

Asuntolainan korkokaton arvonmääritys Black-Derman-Toy -korkomallilla

Paavo Vesterinen

Perustieteiden korkeakoulu

Kandidaatintyö
Espoo 31.05.2024

Vastuupettaja

Prof. Ahti Salo

Työn ohjaaja

DI Leevi Olander

Copyright © 2024 Paavo Vesterinen

The document can be stored and made available to the public on the open internet pages of Aalto University.
All other rights are reserved.

Tekijä Paavo Vesterinen

Työn nimi Asuntolainan korkokaton arvonmääritys Black-Derman-Toy
-korkomallilla

Koulutusohjelma Teknistieteellinen kandidaattiohjelma

Pääaine Matematiikka ja systeemitieteet

Pääaineen koodi SCI3029

Vastuupettaja Prof. Ahti Salo

Työn ohjaaja DI Leevi Olander

Päivämäärä 31.05.2024

Sivumäärä 28+1

Kieli Suomi

Tiivistelmä

Asuntolainan kustannuksiin vaikuttavat muun muassa lainattava summa, lainaajan pituus ja korko. Korkotason vaihtelun varalle pankit tarjoavat korkokattoa. Tämä kandidaatintyö käsittelee korkokattojen vertailua Black-Derman-Toy (BDT)-korkomallia hyödyntäen.

Korkokatto suojaa lainanottajaa kustannusten nousulta. Se asettaa vaihtuvakorkeisen lainan viitekorolle enimmäisarvon. Vastineeksi korkokaton ottaja maksaa korvauksen esimerkiksi lisämarginaalina lainanlyhennyksen yhteydessä. Tässä työssä käsitellään neljää korkokattovaihtoehtoa, joissa suojaustasot ja kestot ovat 5% + 14 vuotta, 5% + 7 vuotta, 4% + 14 vuotta ja 4% + 7 vuotta.

BDT -korkomalli on binomihilamalli, joka kuvaa korkojen kehitystä diskreetisti ajassa siten, että siirryttäessä periodista seuraavaan on korolla kaksi mahdollista seuraavaa arvoa. Hila-arvojen muutos riippuu koron volatilitteetista, jolle saadaan estimaatti korkojen historiallisesta kehityksestä. BDT-malli olettaa korkojen logaritmiarvon olevan normaali jakautunut satunnaismuuttuja, mikä rajaa mallin tuottamien korkojen olemaan positiivisia. Toinen oletus on arbitraasivapaus, mikä edellyttää että hilassa diskontatulla velkakirjalla on sama arvo kuin markkinoilla myydylä vastaavalla velkakirjalla.

Edellä mainituilla reunaehdoilla kalibroidaan Black-Derman-Toy binomihila. Volatilitteettiparametri estimoidaan laskemalla historiallisesta korkodatasta liukuva 12 kuukauden volatilitteettiestimaatti ja laskemalla sen mediaani ja 90%:n luottamusvälit. Velkakirjojen hinnat saadaan Euroopan keskuspankin tietokannasta.

Työssä kalibroidaan kolme korkohilaa eri volatilitteettiparametreilla. Näiden avulla lasketaan polkukohtaiset korkokaton arvot ja esitetään tulokset histogrammissa. Havaitaan, että lyhyemmät 7 vuoden kestoiset korkokatot eivät luo lainkaan nettosäästöjä matalemmilla volatilitteeteilla. Lainanottajan riskinsietokyvystä riippuen

suositellaan joko $5\% + 14$ vuoden tai $4\% + 14$ vuoden vaihtoehtoja, joista jälkimmäinen on kalliimpi, mutta turvallisempi vaihtoehto.

Avainsanat korkomallinnus, binomihila, Black-Derman-Toy, korkokatto, korkokäyrä, Euribor

Author Paavo Vesterinen

Title Valuation of Mortgage Cap Using the Black-Derman-Toy Interest Rate Model

Degree programme Bachelor's Programme in Science and Technology

Major Mathematics and Systems Sciences**Code of major** SCI3029

Teacher in charge Prof. Ahti Salo

Advisor MSc (Tech) Leevi Olander

Date 31.05.2024**Number of pages** 28+1**Language** Finnish

Abstract

Mortgage costs are influenced by the principal amount, loan term and interest rates among others. To prepare for the fluctuating interest rates banks offer interest rate caps. This candidate thesis compares different interest rate caps using Black-Derman-Toy (BDT) interest rate model

Interest rate cap protects the borrower from sudden increases in costs. Interest rate cap sets a maximum for a variable rate. In exchange, the borrower pays for example an additional marginal along with installments. This thesis considers four interest rate caps with cap rates and durations of 5% + 14 years, 5% + 7 years, 4% + 14 years and 4% + 7 years.

Black-Derman-Toy interest rate model is a binomial lattice model which models the interest rates in a discrete way so that moving from period to the next the interest rate has two possible next values. The change of the values depends on the volatility of the interest rate, which is estimated using historical data. BDT-model assumes that the logarithm of the interest rate follows a normal distribution. This effectively constrains the model to produce only positive interest rates. The model is a non-arbitrage model which requires the interest rates to be consistent with market bond yields.

With the aforementioned conditions, a Black-Derman-Toy binomial lattice is calibrated. The assumption of non-arbitrage implies that a bond priced using the BDT binomial lattice has the same price as the equivalent bond in the markets. The volatility parameter is estimated by calculating the moving 12 month volatility of historical rates and calculating its median and 90% confidence interval.

Three binomial lattices are calibrated corresponding to the three volatility parameters and the corresponding present values for the interest rate caps are calculated accordingly. The present values are presented in a histogram. The results show that for the lower volatility parameters the seven year caps will not create a

positive net present value regardless of the realized interest rates. Depending on the risk appetite of the borrower either the 5% + 14 year or 4% + 14 year cap is recommended the latter being more expensive but safer option.

Keywords interest rate modelling, binomial lattice, Black-Derman-Toy, interest rate cap, yield curve, Euribor

Sisällys

Tiivistelmä	3
Tiivistelmä (englanniksi)	5
Sisällys	7
1 Johdanto	8
2 Aikaisempi tutkimus	9
2.1 Taustaa	9
2.2 Brownin liike	9
2.3 Binomihila	10
3 Menetelmät	11
3.1 Black-Derman-Toy	11
3.1.1 Kalotay-Williams-Fabozzi	12
3.1.2 BDT-mallin sovitus binomihilaan	12
3.2 Kalibrointi	13
3.3 Lainapääoman arvo	15
3.4 Korkokatto	15
3.4.1 Korkokatto välineenä	15
3.4.2 Korkokaton nykyarvo	16
4 Tutkimusaineisto	17
4.1 Korkokäyrä	17
4.2 Esimerkkiasuntolaina	18
4.3 Korkokattovaihtoehdot	18
4.4 Volatileetti	19
4.4.1 Keskihajonta	19
4.4.2 Estimointi	19
5 Tulokset	20
5.1 Vakaa tapaus	21
5.2 Mediaanitapaus	22
5.3 Volatiili tapaus	23
5.4 Herkkyysanalyysi	24
5.5 Johtopäätökset	25

1 Johdanto

Asuntolainaa otettaessa useat seikat vaikuttavat lainan lopulliseen hintaan lainanottajalle. Tärkeimpiä ovat lainattava summa, laina-ajan pituus ja korko. Asuntolainan korko voi olla kiinteä tai se voi vaihdella esimerkiksi keskuspankkien säätelemän viitekoron mukaan. Kun korko vaihtelee, liittyy lainaan riski. Jos korkotaso nousee laina-aikana, voi se nostaa lainanhoitokustannuksia merkittävästi. Pankit tarjoavat riskin varalle erilaisia järjestelyjä, jotka vähentävät koron vaihtelun suuruutta.

Yksi suosituimmista pankkien tarjoamista tuotteista korkotason vaihteluiden varalle on korkokatto. Korkokatto suojaa kuluttajaa asettamalla lainan korolle ennalta sovitun ylärajan, jota kuluttaja enintään maksaa lainastaan. Vastaavasti kuluttaja maksaa pankille sopimuksen mukaisesti korvausta esimerkiksi lainanlyhennyksen ohessa. Viitekoron noustessa voidaan korkokatolla säästää merkittävästi lainanhoitokustannuksissa.

Tämän tutkielman tavoitteena on luoda korkomalli, joka esittää ennusteen tulevaisuuden koroista. Mallina käytetään Fischer Blackin, Emanuel Dermanin ja William Toyn vuonna 1990 julkaisemaa Black-Derman-Toy (BDT) -mallia (Black et al., 1990). Malli luo ennusteen tulevista koroista käyttäen hyväksi markkinoilla myytävien velkakirjojen tuotto-odotuksia sekä korkojen arvioitua volatilitteettiä. Malli luo binomihilan, joka esittää korot ajan myötä laajenevana kokoelmana mahdollisia koron arvoja. Volatilitteetti arvioidaan historiallisesta korkodatasta. Mallin luoman ennusteen mukaan esimerkkilainan korkokatoille määritetään nykyarvot sekä niiden jakauma riippuen koron mallinnetuista toteumista. Tutkimusasetelma rakennetaan pyytämällä suomalaisesta pankista esimerkkilainatarjous ja kokoelma erityyppisiä korkokattovaihtoehtoja. Eri korkokattoja vertaillaan tutkimuksen tulosten perusteella. Korkokattovaihtoehtojen rakenteen vaikutusta niiden tehokkuuteen torjua kustannusten kasvua käsitellään, ja pohditaan syitä tuloksille.

Tutkielma esittelee BDT-mallin teoreettista taustaa ja oletuksia. BDT-mallin kalibrointi näytetään käytännössä. Työssä pohditaan, minkälaiset teoreettiset reunaehdot rajoittavat BDT-mallia ja miten mallia voidaan kehittää.

2 Aikaisempi tutkimus

2.1 Taustaa

Chisholm (2010) esittää, että johdannaismarkkinoiden laajeneminen 1970-luvulla rahoitusinstrumentteihin kuten valuuttoihin ja velkakirjoihin loi edellytykset nykymuotoiseen matemaattiseen korkomallinnukseen. Erityisesti Chicago Board Options Exchangen perustaminen vuonna 1973 loi yhdenmukaiset standardit johdannaiskaupalle. Samana vuonna Black ja Scholes (1973) esittivät mallinsa, joka selittää osakkeen volatilitiitin ja osto-option hinnan välisen yhteyden. Standardisoitu kaupankäynti toi eri tuotteiden hintatiedot saataville, ja uudet matemaattiset työkalut hyödynsivät tätä informaatiota ennustaessaan tulevaa.

Derman (2016) kertoo tässä tutkielmassa käsiteltävän Black-Derman-Toy mallin saaneen alkunsa 1986 Goldman Sachs -pankissa, minkä jälkeen malli julkaistiin suurelle yleisölle 1990 Financial Analyst Journalin artikkelissa. Malli perustuu oletukselle, että korkoa voidaan tarkastella stokastisena prosessina. Korkoa kuvaavalla stokastisella prosessilla on kaksi osaa. Deterministinen osa on tunnettu ja sen arvo riippuu täysin tunnetuista muuttujista. Deterministinen osa voi kuvata esimerkiksi koron trendiä tai tasapainopistettä, jota kohti koron arvo pyrkii. Stokastisen prosessin satunnainen osa kuvaa taloudellisten systeemien epävarmuutta. Satunnaisuutta voidaan matemaattisesti mallintaa niin kutsutulla Brownin liikkeellä.

2.2 Brownin liike

Brownin liike on luonnossa muun muassa hiukkasissa ja nesteissä havaittua satunnaista liikehdintää, jonka Brown (1828) havaitsi ja esittelee ensimmäisenä. Matemaattisessa kontekstissa myös Wienerin prosessiksi kutsuttu liike koostuu infinitesimaalisen pienistä, jatkuvista askeleista, dW , jotka ovat normaalijakautuneet odotusarvolla 0 ja varianssilla dt .

Brownin liike voidaan kuvata stokastisena prosessina W_ϕ , $\phi \geq 0$, jolle Einstein (1905) luo määritelmän seuraavasti:

1. $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$, kun $0 \leq s < t$
2. $W_0 = 0$
3. $W_{t_1} \perp W_{t_2} - W_{t_1} \perp \dots \perp W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$, kaikilla $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k$

Osborne (1959) esittää, että taloudellisten instrumenttien hinnoissa esiintyvää luontaista satunnaisuutta voidaan simuloida Brownin liikkeen avulla. Polkujen hajaantuminen ajan myötä viittaa taloudellisten ennusteiden epävarmuuteen aikahorisontin siirtyessä kauemmas tulevaisuuteen. Toisin sanoen ennusteen epävarmuus kasvaa nykyhetken ja ennusteen välillä olevan aikaeron myötä.

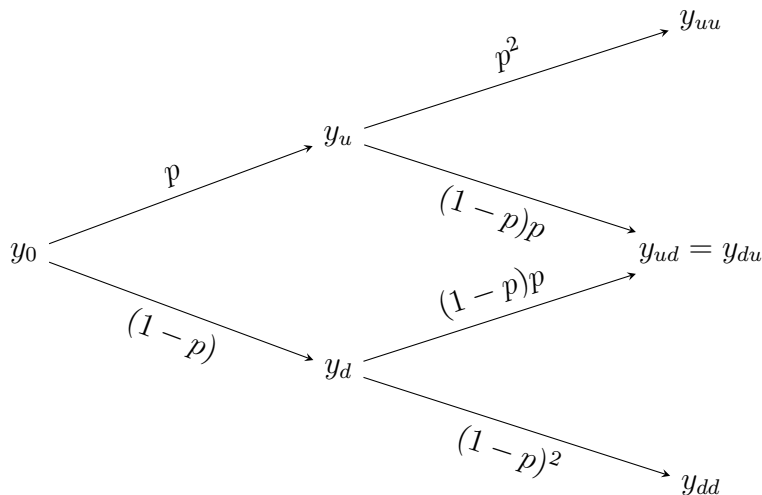
2.3 Binomihila

Eri stokastisia prosesseja voidaan mallintaa yksinkertaisesti binomihilassa. Binomihila esittää esimerkiksi korkojen kehityksen diskreetisti ajassa. Ensimmäinen (nollas) periodi on nykyhetki, jota vastaava arvo y_0 kuvaa vallitsevaa tilannetta. Edettäessä mallissa periodista seuraavaan on kaksi mahdollista seuraavaa arvoa. Esimerkiksi periodissa t voidaan siirtyä $y_t \rightarrow y_u$ todennäköisyydellä p ja $y_t \rightarrow y_d$ todennäköisyydellä $1 - p$. Yksinkertaistettuna y_u ja y_d voidaan tulkita kahtena mahdollisena tapahtumana, joista toinen voi kontekstista riippuen olla toivotumpi kuin toinen.

Hilassa siirtymistä voidaan käsitellä toistokokeena, jolloin hilan tilaa kuvaava satunnaisluku, Y , periodissa $n \in \mathbb{N}$ noudattaa $Y \sim \text{Bin}(n, p)$. Hilatodennäköisyydet saadaan binomijakauman pistetodennäköisyysfunktioista

$$\mathbb{P}(Y = y) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k},$$

jossa k on luku, joka kertoo montako kertaa hilassa täytyy liikkua ylöspäin, jotta päästään solmuun y . Kuvassa 1 esitetään visualisointi kahden periodin binomihilasta.



Kuva 1: Kahden periodin binomihila.

Kuvan 1 hilatodennäköisyydet periodissa 2 ovat täten

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = y_{uu}) &= \binom{2}{2} p^2 (1-p)^0 = p^2, \\ \mathbb{P}(Y = y_{ud}) &= \binom{2}{1} p^1 (1-p)^1 = 2p(1-p), \\ \mathbb{P}(Y = y_{dd}) &= \binom{2}{0} p^0 (1-p)^2 = (1-p)^2.\end{aligned}$$

3 Menetelmät

3.1 Black-Derman-Toy

Black-Derman-Toy-malli (Black et al., 1990) luo binomihilan periodikohtaisille koroille. Malli olettaa korkojen olevan jakautuneet log-normaalisti. BDT-mallinnettu korko, r_t , noudattaa seuraavaa stokastista differentiaaliyhtälöä Buetow et al. (2001)

$$d \ln(r_t) = (\theta_t - \frac{\sigma'_t}{\sigma_t} \ln(r_t)) dt + \sigma_t dW_t,$$

jossa θ_t on tasapainoarvo, jota kohti koron logaritmiarvo lähestyy, $\sigma_t = \sigma(t)$ on koron volatilitiheetti eli koron logaritmin keskihajonta ajanhetkellä t ja σ'_t sen derivaatta ajan suhteen.

Toisaalta korko $r(t)$ voidaan esittää muodossa

$$r(t) = e^{X(t)},$$

jossa $X(t) \sim \mathcal{N}(\mu(t)t, \sigma(t)^2 t)$, noudattaa normaalijakaumaa. Asettamalla

$$r(t) = e^{\mu(t)t + \sigma(t)W(t)},$$

jossa $W(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$ on Brownin liike ja merkitsemällä $U(t) = e^{\mu(t)t}$, prosessi voidaan esittää muodossa

$$r(t) = U(t)e^{\sigma(t)W(t)},$$

jossa $U(t)$ on korkojakauman mediaani ajanhetkellä t .

BDT-malli on niin kutsuttu arbitraasivapaa malli. Björk (2009) esittää arbitraasin tarkoittavan tilannetta, jossa sijoittajalla on mahdollisuus luoda välitön ja riskitön tuotto käyttämällä hyväksi saman hyödykkeen kahta eri hintaa. Jotta arbitraasivapaus täyttyy, mallin mukaisen korkojohdannaisen lasketun odotusarvon on oltava sama kuin kyseisen johdannaisen markkinahinta.

Malli saa syötearvoikseen kaksi parametria: periodikohtaisen volatilitietin korolle sekä eri maturiieitin nollakuponkilainojen vuosittaiset tuottoprosentit. Saadaan korkohila, joka vastaa markkinoiden korkokäyrää ja jonka solmujen väliset erot samassa periodissa määrittyvät kyseisen periodin volatilitiheettiparametrasta.

3.1.1 Kalotay-Williams-Fabozzi

Yksinkertaistuksen takia tässä työssä määritetään yksi volatilitteettiparametri käytämällä historiallista dataa. Kalotay et al. (1993) näyttävät, että kun koron volatilitteettiparametri $\sigma(t)$ arvioidaan vakioksi σ , saadaan erityistapaus

$$d \ln(r) = \theta_t dt + \sigma dW_t.$$

Tätä mallia kutsutaan Kalontay-Williams-Fabozzi-malliksi. Sen ennustamat korot ovat BDT:n tavoin lognormaalijakautuneita. Volatilitteettiparametrin ollessa vakio malli menettää ominaisuuden, joka ohjaa korkoja kohti pitkän aikavälin keskiarvoa.

Black (1976) näyttää, että kohde-etuuden implisiittinen volatilitteetti voidaan määrittää sen johdannaisen markkinahinnan avulla. Mikäli halutaan määrittää koron volatilitteettiestimaatti periodikohtaisesti, voidaan soveltaa kyseistä Black-76 mallia ja markkinadataa. Tässä tutkielmassa määritetään yksinkertaistuksen takia yksi yhteinen volatiliestimaatti kaikille periodeille.

3.1.2 BDT-mallin sovitus binomihilaan

Kuten kohdassa 3.1 esitettiin, Black-Derman-Toy mallin korolle pätee

$$r(t) = U(t)e^{\sigma(t)W(t)}.$$

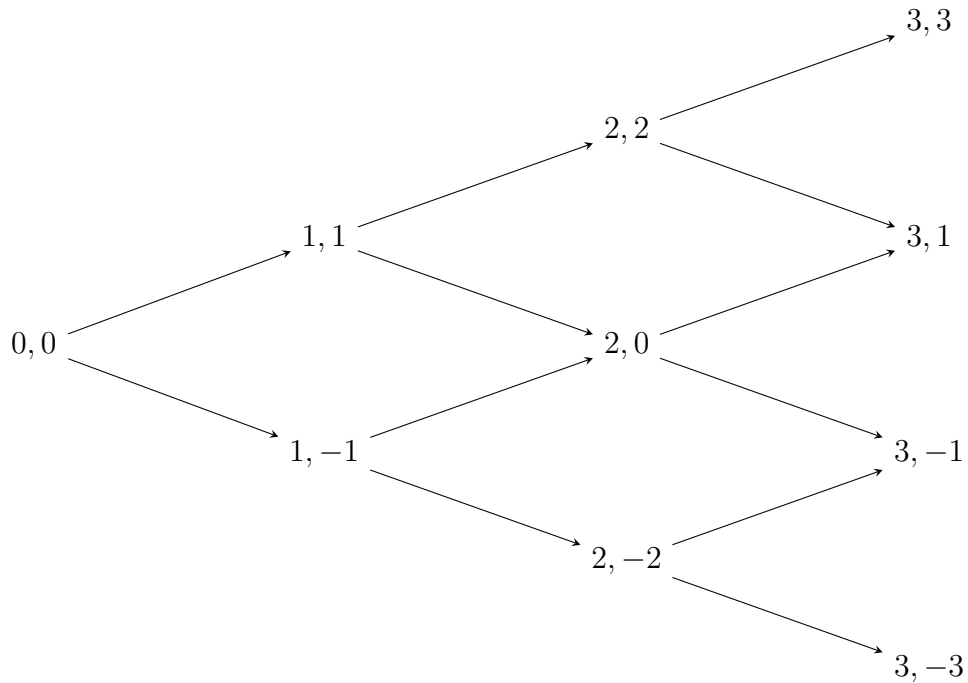
Jamshidian (1991) näyttää, että prosessi voidaan sovittaa binomihilaan kaavalla

$$r_{ij} = U(i)e^{\sigma(i)j\sqrt{\Delta t}},$$

jossa i on hilan periodi siten, että $i \in \mathbb{N}$. Hilan indeksöinti määritellään

$$j_{i+1} = \begin{cases} j_i + 1, & \text{jos siirrytään hilassa ylöspäin,} \\ j_i - 1, & \text{jos siirrytään hilassa alaspäin.} \end{cases}$$

Kolmelle ensimmäiselle periodille solmut indeksöidään kuvan 2 mukaisesti.



Kuva 2: BDT-hilan indeksointi visualisoituna.

Käyttämällä kuvan 2 kaltaista indeksointia, hilatodennäköisyydet voidaan laskea yhtälöstä

$$\mathbb{P}(Y = y_{ij}) = \binom{i}{\frac{i+j}{2}} p^{\frac{i+j}{2}} (1-p)^{\frac{i-j}{2}}. \quad (1)$$

Kun todennäköisyys, $p = 0.5$, yhtälö (1) sievenee muotoon

$$P(Y = y_{ij}) = \binom{i}{\frac{i+j}{2}} (0.5)^i.$$

3.2 Kalibrointi

Nollakuponkilainan korkoa ei makseta laina-aikana. Sen sijaan korko lisätään pääomaan ja lainanottaja lyhentää lainan kokonaisuudessaan maturiteetissa. Nollakuponkilainan arvo voidaan laskea niin kutsuttujen Arrow-Debreu-arvopaperien summana. [Arrow ja Debreu \(1954\)](#) määrittelevät Arrow-Debreu-arvopaperin nykyarvoksi

$$Q_{ij}^0 = PV \left(\begin{cases} 1, & \text{jos saavutaan solmuun (i,j)} \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases} \right).$$

Arrow-Debreu-hinnalle pätee

$$Q_{ij}^0 = \begin{cases} 1, & \text{jos } i = j = 0, \\ \frac{1}{2}Q_{i-1j-1}^0 D_{i-1j-1}, & \text{jos } j = i \neq 0, \\ \frac{1}{2}Q_{i-1j+1}^0 D_{i-1j+1}, & \text{jos } j = -i \neq 0, \\ \frac{1}{2}Q_{i-1j-1}^0 D_{i-1j-1} + \frac{1}{2}Q_{i-1j+1}^0 D_{i-1j+1}, & \text{muulloin,} \end{cases}$$

jossa diskonttauskerroin D_{ij} solmussa ij voidaan laskea

$$D_{ij} = \left(\frac{1}{1 + r_{ij}\Delta t} \right),$$

jossa Δt on periodien välinen aika vuosina.

Olkoon ajanhetkellä $T_A > 0$ mahdollisten solmujen lukumäärä J_A . Tällöin sijoittamalla J_A määrään Arrow-Debreu-arvopapereita siten, että jokaisen arvopaperin kohdesolmu on eri taataan nimellisarvon 1 rahavirta maturiteetissa T_A . Toisin sanoen on sijoitettu riskittömään nollakuponkilainaan maturiteetilla T_A . Nimellisarvoltaan yhden rahayksikön nollakuponkilainan nykyarvo maturiteetilla $\hat{i}\Delta t$ vuotta voidaan laskea kaavalla

$$P_Q(0, \hat{i}\Delta t) = \sum_j Q_{ij}^0.$$

Toisaalta markkinoilla määritellyn korkokäyrän mukaisesti

$$P_R(0, \hat{i}\Delta t) = \frac{1}{(1 + R_{\hat{i}\Delta t})^{\hat{i}\Delta t}},$$

jossa $R_{\hat{i}\Delta t}$ on $\hat{i}\Delta t$ maturiteetin nollakuponkilainan vuotuistettu tuottotaso.

Koska molemmat nollakuponkilainat ovat riskittömiä ja maturiteetiltaan yhtä pitkiä, kohdassa 3.1 esitetyn arbitraasivapausehdon vuoksi pätee

$$P_Q(0, \hat{i}\Delta t) = P_R(0, \hat{i}\Delta t).$$

Oletetaan hila ratkaistuksi periodiin $i - 1$ asti. Saadaan yhtälö

$$\frac{1}{(1 + R_{(i+1)\Delta t})^{(i+1)\Delta t}} = \sum_j Q_{ij}^0 \frac{1}{1 + U(i)e^{\sigma(i)j\sqrt{\Delta t}}}. \quad (2)$$

Yhtälöstä (2) nähdään, että ainoa tuntematon muuttuja, $U(i)$, voidaan ratkaista esimerkiksi iteratiivisesti. Koska $r_{00} = R_1$ saadaan markkinoilta, voidaan induktion perusteella hila rakentaa mille tahansa aikahorisontille $i\Delta t$.

3.3 Lainapääoman arvo

Jokaisessa periodissa lainan pääomaan lisätään sen hetkinen korko ja vähennetään annuiteettilyhennys. Koska hilatodennäköisyydet ovat 50 %, voidaan solmuun (i, j) saapua yhtä suurella todennäköisyydellä solmusta $(i - 1, j + 1)$ tai $(i - 1, j - 1)$. Lainapääoman arvo solmussa (i, j) voidaan tällöin laskea solmujen $(i - 1, j + 1)$ ja $(i - 1, j - 1)$ lainapääomien ja lainanlyhennysten summien keskiarvona. Lainapääomalle A_{ij} voidaan rakentaa hila rekursiivisesti seuraavasti

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(A_{i-1,j+1}(1 + r_{i-1,j+1}) - C_{i-1,j+1}) + \frac{1}{2}(A_{i-1,j-1}(1 + r_{i-1,j-1}) - C_{i-1,j-1}),$$

jossa annuiteetin mukaisesti $C_{ij} = A_{ij}r_{ij}/(1 - (1 + r_{ij})^{-(T-i)})$. Alkuarvo A_{00} on lainattava summa. Annuiteetin mukaisesti maturiteetissa $A_{T,j} = 0$ kaikissa hilapisteissä (T, j) .

3.4 Korkokatto

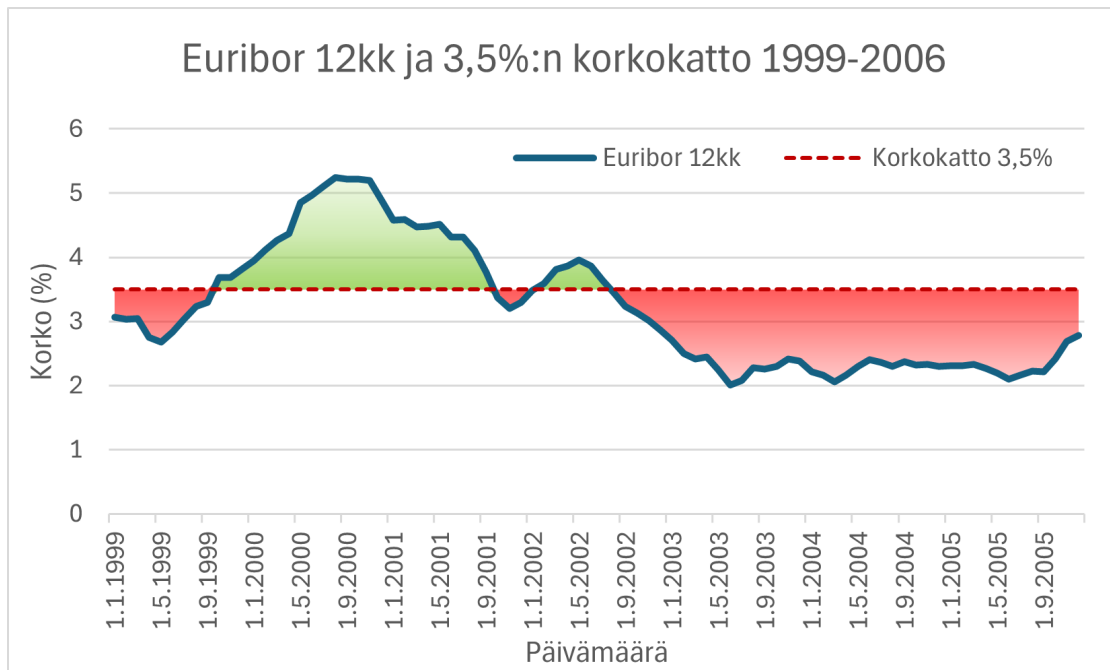
3.4.1 Korkokatto välineenä

Korkokattoa voidaan käyttää suojaamaan lainan kustannusten nousulta. Kun lainasta maksettava korko riippuu muuttuvasta viitekorosta, kasvattaa viitekoron nousu lainanhoitokustannuksia. Korkokatto asettaa viitekorolle maksimiarvon, jota korkeammalle lainan viitekoron osuus ei korkokaton voimassaoloaikana voi nousta. Tätä suojaa vastaan korkokaton tarjoajalle maksetaan korvaus esimerkiksi lisämarginaalina lainanlyhennyksen ohessa.

Korkokaton suojaaman koron määrä, r_{ij}^{CAP} , voidaan esittää suojaamattoman koron avulla

$$r_{ij}^{CAP} = \begin{cases} \min(r_c, r_{ij}) + \gamma, & \text{kun } i \leq \tau \\ r_{ij}, & \text{muuten,} \end{cases}$$

jossa r_c on korkokaton taso, r_{ij} suojaamaton korko, γ korkokatosta maksettava lisämarginaali ja τ korkokaton viimeisen voimassaoloajan numero. Kuvassa 3 on esitetty esimerkki korkokatosta ja sen vaikutuksesta Euribor 12kk sidottuun lainaan.



Kuva 3: Koron kehitys ja korkokatto.

Kuvassa 3 vihreä alue merkitsee ajanjaksoja, jolloin viitekorko on korkeampi kuin korkokaton taso. Tällöin korkokatto luo säästöjä korkokaton ostajalle. Punainen alue merkitsee ajanjaksoja, jolloin korkokatto ei vaikuta maksettavaan korkoon, sillä viitekorko on korkokaton tason alapuolella.

3.4.2 Korkokaton nykyarvo

Korkokatolla suojatun lainan nykyarvo suojaamattomaan verrattuna on polkuriippuvainen, mikä tarkoittaa, että korkokaton luomat säästöt periodiin n tullessa riippuvat jokaisesta aikaisemmasta hila-arvosta $r_{i^*, j_{i^*}}$, jossa $i^* \leq n$, $j_{i^*} \leq i^*$. Binomihilalle, jonka aikahorisontti on k periodia, voidaan löytää 2^{k-1} uniikkia polkua, kun huomioidaan, että ensimmäinen solmu on kaikille poluille sama $(0, 0)$. Täten, 25 vuotisen lainan korkokatolle on $2^{24} = 16\,777\,216$ mahdollista nykyarvoa.

Olkoon $\pi = [j_0, j_1, j_2, \dots, j_T]$ polku, jonka solmuille $\pi(i) = j_i$ pätee määritelmä 3.1.2. Nykyarvot V_π lasketaan poluittain diskonttaamalla kussakin periodissa syntyvät rahavirrat ja summaamalla ne. Saadaan yhtälö

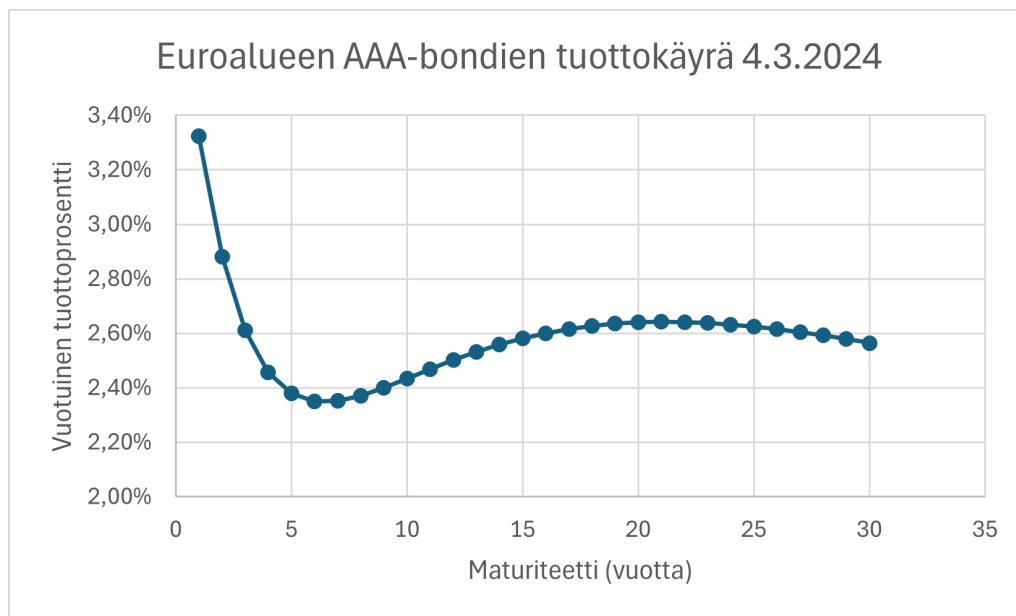
$$V_\pi = \sum_{i=0}^T \left(\left(\prod_{k=0}^i D_{k\pi(k)} \right) (C_{i\pi(i)} - C_{i\pi(i)}^{CAP}) \right),$$

jossa $D_{i\pi(i)}$ on kohdassa 3.2 määritelty diskonttauskerroin, $C_{i\pi(i)}$ ja $C_{i\pi(i)}^{CAP}$ lainanlyhennyksen määrät ilman korkokattoa ja korkokaton kanssa solmussa $(i, \pi(i))$. Arvot saadaan kohdassa 3.3 esitettyjen yhtälöiden avulla käyttämällä joko korkosuojaamatonta korkoa $r_{i\pi(i)}$ tai korkosuojattua korkoa $r_{i\pi(i)}^{CAP}$. Polkukohtaisisten nykyarvojen avulla saadaan arvio jakaumasta esittämällä ne histogrammina.

4 Tutkimusaineisto

4.1 Korkokäyrä

Kohdassa 3.2 esitellyn nollakuponkilainan aineistona käytetään Euroopan keskuspankin tarjoamaa AAA-luokiteltujen bondien korkokäyrää (Mann, 2024b). Kuvassa 4 on esitetty korkokäyrän kuvaaja päivämääränä 4.3.2024.



Kuva 4: Euroalueen AAA-luokiteltujen velkakirjojen vuotuinen tuotto prosentteina maturiteetin funktiona 4.3.2024.

Koska halutaan luoda korkohila Euribor 12kk koroille, on kuvan 4 dataa käyttämällä luotua hila muokattava. Eller ja Reininger (2016) toteavat, että Euroopan valtion velkakirjojen tuotot ja pankkilainojen korot ovat voimakkaasti korreloituneet. Tehdään oletus, että niin kutsutun riskittömän koron, eli AAA-luokiteltujen bondien avulla lasketun koron r ja Euribor 12kk koron r^{EUR12} välillä on suora riippuvuus. Saadaan uusi hila, jossa $r_{ij}^{EUR12} = ar_{ij}$, $a \in \mathbb{R}_+$, josta nykytiedolla saadaan

$$a = \frac{r_{00}^{EUR12}}{r_{00}}.$$

Tuottokäyrää ei voida luoda käyttämällä Euribor-velkakirjoja, koska Euribor-korot päivitetään myöhäisintään 12 kuukauden kuluttua kauppahetkestä. Tämän takia pisin maturiteetti Euribor-velkakirjalle ennalta tiedetyllä vakiokorolla on 12 kuukautta. Toisin sanoen pisin Euribor-velkakirjoilla luotu tuottokäyrä on 12 kuukautta pitkä.

4.2 Esimerkkiasuntolaina

Työssä käsiteltävä esimerkkilaina on suuruudeltaan 200 000 euroa. Korko maksetaan annuiteettimuotoisena 25 vuoden takaisinmaksuajalla. Tämä tarkoittaa, että takaisinmaksuerien koko vaihtelee, mutta määrä ei. Korko koostuu 0.65 % marginaalista ja Euribor 12kk viitekorosta. Tosiasiassa korko maksetaan kuukausittain, mutta selkeyden vuoksi tässä työssä korko maksetaan vuosittain.

4.3 Korkokattovaihtoehdot

Käsitellään neljää eri korkokattotarjousta. Tarjoukset ovat esitetty taulukossa 1.

Taulukko 1: Korkokattovaihtoehdot ja niiden tunnusluvut

#	Taso	Marginaali	Kesto (vuotta)
1	5%	0.58%	14
2	5%	0.49%	7
3	4%	0.73%	14
4	4%	0.60%	7

Taulukko 1 esittää suomalaisen pankin 4.3.2024 tarjoamia esimerkkikorkokattoja, joita on pyydetty tutkimuskäyttöön.

4.4 Volatiliteetti

4.4.1 Keskihajonta

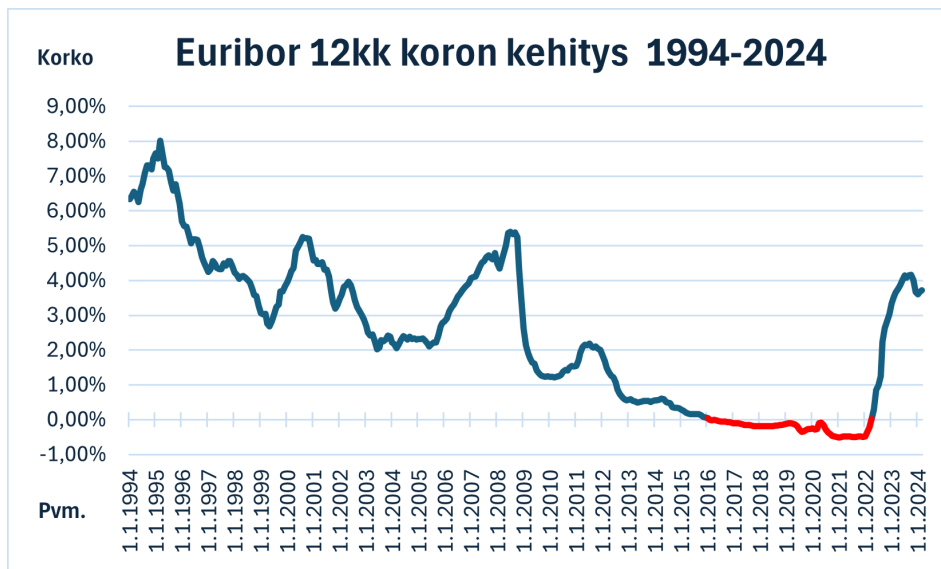
Taloudellisen instrumentin riskiä kuvataan volatiliteetilla, joka määritetään laske-
malla instrumentin tuoton keskihajonta. [Luenberger \(1998\)](#) näyttää, että lognor-
maalisti jakautuneen instrumentin tuottojen vuosittainen volatiliteettiestimaatti
 $\hat{\sigma}_S$ voidaan laskea historiallisesta datasta

$$\hat{\sigma}_S = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} (\Delta \ln S_k - \mathbb{E}[\Delta \ln S_k])^2}, \quad (3)$$

jossa N on otoskoko ja $\Delta \ln S_k$ on instrumentin historiallisen hinnan logaritmin
vuosimuutos. Lasketaan Euribor 12kk korolle 12 kuukauden liukuva volatiliteetties-
timaatti ja tarkastellaan saatua volatiliteettijakaumaa.

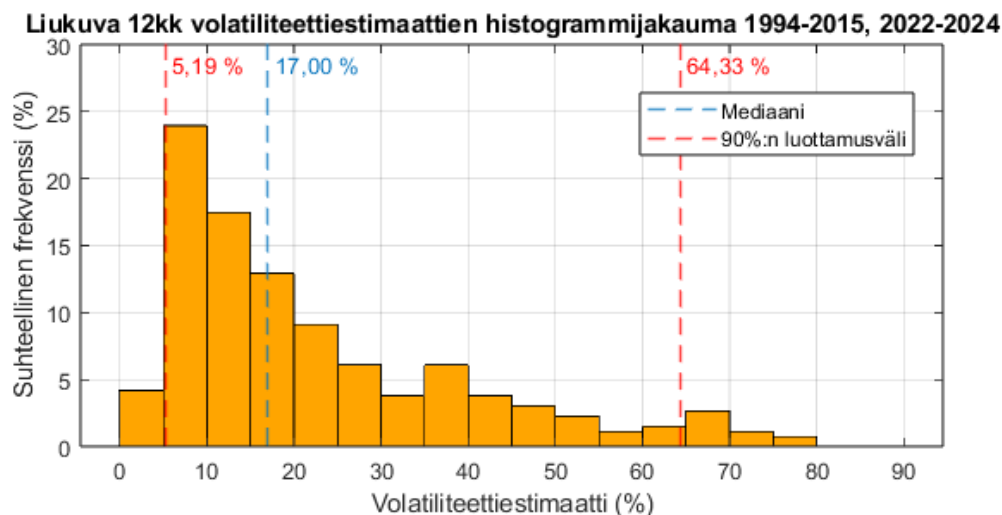
4.4.2 Estimointi

Koska BDT-malli olettaa korkojen jakautuvan log-normaalisti, ei volatiliteetin
estimoinnissa sallita negatiivisia arvoja. Tämän takia estimointiin käytetään ainoas-
taan positiivisia koron arvoja. Kuvassa 5 on esitetty Euribor 12kk koron kehitys
vuosina 1994–2024. Tätä aikasarjaa käytetään volatiliteetin estimoinnissa. ([Mann,
2024a](#))



Kuva 5: 12kk:n Euribor, jossa negatiiviset arvot merkitty punaisella.

Käytetään kuvan 5 esittämää dataa siten, että jätetään negatiiviset arvot pois aineistosta. Lasketaan 12 kuukauden liukuva volatiliteettiestimaatti yhtälön (3) mukaisesti ja luodaan jakauma havainnoista. Kuvassa 6 on esitetty liukuvan volatiliteettiestimaatin jakauma histogrammissa.



Kuva 6: Histogrammi Euribor 12kk koron 12 kuukauden liukuvasta keskihajonnasta

Kuten kuvasta 6 nähdään saadaan 12 kuukauden liukuvan volatiliteettiestimaatin mediaaniksi 17,00% ja 90%:n luottamusrajoiksi 5,19% ja 64,33%. Luodaan kolme BDT -korkohilaa: mediaani, vakaa ja volatiili käyttämällä ennen mainittuja volatiliteettiparametreja.

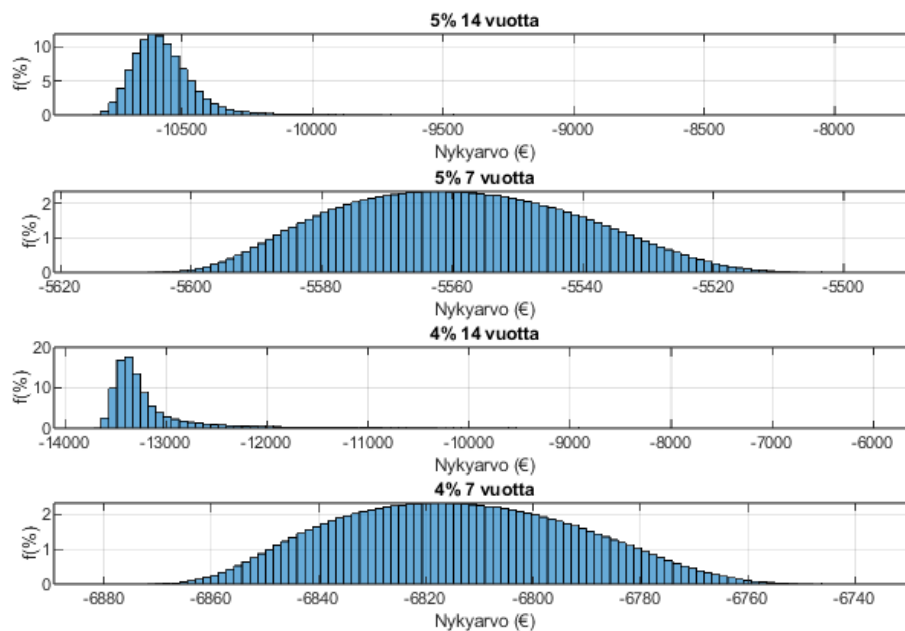
5 Tulokset

Tähän osioon on koottu taulukossa 1 esitettyjen korkokattovaihtoehtojen nykyarvojen jakaumat. Laskelmat pohjautuvat Black–Derman–Toy korkoennusteeseen vakaassa tapauksessa, mediaanitapauksessa ja volatiilissa tapauksessa. Jakaumat esitetään histogrammissa, jossa y-akselilla esitetään havaintojen suhteellinen frekvenssi.

5.1 Vakaa tapaus

Vakaassa tapauksessa koron vuotuisena volatilitteettiparametrina käytetään kohdassa 4.4.2 määritetyn volatilitteettijakauman 90%:n luottamusvälin alarajaa 5,19 %. Kuvassa 7 esitetään eri korkokattovaihtoehtojen nykyarvojen jakaumat.

Korkokaton nykyarvon jakaumat vakaassa tapauksessa, kun $\sigma = 5,19\%$



Kuva 7: Vakaan tapauksen korkokattovaihtoehtojen nykyarvojen jakaumat.

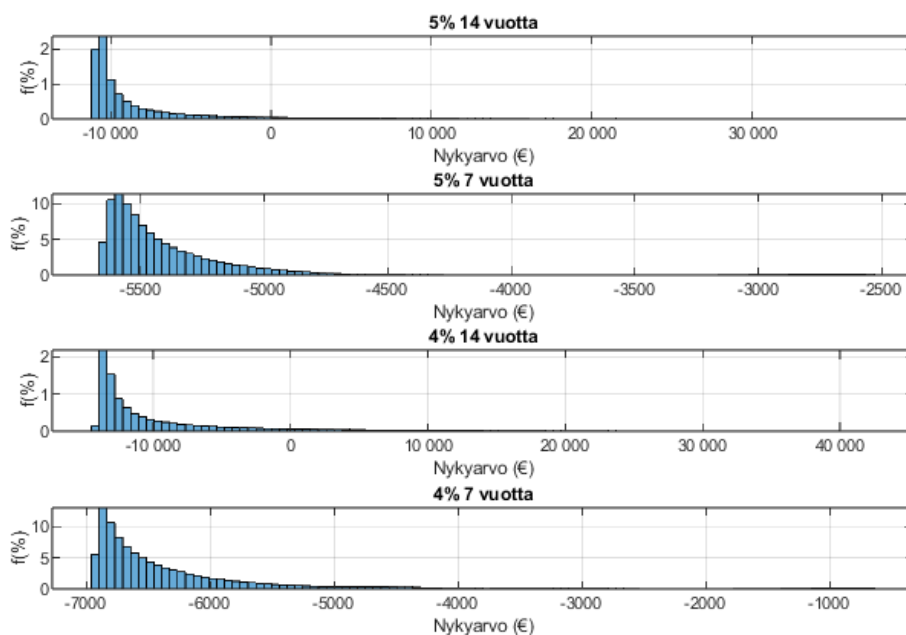
Kuvasta 7 nähdään, että

- 5 %:n ja 14 vuoden korkokatto saa vakaassa tapauksessa arvoja väliltä -11 000 euroa ja -8 000 euroa. Jakauman moodi sijaitsee noin -10 600 euron kohdalla.
- 5 %:n ja 7 vuoden korkokatto saa arvoja väliltä -5 620 euroa ja -5 500 euroa. Jakauman moodi sijaitsee noin -5 560 euron kohdalla.
- 4 %:n ja 14 vuoden korkokatto saa arvoja väliltä -14 000 euroa ja -6 000 euroa. Jakauman moodi sijaitsee noin -13 400 euron kohdalla.
- 4 %:n ja 7 vuoden korkokatto saa arvoja väliltä -6 880 euroa ja -6 740 euroa. Jakauman moodi sijaitsee noin -6 820 euron kohdalla.

5.2 Mediaanitapaus

Mediaanitapauksessa koron vuotuisema volatilitteettiparametrina käytetään kohdassa 4.4.2 määritetyn volatilitteettijakauman mediaania 17,00 %. Kuvassa 8 esitetään eri korkokattovaihtoehtojen nykyarvojen jakaumat.

Korkokaton nykyarvon jakaumat mediaanitapauksessa, kun $\sigma = 17,00\%$



Kuva 8: Mediaanitapauksen korkokattovaihtoehtojen nykyarvojen jakaumat.

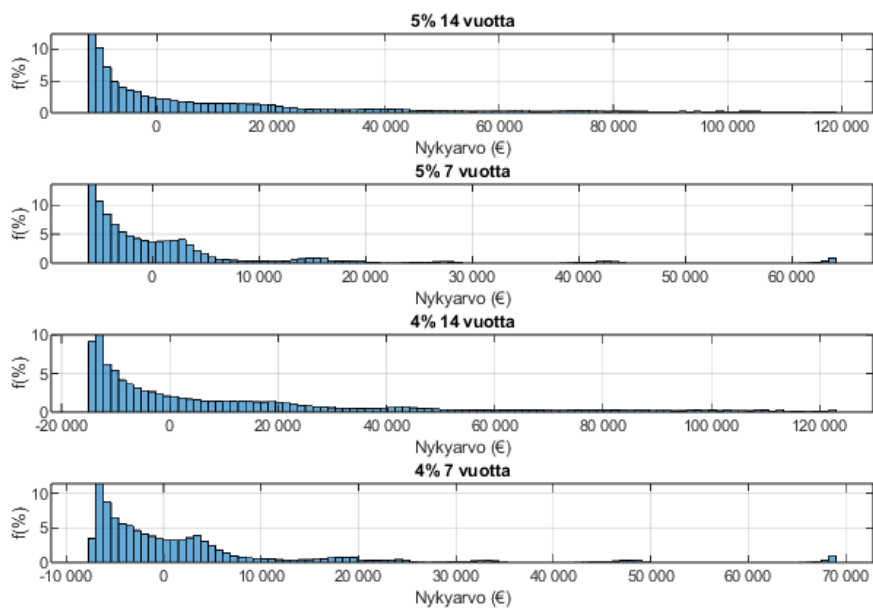
Kuvasta 8 nähdään, että

- 5 %:n ja 14 vuoden korkokatto saa mediaanitapauksessa arvoja väliltä -11 000 euroa ja 35 000. Jakauman moodi sijaitsee noin -10 500 euron kohdalla.
- 5 %:n ja 7 vuoden korkokatto saa arvoja väliltä -5 750 euroa ja -2 500 euroa. Jakauman moodi sijaitsee noin -5 600 euron kohdalla.
- 4 %:n ja 14 vuoden korkokatto saa arvoja väliltä -15 000 euroa ja 40 000 euroa. Jakauman moodi sijaitsee noin -14 000 euron kohdalla.
- 4 %:n ja 7 vuoden korkokatto saa arvoja väliltä -7 000 euroa ja -1 000 euroa. Jakauman moodi sijaitsee noin -6 900 euron kohdalla.

5.3 Volatiili tapaus

Mediaanitapauksessa koron vuotuisema volatilitteettiparametrina käytetään kohdassa 4.4.2 määritetyn volatilitteettijakauman 90%:n luottamusvälin ylärajaa 64,33 %. Kuvassa 9 esitetään eri korkokattovaihtoehtojen nykyarvojen jakaumat.

Korkokaton nykyarvon jakaumat volatiilissa tapauksessa, kun $\sigma = 64,33\%$



Kuva 9: Volatiilin tapauksen korkokattovaihtoehtojen nykyarvojen jakaumat.

Kuvasta 9 nähdään, että

- 5 %:n ja 14 vuoden korkokatto saa mediaanitapauksessa arvoja väliltä -11 000 euroa ja 120 000. Jakauman moodi sijaitsee noin -10 000 euron kohdalla.
- 5 %:n ja 7 vuoden korkokatto saa arvoja väliltä -6 000 euroa ja 65 000 euroa. Jakauman moodi sijaitsee noin -6 000 euron kohdalla.
- 4 %:n ja 14 vuoden korkokatto saa arvoja väliltä -15 000 euroa ja 125 000 euroa. Jakauman moodi sijaitsee noin -14 000 euron kohdalla.
- 4 %:n ja 7 vuoden korkokatto saa arvoja väliltä -7 500 euroa ja 70 000 euroa. Jakauman moodi sijaitsee noin -7 000 euron kohdalla.

5.4 Herkkyysanalyysi

Taulukkoon 2 on koottu eri korkokattovaihtoehtoille seuraavat tunnusluvut.

1. $\hat{\sigma}$, volatilitteettiparametri
2. $\hat{\mu}(V)$, korkokaton nettonykyarvojen odotusarvo (euroa)
3. $\hat{\sigma}(V)$, korkokaton nettonykyarvojen keskihajonta (euroa)
4. $\mathbb{P}(V > 0)$, osuus poluista, jotka johtavat positiiviseen nettonykyarvoon
5. $\hat{\mu}(V|V > 0)$, positiivisten nettonykyarvojen odotusarvo (euroa).

Taulukko 2: Korkokattovaihtoehtoille laskettuja tunnuslukuja.

CAP	1. $\hat{\sigma}$	2. $\hat{\mu}(V)$	3. $\hat{\sigma}(V)$	4. $\mathbb{P}(V > 0)$	5. $\hat{\mu}(V V > 0)$
1. 5%, 14v	5,19 %	-10 566	144	0 %	-
	17,00 %	-7 916	5 157	7,38 %	7 230
	64,33 %	11 838	29 564	48,95 %	32 384
2. 5%, 7v	5,19 %	-5 559	18	0 %	-
	17,00 %	-5 380	387	0 %	-
	64,33 %	1 836	11 406	40,39 %	10 072
3. 4%, 14v	5,19 %	-13 107	664	0 %	-
	17,00 %	-8 903	7 206	10,69 %	8 460
	64,33 %	12 174	31 891	48,73 %	35 203
4. 4%, 7v	5,19 %	-6 814	22	0 %	-
	17,00 %	-6 260	944	0 %	-
	64,33 %	2 522	12 920	42,99 %	11 702

Taulukosta 2 nähdään, että volatilitteettiestimaatin kasvattaminen kasvattaa kaikkia taulukossa esitettyjä tunnuslukuja. Sarakkeesta 2 nähdään, että lyhyemmissä 7 vuoden korkokattovaihtoehtoissa keskimääräiset nettonykyarvot ovat suurempia kuin pidemmät 14 vuoden vaihtoehdot, joskin negatiivisia. Korkeampien 5 %:n tason korkokattovaihtoehtojen hajonta on pienempää kuin vastaavien 4 %:n korkokattojen. Sarakkeesta 4 nähdään, että lyhyemmät korkokattovaihtoehdot kannattavat pidempiä korkokattovaihtoehtoja harvemmin. Todennäköisyys sille, että 7 vuoden korkokatto tuottaa asiakkaalle lisäarvoa on pienempi kuin 14 vuoden korkokatolla.

5.5 Johtopäätökset

Tässä työssä on käsitelty Black-Derman-Toy-korkomallin soveltamista korkokaton nykyarvon määrittämiseen. Malli on luotu käyttämällä eurooppalaisten AAA-luokiteltujen velkakirjojen markkinoilta saatuja tuotto prosentteja sekä volatiliiteettiestimaattia. Volatiliiteettiestimaatti saatiin laskemalla Euribor 12kk koron historiallisesta datasta 12:n kuukauden liukuva keskihajonta ja määrittämällä saatujen arvojen 90 %:n luottamusrajat sekä mediaani.

Suomalaisesta pankista saatujen esimerkkikorkokattotarjouksien netto nykyarvojen jakaumat määritettiin luotujen korkohilojen avulla ja jakaumista laskettujen tunnuslukujen perusteella korkokattoja vertailtiin keskenään.

Tuloksista huomataan, että korkokattojen hyödyllisyys kuluttajalle riippuu volatiliiteettiparametrilla. Tarkastellaan kolmea tapausta erikseen. Vakaassa tapauksessa korkojen volatiliiteetti on 5,19 %. Tällöin mikään korkokattovaihtoehto ei luo positiivista nettoarvoa riippumatta kuljetusta polusta. Tässä tapauksessa ei suositella korkokaton hankkimista. Mediaanitapauksessa korkojen volatiliiteetti on 17,00 %. Tällöin 7 vuoden korkokattovaihtoehdot eivät luo positiivista nettoarvoa ja niiden hankkimista ei suositella. Asiakkaan riskinsietokyvystä riippuen korkokatto 5 % + 14 vuotta ja 4 % + 14 vuotta saattavat olla perusteltuja. Korkokatto 5 % + 14 vuotta on korkokattoa 4 % + 14 vuotta nettoarvoltaan halvempi, mutta korkokattolla 4 % + 14 vuotta on suurempi todennäköisyys päätyä asiakkaan kannalta nettoarvoltaan positiiviseksi. Volatiliiteetissä tapauksessa korkojen volatiliiteetti on 64,33 %. Tällöin paras vaihtoehto on korkokatto 4 % + 14 vuotta, sillä sen netto nykyarvo on positiivinen ja kaikista suurin.

Työssä tehdään oletuksia, jotka rajaavat tulosten yleispätevyyttä. Koska aineistoa pidemmistä Euribor korkoon sidotuista velkakirjoista ei ole saatavilla, pitää Euribor 12kk koron hila luoda käyttämällä AAA-luokiteltuja velkakirjoja. Tämä korjataan valmiissa korkohilassa siten, että kaikki hila-arvot kerrotaan nykyisellä Euribor 12kk arvolla ja jaetaan nykyisellä 1 vuoden AAA-velkakirjan tuotto prosentilla. Volatiliiteettiestimoinnissa oletetaan, että volatiliiteettiparametri säilyy vakiona eri vuosina. Tarkempia tuloksia eri vuosien volatiliiteettiparametrille saadaan laskeamalla implisiittinen volatiliiteetti käyttämällä hyödyksi esimerkiksi korkofutuuriin markkinahintoja. Tällöin volatiliiteettiparametri on niin sanotusti eteenpäin katsova, eikä historiallisista arvoista määritetty.

Mielenkiintoisimmat kehityssuunnat korkomallinnuksessa lienevät volatiliiteetin mallinnuksessa. Työssä määritetyn volatiliiteettiparametrin luottamusväli on suhteellisen suuri, mikä johtaa korkokattovaihtoehtojen nykyarvojen voimakkaisiin vaihteluihin. Ennen mainitun implisiittisen volatiliiteetin lisäksi myös muita keinoja volatiliiteetin määrittämiseen on olemassa. Volatiliiteetti voidaan koron tavoin nähdä stokastisena prosessina, joista esimerkkinä Hestonin malli. [Heston \(1993\)](#) esittää volatiliiteetin neliöjuuren noudattavan tasapainoa kohti pyrkivää stokastista prosessa-

sia. Toinen lähestymistapa on luoda regressiivinen malli volatilitetista. [Bollerslev \(1986\)](#) esittää, että prosessin volatilitetin voi määrittää sen edellisten arvojen virheistä suhteessa prosessin odotusarvoon.

Viitteet

- Kenneth J. Arrow ja Gerard Debreu. Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 22(3):265–290, 1954.
- Tomas Björk. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press, 2009.
- Fischer Black. The Pricing of Commodity Contracts. *Journal of Financial Economics*, 3(1-2):167–179, 1976.
- Fischer Black ja Myron Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, 1973.
- Fischer Black, Emanuel Derman, ja William Toy. A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options. *Financial Analysts Journal*, 46(1):33–39, 1990.
- Tim Bollerslev. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3):307–327, 1986.
- Robert Brown. A Brief Account of Microscopical Observations Made in the Months of June, July and August 1827, on the Particles Contained in the Pollen of Plants; and on the General Existence of Active Molecules in Organic and Inorganic Bodies. *The Philosophical Magazine*, 4(21):161–173, 1828.
- Gerald W Buetow, Bernd Hanke, ja Frank J. Fabozzi. Impact of Different Interest Rate Models on Bond Value Measures. *The Journal of Fixed Income*, 11(3):41–53, 2001.
- Andrew M. Chisholm. *Derivatives Demystified: A Step-by-Step Guide to Forwards, Futures, Swaps and Options*, volume 452. John Wiley & Sons, 2010.
- Emanuel Derman. *My Life as a Quant: Reflections on Physics and Finance*. John Wiley & Sons, 2016.
- Albert Einstein. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annalen der Physik*, 322(8):549–560, 1905.
- Markus Eller ja Thomas Reininger. The Influence of Sovereign Bond Yields on Bank Lending Rates: the Pass-Through in Europe. *Focus on European Economic Integration*, 2:54–78, 2016.
- Steven L Heston. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options. *The Review of Financial Studies*, 6(2):327–343, 1993.
- Farshid Jamshidian. Forward Induction and Construction of Yield Curve Diffusion Models. *Journal of Fixed Income*, 1(1):62–74, 1991.
- Andrew J. Kalotay, George O. Williams, ja Frank J. Fabozzi. A Model for Valuing Bonds and Embedded Options. *Financial Analysts Journal*, 49(3):35–46, 1993.
- David G. Luenberger. *Investment Science*. Oxford University Press, 1998.

Claudia Mann. Euribor 1-Year - Historical Close, Average of Observations Through Period, Euro Area (Changing Composition), Monthly, 31 January 1994 – 31 January 2024. Euroopan keskuspankki, 2024a. URL: https://data.ecb.europa.eu/data/datasets/FM/FM.M.U2.EUR.RT.MM.EURIBOR1YD_.HSTA, haettu 3.5.2024.

Claudia Mann. Euro Area Yield Curves - AAA Rated Bonds, Spot Rate, 4 March 2024. Euroopan keskuspankki, 2024b. URL: https://www.ecb.europa.eu/stats/financial_markets_and_interest_rates/euro_area_yield_curves/html/index.en.html, haettu 3.5.2024.

Maury F. M. Osborne. Brownian Motion in the Stock Market. *Operations research*, 7(2):145–173, 1959.