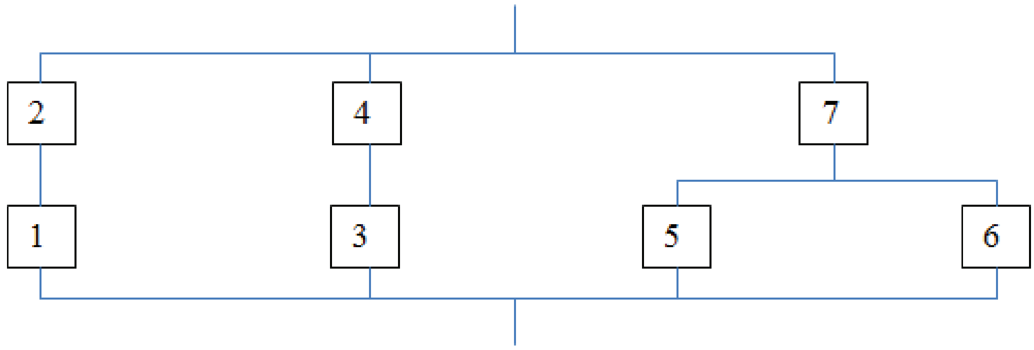
Kun tämä lauseke on totta jokaisella käyvällä todennäköisyydellä ja tämän lisäksi ainakin yhdellä käyvällä todennäköisyydellä epäyhtälömerkin vasemmalla puolella oleva termi on suurempi kuin 0, dominoi perustapahtuma w_1 perustapahtumaa w_2 Fussell-Veselyn riskitärkeysmitan mielessä. Järjestelmissä, joissa yhteisviat eivät ole mahdollisia, tämä lauseke supistuu kaavan (19) muotoon.

3.5. Algoritmi dominanssirelaatioiden määrittämiseksi

Koska β-parametri on myös todennäköisyys joka esitetään intervallina, soveltuu aikaisemmin kehitetty algoritmi dominanssirelaatioiden laskemiseksi silloin, kun komponenttien vikaantumisten todennäköisyydet esitetään intervalleina (Toppila ja Salo, 2012), myös tässä työssä esitetyn menetelmän dominanssirelaatioiden laskemiseen. Algoritmi edellyttää, että tarkasteltava funktio on multilineaarinen. Yhteisvikatilanteissa tarkasteltava funktio ei välttämättä ole multilineaarinen, mutta komponenttien ollessa luotettavia, voidaan olettaa, että yhteisvikojen ollessa mahdollisia, saman yhteisvian komponentit eivät vikaannu samanaikaisesti toisistaan riippumatta. Tämän oletuksen johdosta voidaan tehdä luvussa 2.2 esitetty approksimaatio todennäköisyyksille. Tämän approksimaation avulla tarkasteltavasta funktiosta tulee multilineaarinen. Olen toteuttanut tässä luvussa mainitun algoritmin Mathematicalla ja liitteissä esitetään tämän algoritmin toiminta.

4. Esimerkki ja tulokset

Tarkastellaan 7 komponentin muodostamaa järjestelmä. Kuvassa 1 on esitettynä tähän järjestelmään kuuluvien komponenttien lohkokaavio.



Kuva 1: Esimerkkitapauksen järjestelmä

Tämä järjestelmä toimii silloin, kun sen läpi kulkee ainakin yksi polku, joka koostuu toimivista komponenteista. Vikapuuanalyysin avulla voidaan määrittää järjestelmän minimikatkosjoukot, jotka ovat {1, 3, 5, 6}, {1, 3, 7}, {1, 4, 5, 6}, {1, 4, 7}, {2, 3, 5, 6}, {2, 3, 7}, {2, 4, 5, 6} ja {2, 4, 7}. Yhtälön (13) avulla järjestelmän vikaantumisen todennäköisyydeksi saadaan

$$\mathbb{P}(T) \approx p_1p_3p_5p_6 + p_1p_3p_7 + p_1p_4p_5p_6 + p_1p_4p_7 + p_2p_3p_5p_6 + p_2p_3p_7 + p_2p_4p_5p_6 + p_2p_4p_7.$$

Järjestelmän komponentit ovat identtisiä ja vikaantuvat todennäköisyydellä 0.002. Tällöin järjestelmän vikaantumisen todennäköisyys on $3.2048 * 10^{-8}$, joten järjestelmä on erittäin luotettava.

4.1. Tarkat todennäköisyydet

Komponenttien vikaantumisten todennäköisyyksissä ei ole aluksi epävarmuutta, jonka takia ne voidaan esittää tarkkoina arvoina. Tällöin komponenttien Fussell-Veselyn riskitärkeysmitan arvo lasketaan yhtälön (15) avulla, jolloin esimerkiksi komponentin 5 riskitärkeydeksi saadaan

$$I_{FV}(w_5) = \frac{p_1p_3p_5p_6 + p_1p_4p_5p_6 + p_2p_3p_5p_6 + p_2p_4p_5p_6}{p_1p_3p_5p_6 + p_1p_3p_7 + p_1p_4p_5p_6 + p_1p_4p_7 + p_2p_3p_5p_6 + p_2p_3p_7 + p_2p_4p_5p_6 + p_2p_4p_7}.$$

Lasketaan samalla tavalla Fussell-Veselyn riskitärkeysmitan arvot muillekin komponenteille. Nämä ovat lueteltuna taulukossa 2. Tutkitaan seuraavaksi tilannetta, jossa komponentit 5 ja 6 voivat vikaantua yhteisvian takia. Luvussa 2.2 esitetyn approksimaation avulla komponenttien 5 ja 6 samanaikaisen vikaantumisen todennäköisyys on βp_5. Betafaktorimallin oletusten johdosta $p_5 = p_6$. Komponenttien vikaantumisten todennäköisyydet ovat erittäin pieniä, joten tämä approksimaatio on mahdollinen. Tällöin komponentin 5 riskitärkeydeksi Fussell-Veselyn riskitärkeysmitan suhteen saadaan

$$I_{FV}(w_5) = \frac{p_1p_3\beta p_5 + p_1p_4\beta p_5 + p_2p_3\beta p_5 + p_2p_4\beta p_5}{p_1p_3\beta p_5 + p_1p_3p_7 + p_1p_4\beta p_5 + p_1p_4p_7 + p_2p_3\beta p_5 + p_2p_3p_7 + p_2p_4\beta p_5 + p_2p_4p_7}.$$

Vastaavalla tavalla voidaan laskea muidenkin komponenttien riskitärkeydet Fussell-Veselyn riskitärkeysmitan suhteen. Taulukossa 3 on esitettynä myös komponenttien riskitärkeydet tällä tavalla laskettuna silloin kun $\beta = 0.1$ tai $\beta = 0.2$.

Taulukko 3: Komponenttien Fussell-Veselyn riskitärkeysmitan arvot

komponentti	$\beta = 0$	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.2$
1	0.5	0.5	0.5
2	0.5	0.5	0.5
3	0.5	0.5	0.5
4	0.5	0.5	0.5
5	0.002	0.09	0.167
6	0.002	0.09	0.167
7	0.998	0.91	0.833

Tilanteessa, jossa yhteisvikoja ei tapahdu, komponentin 7 riskitärkeys on suurin ja vastaavasti komponenteilla 5 ja 6 on pieni riskitärkeys. Tämä tulos selittynee tarkastelemalla järjestelmän rakennetta. Järjestelmä on kolmen kahden sarjaan kytketyn komponentin rinnankytkentä, jossa yksi komponentti on varmistettu toisella komponentilla. Järjestelmän varmennettu osa on komponenteista 5 ja 6 koostuva osa. Tämän varmennuksen vuoksi komponenttien 5 ja 6 vaikutus koko järjestelmän riskiin on pienempi kuin muilla komponenteilla. Komponentin 7 suuri riskitärkeys selittynee sillä, että järjestelmän vikaantumiseen vaaditaan joko komponentin 7 vikaantuminen tai komponenttien 5 ja 6 samanaikainen vikaantuminen. Koska komponentin 7 vikaantuminen on näistä kahdesta vaihtoehdosta huomattavasti todennäköisempi, suurimmassa osassa järjestelmän vikaantumisista komponentti 7 on vikaantunut.

Jos yhteisvika aiheuttaa osan komponenttien 5 ja 6 vikaantumisista, kasvaa niiden riskitärkeys ja vastaavasti komponentin 7 riskitärkeys vähenee. Muutos on merkittävä. Jos 10 % komponenttien 5 ja 6 vikaantumisista johtuu yhteisestä syystä, niin niiden riskitärkeys on kasvanut huomattavasti. Komponenttien tärkeysjärjestys ei kuitenkaan muutu edes silloin kun $\beta = 0.2$, vaikka myös komponentin 7 riskitärkeys on alentunut merkittävästi. Tämä johtuu siitä, että komponenttien 5 ja 6 merkitys kokonaisriskin kannalta on aluksi pieni.

4.2. Epävarmuus β-parametrissa

Luvussa 3.2 esitettiin, että β-parametrin luottamusväli muodostuu erittäin leveäksi silloin, kun yhteisvioista ei ole monta havaintoa, kuten yleensä ei ole. Tämän vuoksi β-parametriin liittyy paljon epävarmuutta. Tämä ongelma ratkeaa, kun β-parametri esitetään intervallimuodossa. Tässä kappaleessa tarkastellaan riskien priorisointia esimerkkijärjestelmässä silloin, kun β-parametri esitetään intervallimuodossa. β-parametri saa arvonsa väliltä [0.05,0.15], ja jokaisen komponentin vikaantumisen todennäköisyys on edelleenkin 0.002. Riskit priorisoidaan määrittämällä komponenttien väliset dominanssirelaatiot. Tutkittaessa dominoiko komponentti 1 komponenttia 5 Fussell-Veselyn riskitärkeysmitan suhteen, algoritmilla tarkasteltava multilineaarinen funktio on yhtälön (20) mukaan

$$p_1p_3p_7 + p_1p_4p_7 - p_2p_3\beta p_5 - p_2p_4\beta p_5.$$

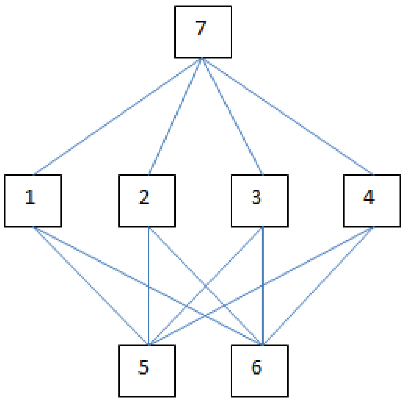
Koska tämä funktio ei ole millään käyvällä todennäköisyydellä negatiivinen, ja ainakin yhdellä suurempi kuin 0, niin komponentti 1 dominoi komponenttia 5. Vastaavalla tavalla voidaan määrittää muidenkin komponenttien väliset dominanssirelaatiot, jotka on esitetty kuvassa 2.

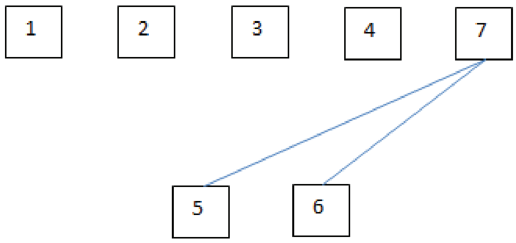
Esimerkkitapauksen järjestelmässä komponentti 7 dominoi jokaista muuta komponenttia Fussell-Veselyn riskitärkeysmitan suhteen, ja tämän lisäksi komponentit 1, 2, 3 ja 4 dominoivat komponentteja 5 ja 6. Tämä tulos on yhdenmukainen taulukon 3 tulosten kanssa, sillä niissäkin komponentin 7 riskitärkeys oli aina suurin ja komponenteilla 5 ja 6 pienin. Itse asiassa jokaisella mahdollisella β-parametrin arvolla komponenttien tärkeysjärjestys on tämä. β-

parametrin arvon lähestyessä maksimiaan 1 komponenttien 5 ja 6 riskitärkeys lähestyy arvoa 0.5 kuten myös komponentin 7.

4.3. Epävarmuus komponenttien vikaantumisten todennäköisyyksissä

Myös komponenttien vikaantumisten todennäköisyyksien luottamusvälit saattavat olla leveitä, jos niiden vikaantumisista ei ole riittävän montaa havaintoa, kuten käytännössä ei useinkaan ole. Tämän vuoksi myös komponenttien vikaantumisien todennäköisyyksissä on usein epävarmuutta, joten niidenkin esittäminen intervallimuodossa on perusteltua. Tässä kappaleessa tutkitaan esimerkkitapauksen järjestelmän riskien priorisointia silloin, kun komponenttien vikaantumisten todennäköisyydet ovat välillä [0.001,0.003]. Komponenttien väliset dominanssirelaatiot määritetään tarkastelemalla samoja funktioita kuin edellisessäkin kappaleessa, ja ne ovat esitettyinä kuvassa 2.





Kuva 2. Järjestelmän dominanssirelaatiot kun β-parametri on intervalli [0.05,0.15]. Vasemmalla olevassa kaaviossa komponenttien vikaantumisten todennäköisyydet ovat 0.002 ja oikealla olevassa kaaviossa intervalli [0.001,0.003]

Tässä tilanteessa dominanssirelaatiot ovat muuttuneet siten, että komponentti 7 dominoi enää komponentteja 5 ja 6. Muita dominanssirelaatioita järjestelmässä ei ole. Kun komponenttien vikaantumisten todennäköisyys on jotakin väliltä [0.001,0.003] sen sijaan että ne olisivat 0.002, komponentti 7 ei dominoikaan enää komponentteja 1, 2, 3 ja 4, jotka eivät enää dominoi komponentteja 5 ja 6.

Epävarmuus komponenttien vikaantumisten todennäköisyyksissä poistaa dominanssirelaatioita. Emme enää tiedä varmuudella useiden komponenttien osalta, onko kyseinen komponentti tärkeämpi järjestelmän luotettavuuden kannalta kuin jokin toinen komponentti vai ei.

Työssä tarkasteltiin myös β-parametrin suuruuden vaikutusta dominanssirelaatioihin. Kun sen intervallin yläraja ylittää arvon 1/3, järjestelmässä ei ole ainuttakaan dominanssirelaatiota. Vastaavasti intervallin ylärajan alittaessa arvon 1/9 järjestelmän dominanssirelaatiot ovat kuten kuvan 2 vasemmalla puolella olevassa kaaviossa.

5. Yhteenveto ja pohdinnat

Teknisten järjestelmien riskien priorisointi on tärkeätä. Yhteisviat vaikuttavat järjestelmän luotettavuuteen ja riskien priorisointiin. Työn tulosten perusteella varsinkin betafaktorimallin β-parametriin liittyy usein erittäin paljon epävarmuutta, sillä yhteisvioista tarvittaisiin monta havaintoa, jotta β-parametrin luottamusväli ei olisi leveä. Havaintoja on kuitenkin usein saatavilla vain rajallinen määrä. Lisäksi myös komponenttien vikaantumisista ei aina ole riittävästi havaintoja, jotta niidenkään todennäköisyyksiin ei liittyisi epävarmuutta. Tässä kandidaatintyössä esitetyn menetelmän avulla teknisen järjestelmän riskien priorisointi on mahdollista epävarmoilla todennäköisyyksillä silloin, kun yhteisviat ovat mahdollisia. Menetelmä ei anna yhtä tiettyä numeerista arvoa komponenttien riskitärkeyksille, vaan se järjestää komponentit tärkeysjärjestykseen dominanssirelaatioiden avulla etsien ne komponentit, jotka ovat varmasti tärkeämpiä kuin toiset.

Työssä esitelty menetelmä riskien priorisointia varten pohjautui aiemmin esitettyyn menetelmään (Toppila ja Salo, 2012), jolla voidaan määrittää komponenttien väliset dominanssirelaatiot silloin, kun niiden vikaantumisten todennäköisyyksissä on epävarmuutta. Liitteissä esitetään Mathematicalla toteutetun algoritmin (Toppila ja Salo, 2012) toimintaperuste, jota voi käyttää työkaluna dominanssirelaatioiden laskemisessa. Koska β-parametri on myös todennäköisyys, joka esitetään menetelmässä intervallina, voi tätä työkalua käyttää myös tässä työssä esitetyn menetelmän dominanssirelaatioiden laskemiseksi. Algoritmin avulla voidaan tarkastella vain multilineaarisia funktioita ja yhteisvikatilanteissa tarkasteltavassa funktiossa saattaa esiintyä β-parametrista korkeammankin asteen termejä. Tilanteissa, joissa komponenttien vikaantumisen todennäköisyys on pieni, luvussa 2.2 esitetyn approksimaation avulla tarkasteltavasta lausekkeesta tulee multilineaarinen.

Työssä esitettyä menetelmää sovellettiin työtä varten luotuun esimerkkijärjestelmään. Järjestelmässä oli aluksi yksi osa, joka oli merkityksetön järjestelmän kokonaisriskin kannalta. Kun järjestelmään lisättiin mahdollinen yhteisvika tähän osaan ja epävarmuutta todennäköisyyksiin, ei enää tiedetä varmuudella, ovatko eräät toiset komponentit tärkeämpiä kokonaisriskin kannalta kuin nämä merkityksettömän osan komponentit vai ei. Menetelmän tapa tarkastella epävarmuutta tuottaakin tällaisia tuloksia. Jos jokin komponentti on tarkoilla todennäköisyyksillä tärkeämpi kuin jokin toinen komponentti, ei intervallitodennäköisyyksien käyttäminen koskaan muuta tilannetta siten, että tämä komponentti olisikin vähemmän tärkeä kuin se toinen. Joko se on edelleenkin tärkeämpi tai sitten näiden välisestä tärkeysjärjestyksestä ei voida varmuudella sanoa mitään. Yhteisvikojen mahdollisuus saattaa luonnollisestikin muuttaa merkittävästi komponenttien välistä tärkeysjärjestystä. Esimerkkitapauksessa näin ei kuitenkaan käy järjestelmän rakenteen vuoksi.

Tässä kandidaatintyössä esitetty menetelmä soveltuu teknisen järjestelmän luotettavuuden kannalta tärkeimpien osien etsimiseen ja siten järjestelmän riskien priorisointiin silloin, kun järjestelmässä esiintyy yhteisvikoja ja järjestelmän komponenttien vikaantumisten todennäköisyyksissä on epävarmuutta. Menetelmä tosin tällaisenaan edellyttää, että järjestelmän komponentit ovat luotettavia. Epäluotettavia komponentteja sisältävien järjestelmien dominanssirelaatioiden laskeminen ei onnistu tässä kandidaatintyössä esitetyllä algoritmilla. Tässä kandidaatintyössä esitetty menetelmä tarvitsee jonkin toisen työkalun dominanssirelaatioiden laskemiseksi, jotta riskien priorisointi olisi mahdollista järjestelmien sisältäessä myös epäluotettavia komponentteja.

Viitteet

[1] Toppila, A., Salo, A. (2012), Prioritizing failure events in fault tree analysis using interval-valued probability estimates, Proceedings of the International Conference on Probabilistic Safety Assessment and Management & Annual European Safety and Reliability Conference, Helsinki, Finland 25 – 29/6/2012

[2] Modarres, M. (2006) Risk Analysis in Engineering: Techniques, Tools and Trends, CRC Press: 75 – 81; 353

[3] Fussell, J. (1975) How to hand calculate system reliability and safety characteristics, IEEE Transaction on Reliability, 24 (3): 169-174

[4] Ericson, C.A. (1999) Fault tree analysis – a history, Proceedings of the International System Safety Conference, Orlando, FL, USA, 16 – 21/8/1999

[5] Reiczigel, J. (2003) Confidence intervals for the binomial parameter: some new considerations, Statistics in Medicine, 22 (4): 611 – 621

[6] Agresti, A., Coull, B.A. (1998) Approximate is better than "Exact" for interval estimation of binomial proportions, The American Statistician 52, (2): 119 – 126

[7] Sterne, T.E. (1954), Some remarks on confidence or fiducial limits, Biometrika, 41 (1-2): 275 – 278

[8] Laneve, C., Lascu, T., Sordoni, V. (2010) The interval analysis of multilinear expressions, Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 267 (2): 43 – 53

[9] Goble, W.M. (2003), Estimating the common cause beta factor, viitattu 31/10/2012, saatavilla Internetistä osoitteesta http://www.exida.com/articles/Estimatingthebetafactor1.pdf

Liitteet

Jotta koko järjestelmän dominanssirelaatiot voidaan määrittää, niin jokaisen mahdollisen kahdesta perustapahtumasta muodostetun parin välinen dominanssirelaatio täytyy, yhteisvikojen mahdollisuudesta, lausekkeen määrittää tutkimalla riippuen kaavojen (19) tai (20) epäyhtälömerkin vasemmalla puolella olevan funktion positiivisuutta. Tässä työssä tarkasteltavat funktiot ovat multilineaarisia. Funktio on multilineaarinen silloin, kun jokainen sen sisältämistä muuttujista on erikseen lineaarinen, eli mikään muuttuja ei ole toista tai suurempaa astetta, joten multilineaariset funktiot voi esittää muodossa

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{S \subseteq \{1,2,\dots,n\}} c_S \prod_{i \in S} x_i, \tag{21}$$

jossa $c_S \in \mathbb{R}$. Multilineaarisilla funktioilla voi olla lokaali ääriarvo vain silloin, kun funktio on vakio (Laneve ym. 2010). Tästä seuraa se, että tarkasteltaessa multilineaarista funktiota $f(x_1, \dots, x_n)$ hyperkuutiossa $H = [a_i, b_i] \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ funktion suurin ja pienin arvo löytyvät hyperkuution kulmapisteistä. Tämän vuoksi dominanssirelaatioita määritettäessä riittää tarkastella joko yhtälön (19) tai (20) saamia arvoja käypien todennäköisyyksien muodostaman hyperkuution kulmapisteissä. Jos minkään kulmapisteen arvo ei ole negatiivinen, ja ainakin yhden kulmapisteen arvo on suurempi kuin 0, niin perustapahtumien välillä on dominanssirelaatio. Näiden funktioiden arvo kulmapisteissä määritetään Branch-and-Bound-algoritmia käyttäen, jossa haaroitus tapahtuu asettamalla jokaisen todennäköisyyden arvo vuorollaan niiden ala- ja ylärajalla. Jos tarkasteltava funktio on ollut aluksi muotoa $f(p_1, \dots, p_n)$, niin haaroitus johtaa kahteen multilineaariseen funktioon $f\left(p_1, \dots, \underline{p_i}, \dots, p_n\right)$ ja $f(p_1, \dots, \bar{p}_i, \dots, p_n)$, jossa $\underline{p_i}$ on i:nnen komponentin vikaantumisen todennäköisyyden alaraja ja $\bar{p}_i$ yläraja. Äärellisellä määrällä perustapahtumia tämä algoritmi voidaan keskeyttää äärellisen määrän haaroituksia jälkeen.

Jokaisen kulmapisteen arvioiminen ei ole välttämättä tarpeellista, minkä johdosta jokaista haaroitusta ei tarvitse välttämättä tehdä. Tämä johtuu siitä, että multilineaarinen funktio voidaan esittää yhtälön (21) tavalla summana, jolloin nämä termit voidaan järjestää siten, että tarkasteltava funktio esitetään muodossa

$$f(p) = c_\phi + f^+(p) + f^-(p), \tag{22}$$

jossa c_ϕ on funktion vakiotermit, $f^+(p)$ sisältää ne funktion termit, joiden kertoimet ovat positiivisia, ja $f^-(p)$ sisältää ne funktion termit, joiden kertoimet ovat negatiivisia. Tämän avulla voidaan määrittää alaraja funktion arvolle

$$f(p)_{min} = c_\phi + f^+\left(\underline{p}\right) + f^-(\overline{p}), \tag{23}$$

jossa $\underline{p}$ on todennäköisyysintervallin alarajavektori ja $\overline{p}$ ylärajavektori. Vastaavasti voidaan määrittää myös yläraja funktion arvolle

$$f(p)_{max} = c_\phi + f^+(\overline{p}) + f^-\left(\underline{p}\right). \tag{24}$$

Jos yhtälö (23) ei anna negatiivista tulosta, niin tarkasteltava funktio ei ole negatiivinen, jolloin Branch-and-Bound-algoritmin voi keskeyttää, sillä tästä voidaan päätellä, että tarkasteltava funktio ei ole negatiivinen. Algoritmin voi keskeyttää myös silloin, kun yhtälö (24) antaa negatiivisen tuloksen. Tällöin voidaan päätellä, että funktio ei ole positiivinen.

Haaroitusten määrää voi algoritmissa myös rajoittaa, kun esitetään tarkasteltava multilineaarinen funktio muodossa

$$f(p) = g_f^{+i} p_i + g_f^{-i}, \tag{25}$$

jossa g_f^{+i} sisältää kaikki ne termit, joissa on p_i, joka on nyt otettu yhteiseksi tekijäksi, ja g_f^{-i} sisältää kaikki loput termit. Tarkastellaan seuraavaksi multilineaarista funktiota g_f^{+i}. Jos se ei ole negatiivinen, niin todennäköisyys p_i asetetaan alarajalleen ja jos se on negatiivinen, niin todennäköisyys p_i asetetaan ylärajalleen. Tämän jälkeen algoritmi ajetaan uudelleen muokatulle funktiolle, ja näin toimitaan niin monta kertaa, kunnes algoritmi voidaan keskeyttää kaavojen (23) ja (24) avulla muodostettujen ehtojen mukaan.