

Asiantuntija-arvioiden ristiriitojen käsittely ristivaikutusanalyysissä

Tomas Toro

Perustieteiden korkeakoulu

Kandidaatintyö
Espoo 23.9.2022

Vastuupettaja

Prof. Ahti Salo

Työn ohjaaja

DI Juho Roponen



**Aalto-yliopisto
Perustieteiden
korkeakoulu**

Copyright © 2022 Tomas Toro

The document can be stored and made available to the public on the open internet pages of Aalto University.
All other rights are reserved.

Tekijä Tomas Toro

Työn nimi Asiantuntija-arvioiden ristiriitojen käsittely ristivaikutusanalyysissä

Koulutusohjelma Teknistieteellinen kandidaattiohjelma

Pääaine Matematiikka ja systeemitieteet **Pääaineen koodi** SCI3029

Vastuupettaja Prof. Ahti Salo

Työn ohjaaja DI Juho Roponen

Päivämäärä 23.9.2022 **Sivumäärä** 18+2 **Kieli** Suomi

Tiivistelmä

Ristivaikutusanalyysi on ennakoitimenetelmä, jossa tarkastellaan tapahtumien välisen riippuvuuksien vaikutuksia tuleviin tapahtumiin. Tapahtumien todennäköisyydet yhdessä tapahtumien välisen riippuvuuksien kanssa saadaan asiantuntija-arvioista. Asiantuntijoilla ei välttämättä ole matemaattista taustaa, jolloin arviot voivat olla ristiriidassa todennäköisyyslaskennan periaatteiden kanssa.

Työn tavoitteena on muokata asiantuntijoiden arvioimia ristivaikutuksia siten, että niillä on mahdollista tehdä todennäköisyyslaskentaa. Pyritään kuitenkin pysymään mahdollisimman johdonmukaisena asiantuntija-arvioiden kanssa eli minimoimaan tehtävät muutokset. Ongelma ratkaistaan lineaarisesti rajoitetulla pienimmän neliösumman menetelmällä.

Tutkimusaineistona käytetään asiantuntijoiden arvioita 3D-tulostuksen vaikutuksista Suomen Puolustusvoimiin. Asiantuntija-arviot saadaan muutettua todennäköisyyslaskentaan soveltuviksi.

Avainsanat Ristivaikutusanalyysi, pienimmän neliösumman menetelmä, asiantuntija-arvio

Author Tomas Toro

Title Handling contradictions of expert judgements in cross-impact analysis

Degree programme Bachelor's Programme in Science and Technology

Major Mathematics and Systems Sciences

Code of major SCI3029

Teacher in charge Prof. Ahti Salo

Advisor MSc Juho Roponen

Date 23.9.2022

Number of pages 18+2

Language Finnish

Abstract

Cross-impact analysis is a foresight method which considers the impact of dependencies between events on future events. The probabilities of the events with the dependencies between them are obtained as expert judgements. The experts do not necessarily have a mathematical background, and thus the elicited judgements may contradict the principles of probability theory.

The goal in this thesis is to adjust the expert judgements so that it is possible to calculate probabilities from them. However, we will try to remain as consistent as possible with the expert judgements, i.e., by minimizing the adjustments. We solve the problem with the linearly constrained least squares method.

The research data used is expert judgements about the impacts of the development of 3D-printing to the Finnish Defence Forces. The expert judgements are successfully adjusted to be suitable for probability calculations.

Keywords Cross-impact analysis, the method of least squares, expert judgement

Sisällys

Tiivistelmä	3
Tiivistelmä (englanniksi)	4
Sisällys	5
1 Johdanto	6
2 Aikaisempi tutkimus	6
3 Menetelmät	7
3.1 Ristivaikutusanalyysin periaatteet	7
3.2 Pienimmän neliösumman menetelmä lineaarisilla rajoitteilla	8
3.3 Uusien ristivaikutuskertoimien ratkaiseminen	9
4 Aineisto ja tulokset	12
4.1 3D-tulostuksen kehityksen vaikutukset Suomen Puolustusvoimiin	12
4.2 Tulokset	13
5 Yhteenveto	16
A Matlab-funktio	19

1 Johdanto

Ristivaikutusanalyysiä käytetään tulevaisuuden ennakkointiin. Menetelmä pohjautuu yksittäisten epävarmuustekijöiden tilojen todennäköisyyksiin sekä useiden epävarmuustekijöiden keskinäisiin riippuvuuksiin. Epävarmuustekijällä tarkoitetaan tapahtumaa, jonka tulevaisuuden tilaa ei tiedetä. Ristivaikutusanalyysissä käsitellään useimmiten 10-40 epävarmuustekijää ([Gordon, 1994](#)). Epävarmuustekijöiden todennäköisyydet ja niiden väliset riippuvuudet saadaan asiantuntijoiden antamina arvioina. Asiantuntija-arviot voivat koskea myös suoraan ehdollisia todennäköisyyksiä ristivaikutusten sijaan ([Turoff, 1971](#)). Arvioiden avulla voidaan tutkia myös sellaisia systeemejä, joista on saatavilla tietoa vain rajoitetusti, mikä mahdollistaa ristivaikutusanalyysin käytön useilla eri aloilla ([Weimer-Jehle, 2006](#)).

Tässä työssä käsitellään asiantuntija-arvioiden aiheuttamia matemaattisia ristiriitoja. Asiantuntijoilla tarkoitetaan tutkittavan alan osajia, joten heillä ei välttämättä ole matemaattista taustaa, jolloin arviot eivät välttämättä ole matemaattisesti johdonmukaisia. Työn tavoitteena on mahdollistaa asiantuntija-arvioiden pohjalta tehtävä todennäköisyyslaskenta. Motivaationa tähän on se, että skenaarioiden todennäköisyyksiä laskettaessa on tulosten uskottavuuden kannalta välttämätöntä, että annetut todennäköisyydet seuraavat todennäköisyysteorian sääntöjä. Asiantuntija-arvioiden korjaaminen jälkeenpäin tekee arviointiprosessista kevyemmän, koska silloin asiantuntijoiden ei tarvitse huolehtia arvioiden matemaattisesta tarkkuudesta.

Arvioiden muuttamisessa haasteena on niiden säätäminen mahdollisimman johdonmukaisesti, koska suurten muutosten tekemistä halutaan välttää. On myös mahdollista laskea jo arvioita tehdessä niiden vaikutuksia muihin epävarmuustekijöihin siten, että arvioista ei synny matemaattisia ristiriitoja. Aikaisemmat työt aiheesta ovat keskittyneet useammin arviointiprosessin parantamiseen kuin jälkeenpäin tehtäviin korjauksiin, kuten [Salo ja Bunn \(1995\)](#).

2 Aikaisempi tutkimus

Ristivaikutusanalyysi on 1960-luvulla kehitetty ennakkointimenetelmä ([Gordon ja Hayward, 1968](#)). Menetelmän kehittämisen motivaationa oli selvittää, voiko tulevia tapahtumia ennakoida yksittäisten tapahtumien välisten riippuvuuksien perusteella ([Gordon ja Stover, 2003](#)). Ristivaikutuksella tarkoitetaan sitä, miten tietyn epävarmuustekijän lopputuleman todennäköisyys muuttuu, kun tiedetään jonkun toisen epävarmuustekijän lopputulema ([Salo et al., 2021](#)).

[Gordon ja Hayward \(1968\)](#) esittivät asiantuntija-arvioiden keräämiseen käytettäväksi Delfoi-metodia. Delfoi-metodi voidaan jakaa neljään vaiheeseen. Ensimmäisessä vaiheessa keskustellaan aiheesta ja keskustelun osapuolet voivat halutessaan nostaa esille heidän mielestään ongelman kannalta tärkeitä tekijöitä. Toisessa vaiheessa pyritään löytämään yhteisymmärrys ongelmasta, ja jos ilmenee merkittäviä erimielisyyksiä, niitä puidaan tarkemmin kolmannessa vaiheessa. Viimeisessä vaiheessa arvioidaan kaikki aikaisemmin kerätty tieto. Delfoi metodissa suositellaan käytettävän mahdollisimman montaa asiantuntijaa ja löytämään yhteisymmärrys näiden

kesken. (Linstone et al., 1975)

Salo et al. (2021) esittävät ristivaikutuskertoimelle todennäköisyyksien suhteellisiin muutoksiin pohjautuvan määritelmän ja tavan käyttää ristivaikutusanalyysiä riskienhallintaan. Roponen ja Salo (2022) esittävät laskennallisesti tehokkaan menetelmän, jolla voidaan arvioida nopeasti skenaarioita asiantuntijoiden arvioidessa todennäköisyyksiä. Skenaarioilla tarkoitetaan epävarmuustekijöiden lopputulemien kombinaatioita. Tässä työssä kehitetään Salo et al. (2021) esitetyn ristivaikutuskertoimen määritelmän ja Roponen ja Salo (2022) esitetyn ristivaikutusanalyysimenetelmän kanssa yhteensopivia menetelmiä.

Asiantuntija-arvioiden aiheuttamia matemaattisia epä johdonmukaisuuksia on pyritty usein mieluummin ennaltaehkäisemään kuin korjaamaan jälkeinpäin. Ennaltaehkäisemistä on tehty kysymällä asiantuntijoilta parempia kysymyksiä tai ottamalla huomioon jo arvioita tehdessä arvioiden vaikutukset kaikkiin tapahtumiin (Gordon, 1994). On myös esitetty lähestymistapoja, joissa asiantuntija antaa arviolle vain ylä- ja alarajan. Näitä ylä- ja alarajaa sekä aikaisemmin arvioituja todennäköisyyksiä käytetään rajoitteina uuden arvion laskemiseen (Salo ja Bunn, 1995). Asiantuntija-arvioiden jälkeinpäin korjaamiseen on esitetty Monte Carlo -menetelmään ja differenssiyhtälöihin perustuvia lähestymistapoja (Mphahlele et al., 2011).

Vastauksena ristivaikutusanalyysiä kohtaan esitettyyn kritiikkiin sen matemaattisesta vaativuudesta Wolfgang Weimer-Jehle julkaisi Cross-Impact Balance -analyysin (CIB-analyysi) vuonna 2006. Muita laskennallisesti kevyempiä menetelmiä ovat esimerkiksi MICMAC (Godet, 1994) ja johdonmukaisuus-analyysi (Consistency analysis) (Seeve ja Vilkkumaa, 2022). CIB-analyysissä valitaan tietty skenaario, eli epävarmuustekijöiden tilojen yhdistelmä, ja lasketaan näitä vastaavien ristivaikutusarvioiden summat kaikille epävarmuustekijöille. Tästä saadaan jokaiselle skenaariolle niin kutsutut impact balancet, jotka kertovat tietyn skenaarion yhteisvaikutuksen epävarmuustekijään. Tämä vähentää laskentaa huomattavasti varsinkin systeemeissä, jotka sisältävät suuren määrän epävarmuustekijöitä. (Weimer-Jehle, 2006)

3 Menetelmät

3.1 Ristivaikutusanalyysin periaatteet

Tässä työssä käsiteltävä ristivaikutusanalyysi pohjautuu Roponen ja Salo (2022) esittämään ristivaikutusanalyysimenetelmään. Tässä menetelmässä asiantuntija-arviot koskevat yksittäisten tapahtumien marginaalitodennäköisyyksiä sekä tapahtumien välisiä ristivaikutuksia, jotka arvioidaan asteikolla $-3, \dots, 3$. Marginaalitodennäköisyydet ovat epävarmuustekijöiden vaihtoehtoisten tulemien todennäköisyyksiä ja ne arvioidaan huomioimatta muiden tapahtumien vaikutuksia. Ristivaikutuskerroin C_{kl}^{ij} saadaan asiantuntija-arvioista kaavalla

$$C_{kl}^{ij} = 2^{0.5 \cdot V_{kl}^{ij}}, \quad (1)$$

missä V_{kl}^{ij} on asiantuntijan arvio ristivaikutuksesta. Ristivaikutuskertoimelle käytetään Salo et al. (2021) esittämää määritelmää

$$C_{kl}^{ij} := \frac{p_{k|l}^{i|j}}{p_k^i}, \quad (2)$$

missä p_k^i on i :nnen epävarmuustekijän lopputuleman k todennäköisyys ja $p_{k|l}^{i|j}$ on i :nnen epävarmuustekijän lopputuleman k todennäköisyys sillä ehdolla, että j :nnen epävarmuustekijän lopputulema on l . Epävarmuustekijällä tarkoitetaan tapahtumaa, jonka tulevaisuuden tilaa ei tiedetä. Epävarmuustekijöiden mahdollisia tiloja kutsutaan sen lopputulemiksi.

Ristivaikutusmatriisi on matriisi, jonka rivit ja sarakkeet vastaavat epävarmuustekijöitä ja matriisin alkiot epävarmuustekijöiden välisiä ristivaikutuksia. Koska ehdollisille todennäköisyyksille pätee

$$p_{k|l}^{i|j} = \frac{p_{l|k}^j p_k^i}{p_l^j}, \quad (3)$$

ristivaikutusmatriisi on symmetrinen kaavojen 2 ja 3 pohjalta saatavien yhtälöiden

$$C_{kl}^{ij} = \frac{p_{k|l}^{i|j}}{p_k^i} = \frac{p_{l|k}^j p_k^i}{p_l^j p_k^i} = \frac{p_{l|k}^j}{p_l^j} = C_{lk}^{ji} \quad (4)$$

perusteella.

Kaavan 2 mukaisen määritelmän perusteella alle yhden suuruinen ristivaikutuskerroin tarkoittaa, että j :nnen epävarmuustekijän lopputulema l tekee i :nnen epävarmuustekijän lopputulemasta k epätodennäköisempää, eli $p_k^i > p_{k|l}^{i|j}$ ja vastaa-vasti yli yhden suuruinen, että $p_{k|l}^{i|j} > p_k^i$ eli i :nnen epävarmuustekijän lopputulema k on todennäköisempi, jos j :nnen epävarmuustekijän lopputulema on l .

3.2 Pienimmän neliösumman menetelmä lineaarisilla rajoitteilla

Pienimmän neliösumman menetelmällä voidaan approksimoida yhtälön ratkaisuja sovittamalla käyriä dataan. Tässä työssä käytetään lineaarista pienimmän neliösumman menetelmää lineaarisilla rajoitteilla. Linearisessa tapauksessa sovitettava käyrä on suora.

Pienimmän neliösumman menetelmä antaa yhtälölle aina ratkaisun ja ratkaisu on mahdollisimman lähellä alkuperäisiä arvioita. Optimointiin vaaditaan myös lineaarisia rajoitteita, jotta marginaalitodennäköisyydet pysyvät muuttumattomina. Menetelmä ratkaisee yhtälöstä $Cx = d$ x :n siten, että Cx on mahdollisimman lähellä d :tä ja rajoite $Ax = b$ toteutuu. Cx :n oleminen mahdollisimman lähellä d :tä tarkoittaa, että etäisyys $\|d - Cx\|$ minimoituu eli Cx :n ja d :n välinen etäisyys on mahdollisimman pieni. Normin $\|d - Cx\|$ voi kirjoittaa myös muodossa $\sum_{i=1}^n (d_i - Cx_i)^2$.

Menetelmän käyttö tässä työssä perustuu siihen, että muutettujen ja alkuperäisten ristivaikutuskertoimien välinen etäisyys $\|d - Cx\|$ halutaan minimoida mahdollisimman lähelle nollaa. Ideaalitulanteessa siis yhtälö $Cx = d$ toteutuisi. Rajoite $Ax = b$ kuitenkin antaa x :lle tietyt rajat, jolloin yhtälöä $Cx = d$ täytyy approksimoida näiden rajojen puitteissa.

Pienimmän neliösumman menetelmä on paras approksimointimenetelmä silloin, kun datan poikkeamat sovitettavasta suorasta ovat lähes normaalijakautuneita eli huomattavan suuri osa poikkeamista on pieniä (Theil, 1971). Tässä työssä oletetaan, että tämä ehto toteutuu. Menetelmässä tehtävä erotusten neliöön korottaminen tekee menetelmästä herkemman poikkeamille datassa, koska suuret poikkeamat siirtävät koko sovitettavaa suoraa poikkeaman suuntaan. Jos yhtälö $Cx = d$ on ratkaistavissa, menetelmä antaa ratkaisun, joka on myös yhtälön $Cx = d$ ratkaisu.

Vaihtoehtoinen menetelmä yhtälöiden ratkaisemiseen on esimerkiksi Least Absolute Deviations (LAD), joka ei ole niin herkkä suurille poikkeamille datassa kuin pienimmän neliösumman menetelmä. LAD:issa minimoidaan erotusten itseisarvot niiden neliöiden sijaan. Pienimmän neliösumman menetelmässä etuna LAD:iin on se, että neliöiden kanssa tehtävä laskenta on helpompaa kuin itseisarvojen. Muita etuja ovat pienimmän neliösumman menetelmän usein muita menetelmiä vähemmän vaatima laskentateho ja se, että menetelmä antaa vain yhden parhaan ratkaisun toisin kuin esimerkiksi LAD. (Chen et al., 2008)

3.3 Uusien ristivaikutuskertoimien ratkaiseminen

Taulukko 1: Esimerkki kahden epävarmuustekijän välisistä ehdollisista todennäköisyyksistä alkuperäisillä arvoilla laskettuna.

		Tuotannon laajuus Suomessa			
		Hidastuu	Pysyy samana	Nopeutuu	Summa
Tuotannon laajuus maailmalla	Hidastuu	0.60	0.35	0.07	1.02
	Pysyy samana	0.21	1.00	0.14	1.35
	Nopeutuu	0.11	0.35	0.40	0.86

Alkuperäisillä asiantuntija-arvioilla lasketut ehdolliset todennäköisyydet eivät lähes minkään epävarmuustekijäparin kohdalla summautuneet yhteen ja useassa tapauksessa esiintyi jopa yli 1 suuruisia mahdottomia ehdollisia todennäköisyyksiä. Taulukossa 1 on laskettu ehdolliset todennäköisyydet yhtälön 2 perusteella saadulla kaavalla $p_{k|l}^{ij} = C_{kl}^{ij} p_k^i$ tuotannon laajuudelle Suomessa, kun tiedetään tuotannon laajuus maailmalla. Taulukon epävarmuustekijät ovat työssä käytettävästä aineistosta ja ne liittyvät 3D-tulostuksen vaikutuksiin Suomen Puolustusvoimiin. Oikeanpuoleisin sarake näyttää rivien summat, joiden tulisi olla suuruudeltaan 1, koska epävarmuustekijöiden tilat on oletettu kattaviksi ja toisensa poissulkeviksi.

Koska tapahtumien yksittäiset todennäköisyydet arvioidaan huomioimatta muita tapahtumia, niiden arvioimisen oletetaan tässä työssä olevan helpompaa kuin ristivaikutusten arviointi. Tällöin yksittäisten epävarmuustekijöiden lopputulemien

todennäköisyyksiä voidaan pitää jo valmiiksi käyttökelpoisina ja niiden säätämistä vähemmän mielekkäänä kuin arvioitujen ristivaikutusten. Tästä syystä työssä päädyttiin jättämään todennäköisyysarviot alkuperäisiksi ja muokkaamaan vain ristivaikutuskertoimia.

Ongelman ratkaisemiseksi kirjoitettiin Matlab-funktio, joka ottaa argumentteina kahden toisistaan riippuvan tapahtuman todennäköisyydet ja näiden väliset ristivaikutuskertoimet. Matlab-funktion koodi on liitteessä A.

Todennäköisyys p_{kl}^{ij} , eli todennäköisyys, että i :nnen epävarmuustekijän tila on k ja j :nnen epävarmuustekijän tila on l , kun epävarmuustekijät i ja j ovat toisistaan riippuvia, on

$$p_{kl}^{ij} = p_k^i p_l^j |^i. \quad (5)$$

Yhtälö 5 voidaan kirjoittaa myös yleisemmin todennäköisyyslaskennassa käytettävällä notaatiolla $P(x_i = s_k^i \text{ ja } x_j = s_l^j) = P(x_i = s_k^i)P(x_j = s_l^j | x_i = s_k^i)$, missä x_i ja x_j ovat epävarmuustekijöitä kuvaavia satunnaismuuttujia ja s_k^i ja s_l^j niiden lopputulemia. $p_{l|k}^j$ ja vastaavasti $P(x_j = s_l^j | x_i = s_k^i)$ tarkoittavat todennäköisyyttä, että j :nnen epävarmuustekijän tila on l sillä ehdolla, että i :nnen tila on k .

Funktio laskee ensiksi tapahtumien välisen yhteisjakauman yhtälöiden 4 ja 5 perusteella saadun kaavan

$$p_{kl}^{ij} = p_k^i p_l^j C_{kl}^{ij} \quad (6)$$

mukaisesti. Koska tapahtumapareista yksi ja vain yksi tapahtuu, eli epävarmuustekijöiden i ja j yhdet lopputulemat toteutuvat, tulisi kaavan 6 lasketun yhteisjakauman alkioden summan olla 1, mistä saadaan rajoite

$$\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n p_{kl}^{ij} = 1, \quad (7)$$

missä m on i :nnen epävarmuustekijän lopputulemien lukumäärä ja vastaavasti n j :nnen. Asiantuntija-arvioihin perustuvilla arvoilla näin ei kuitenkaan ole toisistaan riippuvien epävarmuustekijöiden välillä, kuten nähdään taulukosta 2, jossa alkioden summa on 1.1560. Taulukon arvot on laskettu kaavalla 6.

Taulukko 2: Esimerkki kahden epävarmuustekijän välisestä yhteisjakaumasta alkupe-
räisillä arvoilla laskettuna.

		Tuotannon laajuus Suomessa		
		Hidastuu	Pysyy samana	Nopeutuu
Tuotannon laajuus maailmalla	Hidastuu	0.1800	0.1061	0.0212
	Pysyy samana	0.1061	0.5000	0.0707
	Nopeutuu	0.0212	0.0707	0.0800

Marginaalitodennäköisyydet pidetään muuttumattomina pakottamalla yhteisjakauman rivit ja sarakkeet summautumaan niitä vastaaviin marginaalitodennäköisyyksiin eli yksittäisten tapahtumien erillisiin todennäköisyyksiin. Nämä rajoitteet voidaan kirjoittaa muotoon:

$$\sum_{k=1}^m p_{kl}^{ij} = p_l^j, \quad \forall l \in \{1, \dots, n\} \quad (8)$$

ja

$$\sum_{l=1}^n p_{kl}^{ij} = p_k^i, \forall k \in \{1, \dots, m\}. \quad (9)$$

Rajoitteet pakottavat yhteisjakauman summan yhteen, koska tapahtumien tilojen marginaalitodennäköisyydet summautuvat yhteen. Näin ollen rajoite 7 sisältyy rajoitteisiin 8 ja 9.

Optimoinnin tavoitefunktioiksi saadaan yhtälön 6 perusteella

$$\min. \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \left(C_{kl}^{ij} - C_{kl}^{ij} x_{k,l} \right)^2, \quad (10)$$

missä $\bar{x} = [x_{1,1}, \dots, x_{1,n}, \dots, x_{m,n}]^T$ on ratkaistavat kertoimet. Minimoidaan siis ratkaistavien ja alkuperäisten ristivaikutuskertoimien välisiä etäisyyksiä.

Käytettävän aineiston kaikilla epävarmuustekijöillä on tasan 3 lopputulemaa, joten tässä $\bar{p}^{ij} = [p_{11}, p_{12}, \dots, p_{33}]$ ja $\bar{x} = [x_{1,1}, \dots, x_{3,3}]^T$. Optimointirajoitteet saadaan yhtälöistä 8 ja 9 ja ne voidaan esittää matriisimuodossa

$$\begin{bmatrix} p_{11}^{ij} & 0 & 0 & p_{21}^{ij} & 0 & 0 & p_{31}^{ij} & 0 & 0 \\ 0 & p_{12}^{ij} & 0 & 0 & p_{22}^{ij} & 0 & 0 & p_{32}^{ij} & 0 \\ 0 & 0 & p_{13}^{ij} & 0 & 0 & p_{23}^{ij} & 0 & 0 & p_{33}^{ij} \\ p_{11}^{ij} & p_{12}^{ij} & p_{13}^{ij} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{21}^{ij} & p_{22}^{ij} & p_{23}^{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{31}^{ij} & p_{32}^{ij} & p_{33}^{ij} \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} p_1^j \\ p_2^j \\ p_3^j \\ p_1^i \\ p_2^i \\ p_3^i \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Koska ristivaikutuskertoimet ovat ei-negatiivisia, tarvitaan rajoitteeksi vielä

$$x_q \geq 0, \forall q \in \{1, \dots, 9\}. \quad (12)$$

Tavoitefunktio 10 optimoidaan rajoitteilla 11 ja 12 ja ratkaistujen kertoimien \bar{x} avulla saadaan uusi matemaattisesti validi yhteisjakauma:

$$p_{kl}^{ij*} = \begin{bmatrix} x_1 p_{11}^{ij} & x_2 p_{12}^{ij} & x_3 p_{13}^{ij} \\ x_4 p_{21}^{ij} & x_5 p_{22}^{ij} & x_6 p_{23}^{ij} \\ x_7 p_{31}^{ij} & x_8 p_{32}^{ij} & x_9 p_{33}^{ij} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Matriisiin 13 perusteella saadaan laskettua ehdollinen todennäköisyysjakauma, koska yhtälön 5 perusteella

$$p_{l|k}^{j|i} = \frac{p_{kl}^{ij}}{p_k^i}. \quad (14)$$

Tässä matriisin alkiot jaetaan yksitellen niitä vastaavilla todennäköisyyksillä. Tämä kaavalla 14 yhteisjakaumasta 13 laskettu ehdollinen todennäköisyysjakauma on myös matemaattisesti validi eli sen rivit summautuvat yhteen. Korjatut ristivaikutuskertoimet saadaan kertomalla alkuperäinen kerroin sitä vastaavalla yhteisjakauman 13 kertoimella x_q , missä $q \in \{1, \dots, 9\}$. Korjatut ristivaikutuskertoimet ovat siis

$$C_{kl}^{ij*} = \begin{bmatrix} x_1 C_{11}^{ij} & x_2 C_{12}^{ij} & x_3 C_{13}^{ij} \\ x_4 C_{21}^{ij} & x_5 C_{22}^{ij} & x_6 C_{23}^{ij} \\ x_7 C_{31}^{ij} & x_8 C_{32}^{ij} & x_9 C_{33}^{ij} \end{bmatrix}.$$

4 Aineisto ja tulokset

4.1 3D-tulostuksen kehityksen vaikutukset Suomen Puolustusvoimiin

Työssä käytetty aineisto on kerätty tutkimuksessa [Roponen ja Salo \(2022\)](#) esitettyä tapaustutkimusta varten. Se sisältää asiantuntija-arvioita epävarmuustekijöiden lopputulemien todennäköisyyksistä ja niiden välisistä ristivaikutuksista. Aineiston aiheena on 3D-tulostuksen kehityksen vaikutukset Suomen Puolustusvoimiin.

Asiantuntija-arvioita määritettäessä ristivaikutukset arvioitiin -3 ja 3 välillä kiinnittämättä huomiota ristiriitaisuuksiin. Asiantuntijoita pyydettiin antamaan kyseiseltä väliltä luku, joka kuvaa sitä, miten tietyn epävarmuustekijän lopputuleman todennäköisyys muuttuu, kun tiedetään jonkun toisen epävarmuustekijän lopputulema. Asteikossa negatiiviset luvut tarkoittavat, että tietyn epävarmuustekijän lopputuleman todennäköisyys pienenee, kun tiedetään jonkun toisen epävarmuustekijän lopputulema ja vastaavasti positiiviset, että todennäköisyys suurenee. 0 tarkoittaa, että toisen tapahtuman lopputulema ei vaikuta tämän lopputuleman todennäköisyyteen.

Taulukko 3: Asiantuntijoiden arvioimat epävarmuustekijät.

Epävarmuustekijä	Lopputulema	Todennäköisyys
Tuotannon laajuus maailmalla	Hidastuu	0.3
	Pysyy samana	0.5
	Nopeutuu	0.2
Tuotannon laajuus Suomessa	Hidastuu	0.3
	Pysyy samana	0.5
	Nopeutuu	0.2
Tekniikan kehittyminen: kustannukset	Korkeintaan puolittuvat	0.5
	Korkeintaan putoavat kymmenesosaan	0.4
	Putoavat alle kymmenesosaan	0.1
Tekniikan kehittyminen: nopeus	Korkeintaan kaksinkertaistuu	0.4
	Korkeintaan kymmenkertaistuu	0.5
	Yli kymmenkertaistuu	0.1
Vuosittain valmistuvien asiantuntijoiden määrä	Alle 100 (nykytila)	0.2
	Alle 300	0.6
	Yli 300	0.2
Lainsäädäntö Suomessa	Rajoittaa voimakkaasti	0.05
	Ei eroa muusta teollisuudesta	0.9
	Ei sääntelyä	0.05
Tulostusprosessien ja mallien standardointi	Ei standardointia	0.35
	Sisältää tekniset vaatimukset	0.45
	Täysi automatisaatio mahdollinen	0.2
Käytön yleisyys Puolustusvoimissa	Vain yksittäisiä tuotteita	0.1
	Vakiintunut käyttö ja tilauksiin prosessit	0.5
	Voi nostaa kapasiteettia tarvittaessa	0.4
Puolustusvoimien 3D-mallit	Vain yksittäisiä	0.2
	Mallit osana uusia hankintoja	0.7
	Mallit suurimmalle osalle systeemeistä	0.1
3D-tulostus rauhan aikana	Vähäinen merkitys	0.7
	Tärkeää ja suunniteltua	0.29
	Kriittistä ja hyvin kontrolloitua	0.01
Kapasiteetin käyttö Puolustusvoimissa kriisiaikana	Vähäinen merkitys	0.45
	Tärkeää ja suunniteltua	0.45
	Kriittistä ja hyvin kontrolloitua	0.1

Asiantuntija-arviot käsittelevät 11:tä epävarmuustekijää, joista jokaisella on kolme mahdollista lopputulemaa, jotka ovat näkyvillä taulukossa 3. Nämä epävarmuustekijät mahdollisten lopputulemiensa kanssa muodostavat 33×33 symmetrisen ristivaikutusmatriisin, joista yhden epävarmuustekijäparin välinen matriisi on näkyvillä taulukossa 4. Matriisi koostuu epävarmuustekijäparien välisistä 3×3 matriiseista.

Taulukko 4: Esimerkki kahden epävarmuustekijän välisistä ristivaikutusarvioista.

		Tuotannon laajuus Suomessa			
			Hidastuu	Pysyy samana	Nopeutuu
			0.3	0.5	0.2
Tuotannon laajuus maailmalla	Hidastuu	0.3	2	-1	-3
	Pysyy samana	0.5	-1	2	-1
	Nopeutuu	0.2	-3	-1	2

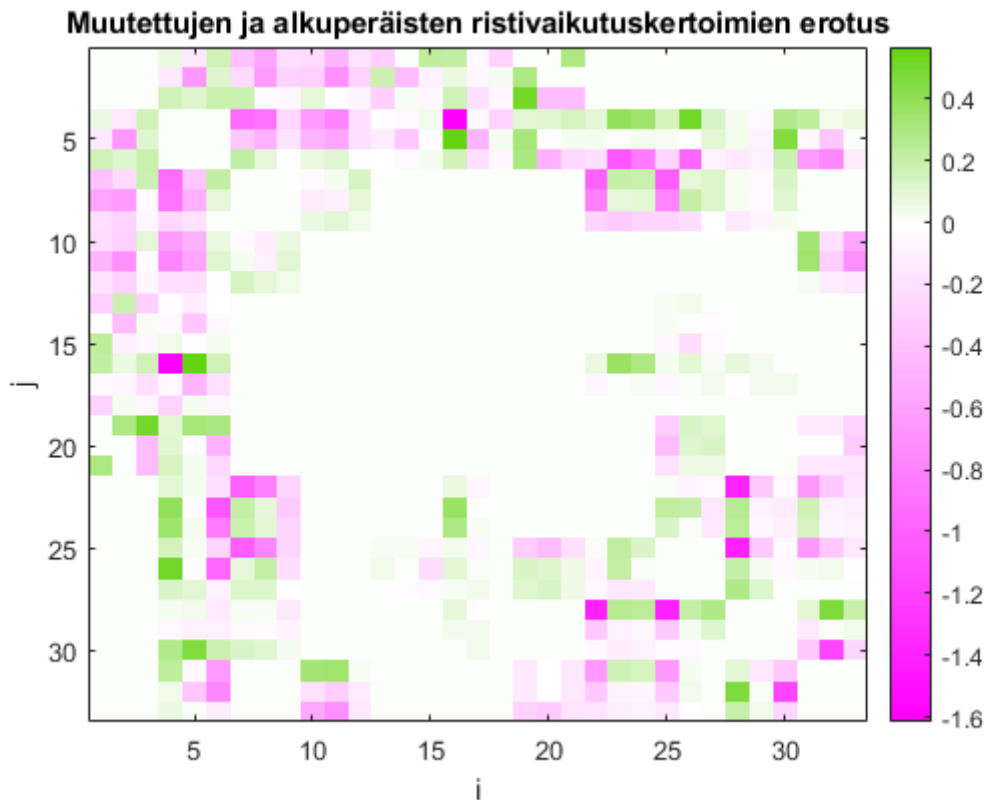
Taulukosta 4 näkyy esimerkiksi, että jos tuotannon laajuus maailmalla hidastuu, niin tuotannon laajuus Suomessa pysyy samana alhaisemmalla todennäköisyydellä kuin ennen tuotannon hidastumista maailmalla. Taulukon 4 arviot kaavalla 1 muutettuna ristivaikutuskertoimiksi ovat näkyvillä taulukossa 5. Määritelmän 2 mukaisesti todennäköisyys, että tuotannon laajuus Suomessa pysyy samana sillä ehdolla, että tuotannon laajuus maailmalla hidastuu on $0.7071 \cdot P(\text{Tuotannon laajuus Suomessa} = \text{Pysyy samana}) = 0.7071 \cdot 0.50 \approx 0.35$. Edellä esitetty ehdollinen todennäköisyys on tosin vain suuntaa antava, koska jos lasketaan samalla tavalla koko rivin ehdolliset todennäköisyydet, niin ne eivät summaudu yhteen.

Taulukko 5: Esimerkki kahden epävarmuustekijän välisistä ristivaikutuskertoimista.

		Tuotannon laajuus Suomessa			
			Hidastuu	Pysyy samana	Nopeutuu
			0.3	0.5	0.2
Tuotannon laajuus maailmalla	Hidastuu	0.3	2	0.7071	0.3536
	Pysyy samana	0.5	0.7071	2	0.7071
	Nopeutuu	0.2	0.3536	0.7071	2

4.2 Tulokset

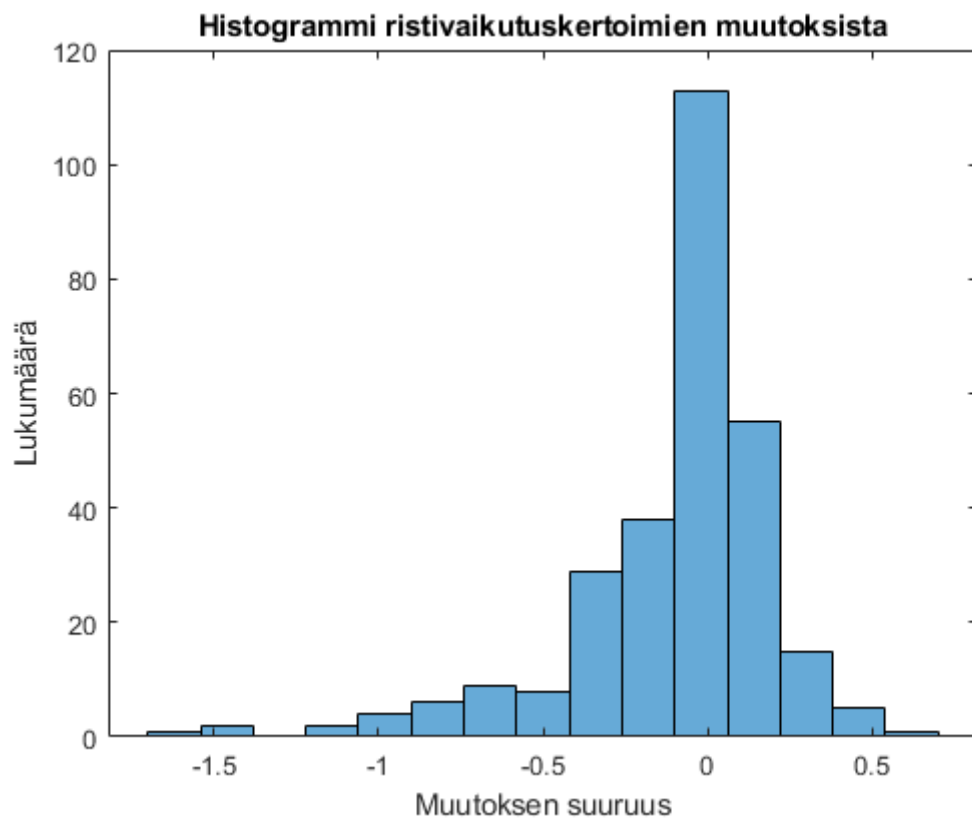
Kuvassa 1 näkyy 33×33 matriisi muutettujen ja alkuperäisten asiantuntija-arvioiden pohjalta laskettujen ristivaikutuskertoimien erotuksista. Kuvan yksi neliö vastaa yhtä ristivaikutuskerrointa. Kuvassa näkyvän väriasteikon mukaisesti vaaleammat värit kuvassa tarkoittavat pienempää ja tummemmat suurempaa muutosta sekä violetin sävyt negatiivista ja vihreän positiivista muutosta. Vihreä väri tarkoittaa siis, että ristivaikutuskerroin on kasvanut optimoinnin seurauksena ja violetti, että se on pienentynyt. Matriisin valkoiset alueet ovat pääosin alkuperäisiltä ristivaikutusarvioilta ollut nollaa eli niihin ei ole tehty korjauksia. Muutamassa kohdassa on selkeästi tummempia ruutuja, mikä viittaa siihen, että lineaarista yhtälöä ratkaistaessa arvoa on



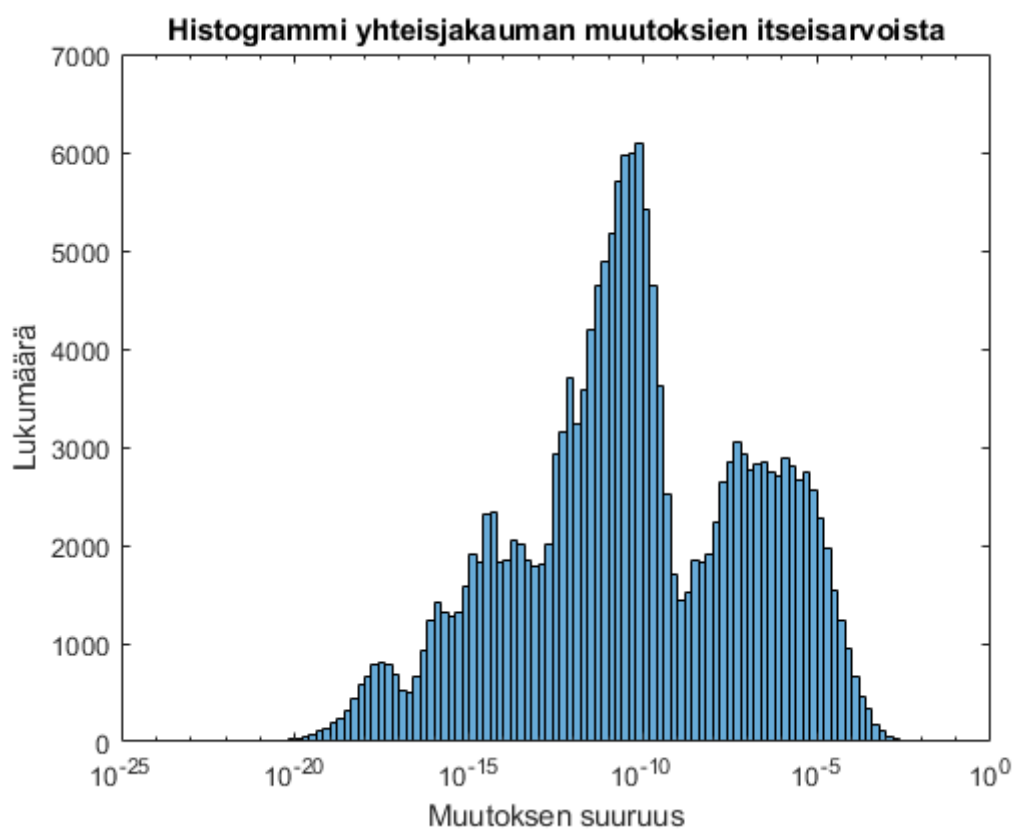
Kuva 1: Matriisi muutettujen ja alkuperäisten ristivaikutuskertoimien erotuksesta.

jouduttu muuttamaan paljon. Väriasteikosta näkyy, että tehdyt muutokset ovat noin välillä $[-1.6, 0.6]$. Kuvassa on helposti näkyvillä matriisin symmetrisyys valkoisten 3×3 matriisien muodostaman diagonaalin suhteen.

Kuvassa 2 näkyy, että valtaosa muutoksista on -0.5 ja 0.5 välillä. Muutosten itseisarvojen keskiarvo on 0.2061 . Myös se on huomattavissa histogrammista, että tehdyistä muutoksista itseisarvoltaan suurimmat ovat negatiivisia, eli yksittäisiä kertoimia on pienennetty huomattavasti. Tätä voi selittää epänegatiivisuusrajoitteella, koska tapauksissa, joissa yhteisjakauman summa on ollut alun perin suurempaa kuin 1 ja alkuperäisistä ristivaikutuskertoimista valtaosa on ollut pieniä, on suurempia kertoimia jouduttu pienentämään paljon suhteessa muihin. Histogrammi on kuitenkin lähellä symmetristä lukuunottamatta muutamia suuria pienennyksiä. Kuvasta myös näkyy jo aiemmin mainittu väli $[-1.6, 0.6]$, jolle muutokset sijoittuvat. Kuvissa 1 ja 2 on käytetty muutettujen ja alkuperäisten ristivaikutuskertoimien erotuksia eikä niiden välistä suhdetta, koska osa käsitellyistä todennäköisyyksistä on hyvin pieniä, jolloin suhteellinen muutos voi olla todella suuri, vaikka arvo ei ole muuttunut merkittävästi.



Kuva 2: Histogrammi muutettujen ja alkuperäisten ristivaikutuskertoimien erotuksista.



Kuva 3: Histogrammi muutetuilla ja alkuperäisillä arvoilla laskettujen yhteisjakautamien erotuksen itseisarvoista.

Se, että tehty muutos on alle 0.5 suuruinen ei kuitenkaan kerro muutoksen merkityksellisyydestä paljoakaan, koska esimerkiksi 0.5 suuruinen muutos $2/3$ arvoiselle ristivaikutuskertoimelle tarkoittaisi sen suurentumista yli yhteen, koska $2/3 + 1/2 = 7/6 > 1$, eli ristivaikutuskertoimen vaikutussuunta kääntyy. Määritelmän 2 mukaisesti yhden suuruinen ristivaikutuskerroin tarkoittaa tapahtumien riippumattomuutta ja yhden eri puolilla ovat negatiivinen ja positiivinen riippuvuus, jolloin puolen vaihtaminen ei ole toivottavaa. Täten voi olla, että joissakin kohdissa on muuttunut ristivaikutuskerroin siten, että riippuvuus on kääntynyt päinvastaiseksi. Esimerkiksi juuri $2/3$ suuruinen ristivaikutuskerroin on muutettu $7/6$ suuruiseksi ja kertoimen vaikutussuunta on kääntynyt negatiivisesta positiiviseksi.

Työssä tarkasteltiin myös miten ristivaikutuskertoimien muutokset vaikuttavat kaikkien epävarmuustekijöiden yhteisjakaumaan, eli kaikkien epävarmuustekijöiden tilojen kombinaatioiden todennäköisyyksiin. Yhteisjakauma lasketaan [Roponen ja Salo \(2022\)](#) esitetyllä menetelmällä, jossa yhteisjakaumaa lähdetään rakentamaan yhdestä epävarmuustekijästä ja lisätään uusia epävarmuustekijöitä yksi kerrallaan. Epävarmuustekijää lisättäessä sille lasketaan tämän hetkisen yhteisjakauman skenaarioiden määrittelemät ehdolliset todennäköisyydet ja niiden perusteella päivitetään yhteisjakauma sisältämään myös uuden epävarmuustekijän. ([Roponen ja Salo, 2022](#))

Epävarmuustekijöiden tilojen kombinaatioita on $3^{11} = 177147$ kappaletta. Kuvasa 3 on histogrammi muutetuilla arvoilla lasketun yhteisjakauman ja alkuperäisen yhteisjakauman erotuksen itseisarvoista. Nämä muutokset ovat suurilta osin hyvin pieniä, koska useat tilojen yhdistelmien todennäköisyydet ovat jo valmiiksi todella pieniä, eli skenaariot ovat käytännössä mahdottomia. Itseisarvoltaan yli 0.001 suuruisia muutoksia on 123 ja yli 0.01 suuruisia muutoksia 3 kappaletta. Yhteisjakauma on siis hyvin samankaltainen alkuperäisillä ja muutetuilla arvoilla laskettuna, joten ristivaikutuskertoimien muuttaminen kaikkien epävarmuustekijöiden yhteisjakauman laskemista varten ei välttämättä ole kannattavaa.

5 Yhteenveto

Työssä käsitellään ristivaikutusanalyysissä usein esiintyviä matemaattisia ristiriitoja. Ristiriitoja voi syntyä, koska arvioita tekevillä asiantuntijoilla ei välttämättä ole matemaattista taustaa ja siksi arviot voivat olla ristiriidassa todennäköisyyslaskennan peruseräkkeiden kanssa. Työn tavoitteena oli korjata ristivaikutusarviot soveltuviksi todennäköisyyslaskentaan ratkaisemalla pienimmän neliösumman menetelmällä asiantuntija-arvioihin pohjautuvat uudet ristivaikutuskertoimet.

Ristivaikutuskertoimet saatiin muokattua lineaarisesti rajoitetulla pienimmän neliösumman menetelmällä todennäköisyyslaskentaan soveltuviksi, eli niiden pohjalta lasketut ehdolliset todennäköisyydet sekä yhteisjakaumat ovat matemaattisesti valideja. Osaa kertoimista jouduttiin muuttamaan merkittävästi, mikä tarkoittaa, että pahimmassa tapauksessa ristivaikutuksen vaikutussuunta on voinut muuttua päinvastaiseksi, eli ristivaikutuskerrointa on muutettu alle yhdestä yli yhteen tai vastaavasti yli yhdestä alle yhteen. Valtaosa tehdyistä muutoksista oli kuitenkin pieniä ja johdonmukaisia asiantuntija-arvioiden kanssa.

Optimointirajoitteet eivät ota huomioon ristivaikutuskertoimen vaikutussuunnan kääntymistä yhden kohdalla vaan ne kuvaavat pelkästään muutoksen suuruutta. Vaikutussuunnan kääntymistä ei kuitenkaan voi aina estää, sillä jos kaikki ristivaikutuskertoimet ovat suurempaa kuin 1, jotakin niistä on pakko pienentää alle yhteen tai muuttaa kaikki kertoimet yhteen. Tätä voisi välttää esimerkiksi asettamalla painokertoimia vaikutussuunnan kääntäville muutoksille. Siten muutosten suuruudet minimoituvat, mutta muutosten merkittävyys ei välttämättä ole pienimmillään. Tehdyt muutokset eivät myöskään jakaudu tasaisesti kertoimien kesken, vaan osaa on muutettu huomattavasti enemmän kuin toisia.

Työssä ei käsitellä asiantuntija-arvioiden määrittämisprosessia. Arviointiprosessi on merkittävä tekijä arvioiden laadun kannalta, koska arviointiprosessit voivat erota toisistaan huomattavasti, mikä vaikuttaa lopullisiin arvioihin paljon. Prosessiin ei voitu ottaa kantaa, koska käytettiin vain yhtä aineistoa eli käsiteltiin vain yhdenlaista arviointiprosessia. Kehitettyä menetelmää voisi käyttää apuna arvioiden keräämisprosessissa, koska asiantuntijoille voisi nopeasti näyttää miltä heidän arvioidensa pohjalta ratkaistut ristiriidattomat ristivaikutusarviot näyttäisivät.

Aihetta voisi viedä pidemmälle esimerkiksi tutkimalla erilaisten arviointiprosessien kuormittavuutta asiantuntijoille ja niiden tuottamien arvioiden välistä riippuvuutta ja löytää tämän perusteella erilaisiin tarkoituksiin optimaalisia prosesseja. Arvioiden matemaattisen oikeaoppisuuden tärkeys voi vaihdella eri yhteyksissä, joten optimaalisen arviointiprosessin määrittäminen voi olla hankalaa.

Viitteet

- Kani Chen, Zhiliang Ying, Hong Zhang, ja Lincheng Zhao. Analysis of least absolute deviation. *Biometrika*, 95(1):107–122, 2008.
- Michel Godet. *From Anticipation to Action: a Handbook of Strategic Prospective*. UNESCO publishing, 1994.
- Theodore J Gordon. *Cross-Impact Method*, volume 4. American Council for the United Nations University, 1994.
- Theodore J Gordon ja Howard Hayward. Initial experiments with the cross impact matrix method of forecasting. *Futures*, 1(2):100–116, 1968.
- Theodore J Gordon ja John Stover. Cross-impact analysis. *Futures Research Methodology*, 2:1–19, 2003.
- Harold A Linstone, Murray Turoff, et al. *The Delphi method*. Addison-Wesley Reading, MA, 1975.
- Maredi I Mphahlele, Oludayo O Olugbara, Sunday O Ojo, ja Derrick G Kourie. Cross-impact analysis experimentation using two techniques to revise marginal probabilities of interdependent events. *ORiON*, 27(1):1–15, 2011.

- Juho Roponen ja Ahti Salo. Scenario probability estimation using cross-impact assessments. 2022. Unpublished manuscript.
- Ahti Salo, Edoardo Tosoni, Juho Roponen, ja Derek W Bunn. Using cross-impact analysis for probabilistic risk assessment. *Futures & Foresight Science*, page e2103, 2021.
- Ahti A Salo ja Derek W Bunn. Decomposition in the assessment of judgmental probability forecasts. *Technological Forecasting and Social Change*, 49(1):13–25, 1995.
- Teemu Seeve ja Eeva Vilkkumaa. Identifying and visualizing a diverse set of plausible scenarios for strategic planning. *European Journal of Operational Research*, 298(2):596–610, 2022.
- Henri Theil. *Principles of econometrics*. Wiley, 1971.
- Murray Turoff. An alternative approach to cross impact analysis. *Technological Forecasting and Social Change*, 3:309–339, 1971.
- Wolfgang Weimer-Jehle. Cross-impact balances: A system-theoretical approach to cross-impact analysis. *Technological Forecasting and Social Change*, 73(4):334–361, 2006.

A Matlab-funktio

```

1 function [opt_condpd, opt_ci] = opt_crossimpact2(ci,p1, p2)
2
3
4 %Tapahtumien valinen yhteisjakauma
5 yht=p1*p2.*ci;
6
7 %Tavoitefunktio, jossa minimoidaan alkuperaisten ja muutettujen
8 %ristivaikutuskertoimien valinen etaisyyys.
9 C=[ci(1,1), zeros(1,8);0,ci(1,2), zeros(1,7);0,0,ci(1,3), zeros(1,6);...
10     0,0,0,ci(2,1), zeros(1,5);0,0,0,0,ci(2,2),0,0,0,0;zeros(1,5),...
11     ci(2,3),0,0,0;zeros(1,6),ci(3,1),0,0;zeros(1,7),ci(3,2),0;...
12     zeros(1,8),ci(3,3)];
13 d=[ci(1,:),ci(2,:),ci(3,:)]';
14
15 %Aeq ja beq sisältävät rajoitteet sille, etta yhteisjakauman rivit ja
16 %sarakkeet summautuvat marginaalitodennakoisyyksiin, eli
17 %marginaalitodennakoisyydet pysyvät muuttumattomina.
18 Aeq=[yht(1,:), zeros(1,6);zeros(1,3),yht(2,:), zeros(1,3);...
19     zeros(1,6),yht(3,:);yht(1,1),0,0,yht(2,1),0,0,yht(3,1),0,0;...
20     0,yht(1,2),0,0,yht(2,2),0,0,yht(3,2),0;0,0,yht(1,3),0,0,...
21     yht(2,3),0,0,yht(3,3)];
22 beq=[p1(1);p1(2);p1(3);p2(1);p2(2);p2(3)];
23
24 x=lsqlin(C,d,[],[],Aeq,beq,zeros(3,3),[]);
25 xmat=[x(1:3)';x(4:6)';x(7:9)'];
26
27 %Muodostetaan ratkaistujen kertoimien avulla uusi yhteisjakauma,
28 %ehdollinen todennakoisyyssjakauma ja uudet ristivaikutuskertoimet.
29 opt_yht=xmat.*yht;
30
31 opt_condpd=opt_yht./p1;
32
33 opt_ci=xmat.*ci;
34 end

```