Vastarinta-pelin optimaalinen pelistrategia

Jaakko Takala

Perustieteiden korkeakoulu

Kandidaatintyö
Espoo 10.1.2022

Vastuuopettaja

Prof. Kai Virtanen

Työn ohjaaja

Prof. Kai Virtanen

Aalto-yliopisto
Perustieteiden
korkeakoulu

Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu

Aalto-yliopisto, PL 11000, 00076 AALTO
www.aalto.fi

Tekniikan kandidaatintyön tiivistelmä

Tekijä Jaakko Takala	
Työn nimi Vastarinta-pelin optimaalinen pelistrategia	
Koulutusohjelma Teknillinen fysiikka ja matematiikka	
Pääaine Matematiikka ja systeemitieteet	**Pääaineen koodi** SCI3029
Vastuuopettaja Prof. Kai Virtanen	
Työn ohjaaja Prof. Kai Virtanen	
Päivämäärä 10.1.2022 **Sivumäärä** 24	**Kieli** Suomi

Tiivistelmä

Vastarinta-peli on 5-10 pelaajan seurapeli. Suurin osa pelaajista on vastarinnan puolella, ja loput pelaajat ovat vakoojia. Vastarinnan puolella olevat pelaajat eivät tiedä muiden pelaajien rooleja. Vastarinnan tehtävä on toteuttaa kolme vastarinnalle suotuisaa projektia. Vakoojat tietävät muiden pelaajien roolit, ja vakoojien tehtävänä on sabotoida vastarinnan projekteja. Tässä työssä tarkastellaan Vastarinta-pelin pelistrategiaa. Pelistrategia koostuu pelaajan pelin aikana tekemistä valinnoista.

Työn tavoitteena on parantaa ymmärrystä Vastarinta-pelistä. Työssä tarkasteltavasta Vastarinta-pelin versiosta ei ole olemassa aikaisempaa tutkimusta, joten kaikki työn keskeiset tulokset ovat sellaista uutta tietoa, jota ei ole aiemmin akateemisessa kirjallisuudessa esitetty.

Pelin viidestä pelikierroksesta tässä työssä tarkastellaan perusteellisimmin pelin ensimmäistä kierrosta. Tarkastelussa määritetään, millä todennäköisyydellä pelin ensimmäisessä projektissa on mukana nolla vakoojaa tai yksi vakooja. Tarkastelussa myös analysoidaan sekä kortin pelaamiseen liittyvää valintaa vakoojan näkökulmasta että pelitilannetta ensimmäisen projektin jälkeen.

Työssä verrataan vakoojien aggressiivista pelistrategiaa ja pisteitä uhraavaa pelistrategiaa viiden pelaajan pelissä. Aggressiivisessa strategiassa vakoojat voittavat pelin ensimmäisen pisteen aina kun mahdollista. Aggressiivinen strategia on paras mahdollinen sellainen pelistrategia jota luodessa on oletettu, että kaikki pelissä jaettavat pisteet ovat saman arvoisia. Pisteitä uhraavassa strategiassa vakoojat antavat aina pelin ensimmäisen ja kolmannen pisteen vastarinnalle. Havaitaan, että pisteitä uhraavalla strategialla vakoojat voittavat yli 20 prosenttia enemmän pelejä kuin aggressiivisella strategialla. Tulos osoittaa, että pelissä jaettavat pisteet eivät ole keskenään saman arvoisia.

Avainsanat Peliteoria, pelistrategia, epätäydellisen informaation peli

Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu

Aalto University, P.O. BOX 11000, 00076 AALTO
www.aalto.fi
Abstract of the bachelor's thesis

Author Jaakko Takala

Title Optimal Game Strategy of The Resistance Game

Degree programme Engineering Physics and Mathematics

Major Mathematics and Systems Sciences **Code of major** SCI3029

Teacher in charge Prof. Kai Virtanen

Advisor Prof. Kai Virtanen

Date 10.1.2022 **Number of pages** 24 **Language** Finnish

Abstract

The Resistance is a party game of 5-10 players. Most of the players are a part of the resistance and the rest of the players are spies. Players that are a part of the resistance do not know the roles of other players. The objective of the resistance is to complete three favorable projects. The spies do know the roles of other players and their objective is to sabotage the projects. In this thesis the game strategy of The Resistance is studied. The game strategy consists of the choices made by the player during the game.

The aim of this thesis is to improve the understanding of the game called The Resistance. The analysis is restricted to a specific non-commercial version of the game. There are no earlier academic studies of this version of the game, so all the key results of this thesis are new and have not appeared in earlier academic theses.

Of the five rounds of the game, this thesis studies thoroughly just the first round. The thesis calculates the probabilities of the first project containing either no spy or exactly one spy. The implications of playing a specific card as a spy in the first project are explored. The state of the game after the first project is also analyzed.

This thesis compares two game strategies of the spies in the case of five players. The strategies being compared are the aggressive game strategy and the point-sacrificing game strategy. In the aggressive strategy the spies always take the first point of the game if possible. The aggressive strategy is the best such strategy in which it is assumed that all the points in the game are worth the same. In the point-sacrificing strategy the spies always sacrifice the first and the third points to the resistance. The result of the comparison is that with the point-sacrificing strategy the spies win over 20 percent more games than with the aggressive strategy. This result proves that all the points in the game are not worth the same.

Keywords Game theory, game strategy, games of incomplete information

Sisällys

1 Johdanto

Vastarinta on 5-10 pelaajan epätäydellisen informaation peli. Epätäydellisen informaation pelillä tarkoitetaan peliä, jossa eri pelaajien tiedot pelitilanteesta ovat erilaiset. Esimerkki tällaisesta pelistä on pokeri, jossa pelaaja ei tiedä muiden pelaajien käsikortteja. Vastaavasti täydellisen informaation pelejä ovat esimerkiksi shakki ja Blokus. Näissä peleissä kaikkien pelaajien saatavilla on kaikki informaatio pelitilanteesta. Steven Tadelis käsittelee kattavasti peliteoriaa ja epätäydellisen informaation pelejä kirjassaan Game Theory: An introduction (Tadelis (2013)).

Vastarinta-pelissä pelaajien enemmistö on vastarinnan puolella ja reilu kolmannes pelaajista on vakoojia. Vastarinnan tehtävänä on toteuttaa kolme vastarinnalle suotuisaa projektia. Vakoojien tehtävänä on projekteja sabotoimalla estää vastarintaa toteuttamasta tehtäväänsä. Tässä työssä tarkastellaan Vastarinta-pelin matematiikkaa sekä pelistrategiaa.

Vastarinta-pelin tunnetuin versio on pelin kaupallinen versio (Boardgamegeek), jota pelataan peliä varten kehitetyllä korttisarjalla. Kaupallinen versio sisältää erikoisrooleja. Erikoisroolia pelaava pelaaja on roolista riippuen vastarinnan tai vakoojien puolella, mutta tämän lisäksi erikoisrooliin sisältyy muitakin mekaniikkoja. Osa kaupallisen version painoksista sisältää myös juonikortteja (eng. Plot Cards). (Rulebook)

Tässä työssä tarkastellaan erästä epäkaupallista versiota pelistä, jossa ei ole erikoisrooleja eikä juonikortteja ja jota on mahdollista pelata tavallisella 52 kortin korttipakalla. Tästä pelin versiosta ei ole olemassa aikaisempaa tutkimusta. Pelin useita erikoisrooleja sisältävää Avalon-versiota on tutkittu simuloimalla, sekä luotu peliä pelaava neuroverkko (Serrino et al. (2019)).

Työn tavoitteena on parantaa ymmärrystä työssä tarkasteltavasta Vastarinta-pelin versiosta. Tässä työssä keskitytään vain analyyttiseen tarkasteluun, eli työssä ei simuloida peliä. Työ on rajattu tarkastelemaan kattavasti vain pelin ensimmäistä kierrosta. Pelin sellainen tarkastelu, jossa analysoitaisiin pelin kaikkia viittä kierrosta perusteellisesti, olisi merkittävästi tämän työn laajuutta laajempi kokonaisuus. Ensimmäisen kierroksen tarkastelun lisäksi työssä tarkastellaan yksittäisiä pelistrategioita myöhemmillä kierroksilla.

Joistain vastaavista useiden pelaajien epätäydellisen informaation peleistä on olemassa aikaisempaa samantyylistä tutkimusta. Esimerkki tällaisesta pelistä on Mafia. Erlin Yao tarkastelee Mafia-peliä käsittelevässä työssään (Yao (2008)) mm. eri pelaajaosapuolten voittotodennäköisyyksiä. Yaon työssä on samantyylinen analyyttinen lähestymistapa kuin tässä työssä. Yao tarkastelee Mafia-pelin voittotodennäköisyyksiä yleisemmin tämän työn voittotodennäköisyyksien tarkasteluun verrattuna. Yao puolestaan ei tarkastele Mafia-pelin alkuvaiheen tapahtumiin liittyviä todennäköisyyksiä sillä tavalla perusteellisesti kuin tässä työssä Vastarinta-pelin ensimmäistä kierrosta tarkastellaan. Mafia-pelistä ollaan tehty myös simulointia sisältänyttä tutkimusta (Braverman et al. (2008)).

Kappaleessa 2 esitetään kuvaus tarkasteltavasta Vastarinta-pelin versiosta. Lisäksi kappaleessa kerrotaan, mitkä ovat pelaajan olennaisia valintoja käytännön pelissä ja mitkä valinnoista ovat olennaisia myös silloin kun kaikki pelaavat yhtenäisesti. Kappale 3 käsittelee pelin ensimmäistä kierrosta. Kappaleessa määritetään erinäisiä todennäköisyyksiä ensimmäisen kierroksen projektin kokoonpanoon liittyen, sekä tarkastellaan projektilla pelattavan kortin väriin liittyvää valintaa. Kappale 4 perustelee, miksi ensimmäisen kierroksen tarkastelusta ei voida suoraviivaisesti edetä seuraavien pelikierrosten tarkasteluun. Kappaleessa esitetään kysymys, voidaanko kaikkia pelissä jaettavia pisteitä tarkastella saman arvoisina. Kappaleessa 5 osoitetaan vastaesimerkin avulla, että pisteitä ei voi tarkastella saman arvoisina. Kappaleessa verrataan kahta pelistrategiaa viiden pelaajan pelissä. Strategioista paremmaksi osoittautuu pisteitä uhraava strategia, päihittäen parhaan mahdollisen sellaisen strategian jota luodessa on oletettu, että kaikki pelin pisteet ovat saman arvoisia.

2 Pelin kuvaus

Tässä kappaleessa esitellään tässä työssä käsiteltävä Vastarinta-pelin versio. Kappaleet 2.1 ja 2.2 käsittelevät pelin sääntöjä. Kappale 2.3 käsittelee pelaajan olennaisia valintoja sekä käytännön pelissä että tässä työssä tarkasteltavassa ideaalisessa pelissä.

2.1 Alkuvalmistelut

Pelaajat istuvat ringissä. Pelaajat jaetaan kahteen joukkueeseen jakamalla jokaiselle pelaajalle satunnainen rooli, joko vastarinta (punainen) tai vakooja (musta). Vastarinnan ja vakoojien määrät eri pelaajamäärille on esitetty taulukossa 1. Kun roolit on jaettu, kaikki pelaajat sulkevat silmänsä. Tämän jälkeen vakoojat avaavat silmänsä ja näkevät toisensa, eli saavat tietää ketkä pelaajat ovat vakoojia ja ketkä vastarintaa. Tämän jälkeen vakoojat sulkevat silmänsä, ja sitten kaikki pelaajat avaavat silmänsä. Varsinainen peli voi alkaa.

Taulukko 1: Vastarinnan ja vakoojen määrät eri pelaajamäärillä. Vakoojien määrä on aina $\lceil n/3 \rceil$, jossa n on pelaajamäärä.

Pelaajamäärä	5	6	7	8	9	10
Vastarinnan määrä	3	4	4	5	6	6
Vakoojien määrä	2	2	3	3	3	4

2.2 Pelin kulku

Peli koostuu enimmillään viidestä kierroksesta, ja se on muotoa paras viidestä. Ensimmäisenä kolme pistettä kerännyt joukkue voittaa. Jokaisella kierroksella suoritetaan yksi projekti. Projekti on pelaajien osajoukko, jonka koko kullakin kierroksella on esitetty taulukossa 2.

Yksi pelaajista arvotaan ensimmäisen kierroksen ensimmäiseksi puheenjohtajaksi. Puheenjohtajan tehtävä on ehdottaa projektia. Puheenjohtajan ehdottamasta

Taulukko 2: Projektien koot eri pelaajamäärillä. Tähdellä (*) merkityissä projekteissa täytyy tulla pelatuksi yhden sijaan vähintään kaksi mustaa korttia, jotta vakoojat saisivat pisteen.

Pelaajamäärä	5	6	7	8-10
Kierroksen 1 projekti	2	2	2	3
Kierroksen 2 projekti	3	3	3	4
Kierroksen 3 projekti	2	4	3	4
Kierroksen 4 projekti	3	3	4*	5*
Kierroksen 5 projekti	3	4	4	5

projektista äänestetään. Jokaisella pelaajalla on yksi ääni, jota on pakko käyttää. Äänellään pelaaja joko kannattaa tai vastustaa projektia. Pelaaja ei äänestyspäätöstä tehdessään tiedä miten muut pelaajat äänestävät.

Jos projekti saa aidon enemmistön taakseen eli vähintään $\lfloor n/2 + 1 \rfloor$ pelaajaa kannattaa projektia, projekti toteutetaan. Jos projektia ei toteuteta, puheenjohtajavuoro siirtyy ringissä myötäpäivään seuraavalle pelaajalle. Kierroksen n:s projektiehdotus toteutetaan ilman äänestystä, jos mikään aiempi projektiehdotus ei ole saanut aitoa enemmistöä taakseen. Pelaaja, jonka projektiehdotus toteutetaan ilman äänestystä istuu siis kierroksen ensimmäisen puheenjohtajan oikealla puolella, ja häntä kutsutaan kyseisen kierroksen diktaattoriksi.

Kun projekti toteutetaan, jokainen projektiin kuuluva jäsenpelaaja nostaa itselleen sekä punaisen että mustan kortin. Jokainen jäsenpelaaja pelaa salassa toisen korteistaan yhteiseen pelipinoon, ja asettaa yli jääneen kortin poistopinoon. Vastarintaan kuuluvan on pelattava punainen kortti, vakooja saa pelata joko punaisen tai mustan kortin. Pelipinon kortit sekoitetaan ja katsotaan. Jos kaikki pinon kortit ovat punaisia, vastarinta saa pisteen. Jos pinossa on musta kortti tai mustia kortteja, vakoojat saavat pisteen. Poikkeuksena on taulukossa 2 tähdellä merkityt projektit. Niissä vastarinta saa pisteen, jos pinossa on 0-1 mustaa korttia, ja vakoojat saavat pisteen, jos mustia kortteja on kaksi tai enemmän.

Toteutettua projektia ehdottaneesta pelaajasta tulee seuraavan kierroksen diktaattori. Seuraavan kierroksen ensimmäinen puheenjohtajavuoro on siis hänen vieressään vasemmalla istuvalla pelaajalla.

2.3 Pelaajan olennaiset valinnat

Käytännön pelissä mielenkiintoisia pelaajan olennaisia valintoja ovat puheenjohtajana ehdotettavan projektin valinta, projektiin liittyvät äänestyspäätökset sekä vakoojana projektilla pelattavan kortin väri. Pelistrategialla viitataan pelaajien tekemiin päätöksiin olennaisiin valintoihin liittyen eri pelitilanteissa. Tässä tarkastelussa analysoidaan ideaalista peliä, jossa kummankin pelin osapuolen toteuttama pelistrategia on kaikkien pelaajien tiedossa. Koska vastarinnan puolella on enemmän pelaajia ja täten äänienemmistö on selvää, että kaikkien pelaajien - myös vakoojien

- äänestyskäyttäytyminen on vastarinnan optimaalisen pelistrategian eli pelin voittotodennäköisyyden maksimoivan pelistrategian mukaista. Vakoojana vastarinnan optimaalisesta strategiasta poikkeaminen äänestyksessä ei johda mihinkään, koska vastarinnan puolella olevat pelaajat äänestävät yhtenevästi. Äänestystrategiasta poikkeaminen myös paljastaa vakoojan välittömästi.

Vastarinnan jäsenet tekevät puheenjohtajavuoroillaan vastarinnan strategian mukaisia projektiehdotuksia, joten myös vakoojien on niitä puheenjohtajavuoroillaan tehtävä. Koska kaikki pelaajat joutuvat noudattamaan projektiehdotuksissaan ja äänestyksissään yhtenevää strategiaa, myös käytännön pelin äänestyspäätöksiin vaikuttava pelaajan paikka ringissä menettää merkityksensä. Pelaajan olennaiset valinnat ideaalisessa pelissä ovat vastarinnan puolella projektien valinta ja vakoojana projektilla pelattavan kortin väri.

Tässä työssä tehtävässä tarkastelussa oletetaan, että pelaajilla on käytössä satunnaislukugeneraattori, jonka antamia arvoja vakoojat eivät voi kontrolloida. Jos näin ei olisi, optimaalisen pelistrategian lisäksi myös seuraavien projektien kokoonpanot eli seuraaville projekteille valittavat pelaajakombinaatiot eri skenaarioissa olisivat jo etukäteen vakoojien tiedossa. Tämä sallisi vakoojien optimoida korttien pelaamista varsin epäreilulta tuntuvalla tavalla, joten sitä ei mahdollisteta. Lisäksi on syytä muistaa, että tarkastelussa oletetaan toisen joukkueen tietävän mitä pelistrategiaa joukkue käyttää ja vastaavan tähän optimaalisella eli vastapuolen voittotodennäköisyydeen maksimoivalla tavalla.

3 Pelin ensimmäinen kierros

Tässä kappaleessa tarkastellaan pelin ensimmäistä kierrosta. Kappaleessa 3.1 tarkastellaan projektin kokoonpanoa ja lasketaan eri pelaajamäärille todennäköisyydet nollalle ja yhdelle vakoojalle projektilla. Oletetaan, että ensimmäisen kierroksen projektin kokoonpano joko kiinnittyy pelaajille arvottujen paikkojen perusteella, tai se arvotaan kierroksen aluksi. Kappaleessa 3.2 tarkastellaan pelattavan kortin väriin liittyvää valintaa vakoojan näkökulmasta.

3.1 Projektin muodostus

Määritellään, että projekti onnistuu vastarinnan näkökulmasta, jos projektilla on pelkkää vastarintaa. Jos projektilla puolestaan on tasan yksi vakooja määritellään, että projekti onnistui vakoojien näkökulmasta. Tarkastellaan ensimmäisen kierroksen projektin onnistumistodennäköisyyttä molemmille joukkueille.

Riippumatta siitä kumman kortin vakooja pelaa hänen oletetaan pelaavan optimaalisesti. Mustan kortin pelaamalla hän saa vakoojille suoraan yhden pisteen verran hyötyä. Jos hän päätyisi pelaamaan punaisen kortin, olisi odotusarvoinen hyöty vähintään yhtä suuri. Jätetään määrittelemättä tilanne, jossa projektilla on enemmän kuin yksi vakooja.

Projekti onnistuu vastarinnan näkökulmasta todennäköisyydellä

$$\frac{\binom{v}{k}}{\binom{n}{k}} = \prod_{a=0}^{k-1} \frac{v-a}{n-a} = \prod_{a=0}^{k-1} \frac{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor - a}{n-a}, \tag{1}$$

jossa n on pelaajien lukumäärä, k projektin koko ja v vastarintojen lukumäärä pelissä. Kaavassa 1 projektilla olemisen todennäköisyydeksi oletetaan k/n, eli tilannetta tarkasteleva pelaaja ei tiedä tuleeko hän olemaan läpimenevällä projektilla. Tämä oletus pätee, jos ensimmäisellä kierroksella vastarinta noudattaa mitä tahansa strategiaa, jossa pelaajan arvottu sijainti ringissä etukäteen kiinnittää sen onko pelaaja ensimmäisen kierroksen läpimenevällä projektilla. Kun vastarinta noudattaa jotain etukäteen sovittua kaikkien pelaajien tuntemaa strategiaa, vakoojatkin joutuvat tätä strategiaa noudattamaan, koska muuten he paljastuisivat välittömästi.

Projektin ulkopuolella olevan vastarinnan näkökulmasta projekti onnistuu todennäköisyydellä

$$\frac{\binom{v-1}{k}}{\binom{n-1}{k}} = \prod_{a=1}^{k} \frac{v-a}{n-a} = \prod_{a=1}^{k} \frac{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor - a}{n-a}. \tag{2}$$

Projektilla mukana olevan vastarinnan jäsenen näkökulmasta projektin onnistumistodennäköisyys on puolestaan

$$\frac{\binom{v-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1}} = \prod_{a=1}^{k-1} \frac{v-a}{n-a} = \prod_{a=1}^{k-1} \frac{\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor - a}{n-a}. \tag{3}$$

Kaavoissa 1-3 onnistuneen projektin todennäköisyys on ilmaistu kahdella eri tavalla. Vasemmanpuoleisessa binomimuodossa pelkkää vastarintaa sisältävien projektikombinaatioiden määrä on jaettu kaikkien mahdollisten projektikombinaatioiden määrällä. Oikeanpuoleisessa tulomuodossa projekti ikään kuin valitaan yksi henkilö kerrallaan ja tulo on todennäköisyys sille, ettei projektissa ole yhtäkään vakoojaa.

Taulukossa 3 on kaavojen 1-3 avulla eri pelaajamäärille lasketut todennäköisyydet sille, että ensimmäisen kierroksen projektilla on nolla vakoojaa. Havaitaan, että riippumatta pelaajamäärästä vastarinnan jäsenen pääsy projektille nostaa hänen näkökulmastaan projektin onnistumistodennäköisyyttä huomattavasti. Kolmella jaollisten pelaajamäärien tapauksessa onnistumistodennäköisyys kaksinkertaistuu. Muiden pelaajamäärien tapauksessa onnistumistodennäköisyys kasvaa vielä merkittävästi enemmän (kertoimen vaihteluväli 2.33-3).

Taulukko 3: Ensimmäisen kierroksen projektin onnistumistodennäköisyys vastarinnalle, eli todennäköisyys sille, että projektilla on nolla vakoojaa.

Pelaajamäärä	5	6	7	8	9	10
Yleisesti (kaava 1)	0.300	0.400	0.286	0.179	0.238	0.167
Pelaaja ei ole projektilla (kaava 2)	0.167	0.300	0.200	0.114	0.179	0.119
Pelaaja on projektilla (kaava 3)	0.500	0.600	0.500	0.286	0.357	0.278

Tarkastellaan todennäköisyyttä, jolla projekti onnistuu vakoojien näkökulmasta. Yleisesti, eli kaavan 1 tapaan, projekti onnistuu vakoojien näkökulmasta todennäköisyydellä

$$\frac{(n-v)\binom{v}{k-1}}{\binom{n}{k}} = k\frac{n-v}{n}\prod_{a=1}^{k-1}\frac{v+1-a}{n-a}. \tag{4}$$

Jos vastarinnan jäsen ei ole projektilla, todennäköisyys on

$$\frac{(n-v)\binom{v-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k}} = k\frac{n-v}{n-1}\prod_{a=1}^{k-1}\frac{v-a}{n-1-a}. \tag{5}$$

Jos vastarinnan jäsen puolestaan on projektilla, todennäköisyys on

$$\frac{(n-v)\binom{v-1}{k-2}}{\binom{n-1}{k-1}} = (k-1)\frac{n-v}{n-1}\prod_{a=1}^{k-2}\frac{v-a}{n-1-a}. \tag{6}$$

Vasemmalla puolella on kaavojen 1-3 tapaan kombinaatiotarkastelu, osoittajassa sellaisten kombinaatioiden määrä, jossa valitaan yksi vakooja ja $k-1$ vastarintaa. Nimittäjässä on kaikkien mahdollisten kombinaatioiden lukumäärä. Oikealla puolella on tulomuoto. Tulomuodon keskimmäinen termi on todennäköisyys valita vakooja ensimmäisenä ja oikeanpuoleinen tulo on todennäköisyys valita sen jälkeen pelkkää vastarintaa. Vasemmanpuoleisin termi on symmetrian nojalla lausekkeen täydentävä niiden järjestysten määrä, joilla projektin jäsenet voidaan valita, kun samalla puolella olevat pelaajat rinnastuvat.

Taulukossa 4 on kaavojen 4-6 avulla eri pelaajamäärille lasketut todennäköisyydet sille, että ensimmäisen kierroksen projektissa on tasan yksi vakooja. On syytä huomata että ainoa oletus, jonka pohjalta vastarinta voisi tämän taulukon perusteella määrittää itselleen optimaalisen strategian olisi se, että aina jos projektissa olisi yli yksi vakooja, kaikki vakoojat pelaisivat punaisen kortin. Tällainen oletus, jossa vakoojat pelkäisivät paljastumistaan niin paljon etteivät ole valmiita ottamaan riskiä yli yhden mustan kortin pelaamisesta, on varsin karkea eikä välttämättä kuvaa peliä hyvin.

Kaavat 1-6 yleistyvät projektin onnistumistodennäköisyyksiksi myös muille kierroksille lukuunottamatta (*)-merkittyjä kierroksia, jos sivuutetaan aiemmilla projekteilla pelattujen korttien väreistä saatu informaatio. Pelatuista korteista saadulla informaatiolla viitataan loogisiin seuraussuhteisiin eli ns. implikaatioihin, joita syntyy kun pelaajat saavat tietää mitä kortteja projektilla ollut pelaajien osajoukko on pelannut.

3.2 Kortin pelaaminen

Tässä kappaleessa tarkastellaan kortin pelaamiseen liittyvää valintaa vakoojana, sekä lasketaan mahdollisten vakoojakombinaatioiden määrät ensimmäisellä projektilla pelattujen korttien värien perusteella.

Vakoojakombinaatiolla tarkoitetaan pelaajien osajoukkoa, johon kuuluu kaikki vakoojat eikä yhtään vastarintaa. Mahdollisella vakoojakombinaatiolla tarkoitetaan

Taulukko 4: Ensimmäisen kierroksen projektin onnistumistodennäköisyys vastarinnan näkökulmasta vakoojille eli todennäköisyys sille, että projektilla on tasan yksi vakooja.

Pelaajamäärä	5	6	7	8	9	10
Yleisesti (kaava 4)	0.600	0.533	0.571	0.536	0.536	0.500
Pelaaja ei ole projektilla (kaava 5)	0.667	0.600	0.600	0.514	0.536	0.476
Pelaaja on projektilla (kaava 6)	0.500	0.400	0.500	0.571	0.536	0.556

vastarinnan näkökulmasta pelaajien osajoukkoa, joka voi olla vakoojakombinaatio. Tarkastellaan esimerkkiä, jossa pelissä on seitsemän pelaajaa, eli kolme vakoojaa ja neljä vastarinnan jäsentä. Ensimmäisellä projektilla on pelaajat A ja B. Projektilla pelataan yksi musta kortti. Koska projektilla oli vähintään yksi vakooja, pelaajien osajoukko C, D, E ei ole mahdollinen vakoojakombinaatio. Esimerkiksi kombinaatiot A, C, E ja A, B, F ovat mahdollisia vakoojakombinaatioita.

Käytetään pelin pistetilanteelle merkintätapaa, jossa ensimmäisenä ilmoitetaan vastarinnan pistemäärä ja toisena vakoojien pistemäärä. Jos vastarinnalla olisi esimerkiksi yksi piste ja vakoojilla kaksi, olisi pelitilanne $1-2$. Vastarinnan jäsenien on pelin sääntöjen mukaan aina pelattava punainen kortti. Vakooja voi pelata joko mustan tai punaisen kortin. Jos projektilla on pelkkää vastarintaa, he pelaavat kaikki punaisen kortin, jolloin peli on ensimmäisen kierroksen jälkeen $1-0$ vastarinnalle.

Jos projektilla on yksi vakooja, hänen pelatessaan mustan kortin peli on $0-1$. Vastaavasti jos hän pelaa punaisen kortin, peli on $1-0$. Jos vakooja pelaa punaisen kortin, vastarinnan näkökulmasta kaikki vakoojakombinaatiot ovat edelleen mahdollisia. Jos vakooja pelaa mustan kortin, yleisesti vastarinnan näkökulmasta mahdollisten vakoojakombinaatioiden lukumäärä vähenee pelin alun määrästä

$$\binom{n}{n-v} = \binom{n}{v} \tag{7}$$

määrään

$$\binom{n}{v} - \binom{n-k}{n-v}. \tag{8}$$

Jälleen n on pelaajamäärä, v on vastarintojen määrä ja k on projektin koko. Projektin ulkopuolella olevan vastarinnan jäsenen näkökulmasta mahdollisten kombinaatioiden määrä on

$$\binom{n-1}{v-1} - \binom{n-k-1}{n-v}, \tag{9}$$

ja projektilla mukana olevan vastarinnan jäsenen näkökulmasta määrä on puolestaan

$$\binom{n-1}{v-1} - \binom{n-k}{n-v}. \tag{10}$$

Kaavat 8-10 on muodostettu vähentämällä kaikkien mahdollisten kombinaatioiden määrästä kombinaatiot, jossa kaikki vakoojat ovat projektin ulkopuolella. Kaavoissa

9 ja 10 esiintyvä ensimmäinen termi on vastarinnan puolella olevan pelaajan näkökulmasta mahdollisten vakoojakombinaatioiden määrä tilanteessa, jossa vakoojilla ei ole vielä pisteitä.

Tarkastellaan yleisesti tilannetta, jossa projektilla on enemmän kuin yksi vakooja. On ilmeistä, että on vakoojille sitä edullisempaa, mitä vähemmän mustia kortteja projektilla pelataan, kunhan mustia kortteja pelataan vähintään yksi. Yhtä suurempi määrä mustia kortteja ei neljättä kierrosta lukuunottamatta tuota lisäpisteitä. Neljännen kierroksen erikoistapaus kuitenkin sivuutetaan tässä tarkastelussa. Paras mahdollinen pelitapa vakoojille projektilla olisi aina pelata tasan yksi musta kortti todennäköisyydellä u, ja todennäköisyydellä $1 - u$ pysyä täysin piilossa. On syytä huomata, että u voi olla 0 tai 1 useissa tilanteissa.

Edellä todetusta seuraa, että käytännön pelissä pelaajat voisivat tehdä keskenään jonkinlaisen sopimuksen korttien pelaamisesta. Sopimus määrittelisi, kuka vakoojista pelaa muuta kuin varmasti punaisen kortin tilanteessa, jossa projektilla on useampi vakooja. Esimerkki tälläisestä sopimuksesta voisi olla: "Numeroidaan pelaajat istumapaikkojensa mukaan. Ensimmäisen kierroksen ensimmäinen puheenjohtaja saa numeron 1, ja numerot kasvavat myötäpäivään kierrettäessä. Jos projektilla on vähintään kaksi vakoojaa, projektin vakoojista vain pieninumeroisin voi pelata muun kuin punaisen kortin". Tehty sopimus olisi Nash-tasapaino, eli yksittäisen pelaajan tekemä sopimuksen vastainen valinta heikentäisi hänen omia voittomahdollisuuksiaan, jos muut noudattavat sopimusta.

Oletetaan, että tällaista sopimusta ei ole tehty, eikä vakoojilla ole mitään mahdollisuutta salaisesti kommunikoida siihen liittyen kuka on mahdollisen mustan kortin pelaaja. Jokainen vakooja pelaa mustan kortin todennäköisyydellä $t = [0, 1]$, ja tämä todennäköisyys on samassa projektissa aina sama kaikille vakoojille.

Todennäköisyydet mahdollisille pelattujen mustien korttien määrälle projektilla on taulukoitu muuttujan t avulla taulukkoon 5. Taulukon arvot on määritetty binomikertoimien avulla. Tarkastellaan esimerkkinä kolmen projektilla olevan vakoojan tapausta. Kun kukin vakoojista pelaa mustan kortin todennäköisyydellä t todennäköisyys sille, että he pelaavat kaikki mustan kortin on t^3. Todennäköisyys kahdelle pelatulle mustalle kortille on todennäköisyys sille, että jotkin kaksi vakoojista pelaavat mustan kortin ja kolmas vakooja pelaa punaisen kortin. Kolmesta vakoojasta voi valita yhden punaisen kortin pelaavan vakoojan kolmella tavalla. Kun todennäköisyys sille, että jokin tietty vakooja pelaa punaisen kortin ja kaksi muuta vakoojaa mustan kortin on $t^2(1 - t)$, on todennäköisyys tasan kahden mustan kortin pelaamiselle $3t^2(1 - t)$.

Kahden vakoojan tilanne on olennainen kaikilla pelaajamäärillä 5-10, kolmen vakoojan tilanne on olennainen pelaajamäärillä 7-10, ja neljän vakoojan tilanne on olennainen vain kymmenen pelaajan tapauksessa.

Oletetaan, että minkäänlaista peliä edeltävää kortinpelaussopimusta ei ole tehty. Oletetaan kuitenkin, että vakoojat pystyvät kommunikoimaan pelin aikana pelaamiensa korttien avulla. Jos pelikierrosten 2-5 projekteilla on useampi vakooja siten, että jotkin heistä ovat aiemmalla kierroksella pelanneet jo kortteja, he ensisijaisesti jatkavat saman värisen kortin pelaamista. Tarkastellaan esimerkkinä tilannetta, jossa projektilla oleva yksinäinen vakooja A pelaa punaisen kortin. Myöhemmällä

Taulukko 5: Yleisesti todennäköisyydet sille, että projektilla pelataan tietty määrä mustia kortteja, kun siellä on vakoojia. Yksittäinen vakooja pelaa mustan kortin todennäköisyydellä t.

Vakoojien määrä projektilla	1	2	3	4
Nolla mustaa korttia	$(1-t)$	$(1-t)^2$	$(1-t)^3$	$(1-t)^4$
Yksi musta kortti	t	$2t(1-t)$	$3t(1-t)^2$	$4t(1-t)^3$
Kaksi mustaa korttia	0	t^2	$3t^2(1-t)$	$6t^2(1-t)^2$
Kolme mustaa korttia	0	0	t^3	$4t^3(1-t)$
Neljä mustaa korttia	0	0	0	t^4

projektilla on sekä vakooja A että toinen vakooja B. Nyt vakooja A pelaa varmasti punaisen kortin ja B tekee valinnan pelattavan kortin väristä. Tarkastellaan toisena esimerkkinä tilannetta, jossa vakoojat C ja D ovat molemmat projektilla. C pelaa mustan kortin ja D punaisen. Tästä eteenpäin D pelaa punaisen kortin aina ollessaan yhdessä projektilla C:n kanssa.

Jos ensimmäisen kierroksen projektilla on enemmän kuin yksi vakooja, pelitilanne on $1-0$ vastarinnalle, jos kaikki vakoojat pelaavat punaisen kortin. Jos yksi tai useampi vakooja pelaa mustan kortin, pelitilanne on $0-1$. Jos projektilla pelataan kaksi mustaa korttia, mahdollisten vakoojakombinaatioiden määrä yleisesti vastarinnan näkökulmasta on

$$\binom{k}{2}\binom{n-k}{n-v-2}+\binom{k}{3}\binom{n-k}{n-v-3}+\binom{k}{4}. \tag{11}$$

Projektin ulkopuolella olevan vastarinnan jäsenen näkökulmasta mahdollisten kombinaatioiden määrä on

$$\binom{k}{2}\binom{n-k-1}{n-v-2}+\binom{k}{3}\binom{n-k-1}{n-v-3}+\binom{k}{4} \tag{12}$$

ja projektilla mukana olevan vastarinnan jäsenen näkökulmasta puolestaan

$$\binom{k-1}{2}\binom{n-k}{n-v-2}+\binom{k-1}{3}\binom{n-k}{n-v-3}+\binom{k-1}{4}. \tag{13}$$

Kahden mustan kortin tapauksen kaavoja 11, 12 ja 13 vastaavat kaavat kolmen pelatun mustan kortin tilanteessa ovat seuraavat. Yleisessä eli kaavaa 11 vastaavassa tapauksessa mahdollisten vakoojakombinaatioiden määrä on

$$\binom{k}{3}\binom{n-k}{n-v-3}+\binom{k}{4}, \tag{14}$$

kaavaa 12 vastaavassa projektin ulkopuolisen tarkastelijan tapauksessa

$$\binom{k}{3}\binom{n-k-1}{n-v-3}+\binom{k}{4} \tag{15}$$

ja kaavaa 13 vastaavassa projektin sisäpuolisen tarkastelijan tapauksessa

$$\binom{k-1}{3}\binom{n-k}{n-v-3}+\binom{k-1}{4}. \tag{16}$$

Kaavojen 11-16 summien ensimmäiset termit ovat sellaisten kombinaatioiden määriä, joissa kaikki projektilla olleet vakoojat pelasivat mustan kortin. Muut termit ovat sellaisia kombinaatioita, joissa projektilla on myös yksi tai kaksi punaisen kortin pelannutta vakoojaa.

On syytä huomata, että jos projektilla pelattujen mustien korttien määrä on yhtä suuri kuin projektin jäsenten määrä ja yhtä suuri kuin vakoojien määrä pelissä, peli on ratkennut. Jos tällaisella projektilla vakoojat ovat saaneet kolmannen pisteensä, he voittavat. Jos taas eivät, pelissä on jäljellä vain yksi mahdollinen vakoojakombinaatio, joka on vain projektilla olleet pelaajat sisältävä pelaajien osajoukko. Loput projektit on mahdollista muodostaa pelaajien osajoukosta, johon kuuluu kaikki paitsi projektilla olleet pelaajat, eli kaikki pelaajat jotka eivät kuulu vakoojakombinaatioon. Kutsutaan tällaista osajoukkoa vakoojakombinaation komplementiksi.

Kymmenen pelaajan tapauksessa projektilla on aina enintään tasan puolet pelaajista. Tällöin pelin ratkeamiseen riittää, että projektilla pelattujen mustien korttien määrä on yhtä suuri kuin vakoojien määrä pelissä. Tämän vuoksi mahdollisten vakoojakombinaatioiden määrä tilanteessa jossa projektilla pelataan neljä mustaa korttia, ei ole olennainen. Taulukossa 6 on esitetty kaavojen 7-16 avulla lasketut mahdollisten vakoojakombinaatioiden määrät ensimmäisen projektin jälkeen.

Taulukko 6: Mahdollisten vakoojakombinaatioiden määrät ensimmäisen kierroksen projektin jälkeen eri pelaajamäärille. Vasen sarake kertoo tarkastelun näkökulman ja projektilla pelattujen mustien korttien lukumäärän. Lihavoidut yleisesti-rivit esittävät kaikkien mahdollisten kombinaatioiden määrät käyttäen vain pelattujen korttien väristä saatua informaatiota. Muilla riveillä kombinaatiot on laskettu joko projektilla tai sen ulkopuolella olevan vastarinnan jäsenen näkökulmasta. Taulukon tyhjät ruudut eivät ole mahdollisia pelitilanteita.

Pelaajamäärä	5	6	7	8	9	10
Nolla mustaa, yleisesti	10	15	35	56	84	210
Nolla mustaa, pelaajan näkökulma	6	10	20	35	56	126
Yksi musta, yleisesti	7	9	25	46	64	175
Yksi musta, proj.ulk. näkökulma	5	7	19	31	46	111
Yksi musta, proj.sis. näkökulma	3	4	16	25	36	91
Kaksi mustaa, yleisesti	1	1	13	16	19	70
Kaksi mustaa, proj.ulk. näkökulma	1	1	10	13	16	51
Kaksi mustaa, proj.sis. näkökulma			4	5	6	7
Kolme mustaa, yleisesti			1	1	1	1
Kolme mustaa, proj.ulk. näkökulma			1	1	1	1
Kolme mustaa, proj.sis. näkökulma						

Havaitaan että lopputulos, jossa projektilla pelataan yksi musta kortti vähentää yleisesti mahdollisten vakoojakombinaatioiden määrää pelaajamäärästä riippuen n. 17-40 prosenttia. Suurimmat suhteelliset kombinaatioiden vähennykset tapahtuvat pienillä pelaajamäärillä. Viiden pelaajan tapauksessa mahdollisten kombinaatioiden määrä vähenee 30 prosenttia ja kuuden pelaajan tapauksessa 40 prosenttia. Kuutta suuremmilla pelaajamäärillä vakoojien kokonaismäärä on vähintään kolme ja tällöin mahdollisten vakoojakombinaatioiden määrä pienenee suhteellisesti vähemmän, vaihteluvälin ollessa 17-29 prosenttia. Seitsemän pelaajan (29 prosenttia) ja yhdeksän pelaajan (24 prosenttia) tapauksissa kombinaatioiden määrä vähenee suhteellisesti enemmän kuin kahdeksan ja kymmenen pelaajan tapauksissa (18 ja 17 prosenttia).

Mahdollisten kombinaatioiden määrät pienenevät suhteellisesti enemmän pienillä pelaajamäärillä, mistä voidaan tehdä johtopäätös, että suuremmilla pelaajamäärillä vakoojan kannattaa todennäköisemmin pelata musta kortti. Toisin sanoen pienillä pelaajamäärillä vakoojat antavat suhteellisesti enemmän informaatiota vastarinnalle pelaamalla mustan kortin, joten pienillä pelaajamäärillä vakoojat haluavat todennäköisemmin pelata punaisia kortteja. Tämä johtopäätös ei kuitenkaan huomioi esimerkiksi eri pelaajamäärien erilaisia pelikaavioita myöhemmän pelin suhteen, joten siihen on suhtauduttava suurella varauksella. Ylipäätään sellaisiin johtopäätöksiin kortin pelaamisstrategiaan liittyen, joiden tekemiseksi kaikkia pelin kierroksia ei ole perusteellisesti tarkasteltu, on suhtauduttava varauksella.

Taulukon 6 ruudut, joissa mahdollisten vakoojakombinaatioiden määrä on yksi, ovat ratkenneita pelitilanteita. Esimerkiksi jos viiden tai kuuden pelaajan tapauksessa projektilla pelataan kaksi mustaa korttia tiedetään, että projektin kaksi jäsentä ovat pelin molemmat vakoojat. Tämän jälkeen vastarinnat voittavat pelin toteuttamalla projekteja, missä on ainoastaan pelaajia ensimmäisen projektin eli varman vakoojakombinaation komplementista. Tätä strategiaa noudattamalla peli päättyy vastarinnan $3-1$ voittoon.

4 Pelitilanteen evaluointi

Tässä kappaleessa perustellaan, miksi edellä tehdystä ensimmäisen kierroksen tarkastelusta ei saada tulokseksi ensimmäisen kierroksen optimaalista pelistrategiaa. Kappaleessa kuvataan ensimmäisen projektin jälkeisen pelitilanteen tarkasteluun littyvä ongelma, sekä pohditaan voiko kaikkia pelissä jaettavia pisteitä tarkastella saman arvoisina.

Jos ensimmäisen kierroksen mustan kortin pelaamistodennäköisyys t (tai vaihtoehtoisesti tehdyn kortinpelaussopimuksen tapauksessa todennäköisyys u) pystyttäisiin määrittämään, sitä hyödyntäen voisi suoraviivaisesti edetä toisen pelikierroksen tarkasteluun. Mutta voittomahdollisuudet maksivoivaa todennäköisyyttä t ei ole mahdollista määrittää suoraviivaisesti. Todennäköisyyden t määrittämiseksi pitäisi pystyä evaluoimaan eri lopputulokset, eli määrittämään numeeriset arvot mahdollisten ensimmäisen kierroksen jälkeisten pelitilanteiden hyvyyksille vakoojien näkökulmasta. Toinen vaihtoehto olisi kaikkien pelikierrosten perusteellinen tarkastelu mm. aiempien kierroksien todennäköisyysmuuttujia apuna käyttäen, mutta kyseisen tapauskäsittelyn tekeminen on rajattu tämän työn ulkopuolelle.

Tarkastellaan pelitilanteen evaluaatioon liittyvää ongelmaa käyttäen esimerkkinä viiden pelaajan tapausta. Kaavoista 1 ja 4 saadaan todennäköisyydet mahdollisille vakoojamäärille ensimmäisellä projektilla. Viiden pelaajan tapauksessa todennäköisyys nollalle vakoojalle projektilla on 0.3, todennäköisyys yhdelle vakoojalle on 0.6, ja todennäköisyys kahdelle vakoojalle on 0.1. Yleisesti todennäköisyys sille, että ensimmäisellä projektilla on a vakoojaa ja projektilla pelataan b mustaa korttia on $w_a \cdot T_{a,b}$, missä w_a on todennäköisyys sille, että projektilla on a vakoojaa, ja todennäköisyys $T_{a,b}$ saadaan taulukosta 5. Erikoistapauksena on t:stä riippumaton tilanne, jossa projektilla ei ole ollenkaan vakoojia. Tällöin $T_{0,0} = 1$ ja $T_{0,b} = 0$, kun $b > 0$. Lausekkeen $w_a \cdot T_{a,b}$ arvot on esitetty muuttujien t_1 ja t_2 suhteen viiden pelaajan tapauksessa taulukossa 7.

Projektin lopputuloksen kannalta merkitystä on vain sillä, montako mustaa korttia pelataan. Kuitenkin myöhempien kierrosten strategisissa valinnoissa esimerkiksi sillä voi olla merkitystä, mikä on todennäköisyys tietylle määrälle vakoojia aiemmalla projektilla, kun tiedetään että projektilla pelattiin tietty määrä mustia kortteja. Siksi kaikkien vakoojamäärä-korttijakauma-kombinaatioiden todennäköisyydet ovat olennaisia.

Taulukko 7: Ensimmäisen kierroksen projektin lopputulosten todennäköisyydet muuttujien t_1 ja t_2 suhteen viiden pelaajan tapauksessa. Muuttujien t_a alaindeksi a on vakoojien tiedossa oleva todennäköisyyteen t vaikuttava vakoojien määrä projektilla.

Vakoojien määrä projektilla	0	1	2
Nolla mustaa korttia	0.3	$0.6 \cdot (1 - t_1)$	$0.1 \cdot (1 - t_2)^2$
Yksi musta kortti	0	$0.6 \cdot t_1$	$0.2 \cdot t_2(1 - t_2)$
Kaksi mustaa korttia	0	0	$0.1 \cdot t_2^2$

Tiedetään, että jos kaikki projektin jäsenet pelaavat punaisen kortin, pelitilanne on 1-0. Tämän todennäköisyys on viiden pelaajan tapauksessa taulukon 7 ylimmän todennäköisyysrivin summa eli $0.3 + 0.6 \cdot (1 - t_1) + 0.1 \cdot (1 - t_2)^2$. Jos projektilla pelataan yksi musta kortti, pelitilanne on 0-1. Tämän todennäköisyys on viidellä pelaajalla vastaavasti $0.6 \cdot t_1 + 0.2 \cdot t_2(1 - t_2)$. Todennäköisyys sille, että projektilla pelataan kaksi mustaa korttia, on $0.1 \cdot t_2^2$. Tällöin vakoojat saavat pisteen, mutta häviävät pelin varmasti sen jälkeen eli pelitilanne on $3 - 1$.

Jos todennäköisyydet t_1 ja t_2 (ja vastaavasti suurempien pelaajamäärien tapauksessa myös todennäköisyydet t_3 ja t_4) pystyisi määrittämään, pelin optimaalinen strategia olisi ratkaistu ensimmäisen kierroksen osalta. Niiden määrittämiseksi pitäisi viiden pelaajan tapauksessa pystyä vertaamaan keskenään ainakin pelitiloja $0 - 1$, $1 - 0$ ja $3 - 1$. Naiivi idea olisi evaluoida pelitilanteet siten, että kaikki pelin pisteet oletettaisiin saman arvoisiksi eli pelitilanteen numeerinen hyvyys vakoojien näkökulmasta olisi vakoojien pistemäärän ja vastarinnan pistemäärän erotus. Kutsutaan tällaista evaluaatiota tasapiste-evaluaatioksi. Mahdolliset pelitilat ensimmäisen kierroksen jälkeen viiden pelaajan tapauksessa ovat $0-1$, $1-0$ ja $3-1$. Tulkitaan tila $3-1$ tilaksi $3-0$, koska peli on päättynyt vastarinnan voittoon ja ainoastaan voittajalla on Vastarinta-pelissä merkitystä. Tasapiste-evaluaatiolla pelitilanteen numeerinen hyvyys on siis joko 1, -1 tai -3. On selvää, että tasapiste-evaluaation perusteella projektilla olevan yksittäisen vakoojan strategia on pelata aina musta kortti, koska mustan kortin pelaamalla pelitilanteen hyvyys on 1 ja punaisen kortin pelaamalla -1. Saadaan, että tasapiste-evaluaatiolla $t_1 = 1$.

Optimaalinen eli pelitilanteen odotusarvoisen hyvyyden maksimoiva todennäköisyys pelata musta kortti kahden projektilla olevan vakoojan tapauksessa ratkeaa lausekkeesta

$$\frac{d}{dt_2} 0.2 \cdot t_2(1-t_2) - 0.1 \cdot (1-t_2)^2 - 3 \cdot 0.1 \cdot t_2^2 = -1.2t_2 + 0.4. \tag{17}$$

Lausekkeen vasen puoli on pelitilanteen odotusarvoinen numeerinen hyvyys määritettynä muuttujan t_2 suhteen. Eri tilanteiden todennäköisyydet on kerrottu niiden hyvyydellä. Optimaalinen t_2 on vasemman puolen lausekkeen maksivoiva arvo. Derivaatan nollakohtaa ja kulmakerrointa tarkastelemalla saadaan, että tasapiste-evaluaatiolla pelitilanteen odotusarvoisen hyvyyden maksimoi $t_2 = 1/3$. Seuraavassa kappaleessa tutkitaan tasapiste-evaluaation tuottamien arvojen mielekkyyttä viiden pelaajan tapauksessa.

5 Kahden pelistrategian vertaaminen

Tässä kappaleessa osoitetaan, että tasapiste-evaluaation mukainen pelistrategia, jossa viiden pelaajan tapauksessa ensimmäisen kierroksen strategia on $t_1 = 1$, $t_2 = 1/3$, ei ole optimaalinen pelistrategia. Kutsutaan tätä pelistrategiaa aggressiiviseksi pelistrategiaksi, ja tarkastellaan pelistrategiaa kappaleessa 5.1. Kappaleessa 5.1.1 tutkitaan arvojen $t_1 = 1$, $t_2 = 1/3$ mielekkyyttä. Kappaleessa 5.1.2 määritetään, kuinka suuren osuuden peleistä vakoojat voittavat aggressiivisella pelistrategialla. Kappaleessa 5.2 tutkitaan, kuinka suuren osuuden peleistä vakoojat voittavat vaihtoehtoisella, mielivaltaisella pelistrategialla. Strategiassa vakoojat pelaavat projekteilla 1 ja 3 vain punaisia kortteja eli uhraavat pelin ensimmäisen ja kolmannen pisteen vastarinnalle.

Tässä kappaleessa käytetään projekteille merkintätapaa $P_m = \{A, B\}$, jossa m on projektin järjestysnumero ja {A, B} on projektiin kuuluva pelaajien osajoukko, eli pelaajat A ja B osallistuvat projektiin.

5.1 Aggressiivinen pelistrategia

5.1.1 Muuttujien tarkastelu

Tutkitaan, onko $t_2 = 1/3$ optimaalinen strategia annettuna $t_1 = 1$. Mikäli näin ei ole, on selvää että tasapiste-evaluaation mukainen strategia ei ole optimaalinen.

Koska $t_1 = 1$, niin tapaus, jossa ensimmäinen projekti tuottaa kaksi punaista korttia, on mahdollinen vain neljällä vakoojakombinaatiolla. Numeroidaan pelaajat yhdestä viiteen, ja kiinnitetään ensimmäinen projekti $P_1 = \{1, 2\}$. Mahdolliset vakoojakombinaatiot ovat tilanteessa $1 - 0$ siis $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 5\}$.

Jos vakoojakombinaatio on joku kombinaatioista $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 5\}$, peli päätyy tilaan $1 - 0$ todennäköisyydellä 1. Jos vakoojakombinaatio on $\{1, 2\}$, tilaan $1 - 0$ päädytään, jos molemmat vakoojat pelaavat punaisen kortin eli todennäköisyydellä $(1 - t_2)^2$. Todennäköisyys sille, että vakoojakombinaatio on $\{1, 2\}$ on siis $(1 - t_2)^2/(3 + (1 - t_2)^2)$. Vastaavasti muiden kombinaatioiden todennäköisyydet ovat $1/(3 + (1 - t_2)^2)$. Riippumatta todennäköisyyden t_2 arvosta tiedetään, että kombinaatio $\{1, 2\}$ on mahdollista vakoojakombinaatioista epätodennäköisin, eli vähintään yhtä epätodennäköinen kuin muut vakoojakombinaatiot.

Vastarinnan paras strategia kolmannelle projektille eli pelin toiselle kahden pelaajan projektille on $P_3 = \{1, 2\}$. Mikäli sekä pelaajat 1 että 2 ovat vastarintoja, projekti tuottaa varmasti pisteen, jolloin pelitilanne on joko $2 - 1$ tai $3 - 0$. Jos $\{1, 2\}$ on vakoojakombinaatio, projektin lopputulos on sama, sillä heidän paras strategia on pelata kaksi punaista korttia. Vakoojat eivät kyseisestä projektista ole saamassa kolmatta pistettä, ja yhden (tai kahden) mustan kortin pelaaminen jättäisi kombinaation $\{1, 2\}$ pelin ainoaksi mahdolliseksi vakoojakombinaatioksi. Vain yhden mahdollisen vakoojakombinaation tilanne johtaa vakoojien häviöön vastarinnan pelatessa $P_4 = P_5 = \{3, 4, 5\}$.

Vastarinta saa pisteet ainakin projekteista 1 ja 3. Voittaakseen vastarinnan tarvitsee valita täsmälleen oikea vastarintakombinaatio jollekin projekteista 2, 4, 5. Mainittakoon erikoistapauksena, että vastarinta voittaa myös saamalla projektista muotoa $P_2 = \{1, 2, X\}$ lopputulokseksi nolla tai kaksi mustaa korttia. Tämä huomio ei vaikuta vastarinnan pelistrategiaan, sillä vakoojakombinaatio {1,2} on neljästä vaihtoehdosta epätodennäköisin. Vastarinnan paras strategia on riippumatta t_2:n arvosta laittaa projekteiksi kolmen todennäköisimmän vakoojakombinaation komplementit, eli esimerkiksi $P_2 = \{1, 2, 3\}, P_4 = \{1, 2, 4\}, P_5 = \{1, 2, 5\}$.

Tarkastellaan seuraavaksi tilannetta, jossa ensimmäisellä projektilla $P_1 = \{1, 2\}$ pelataan yksi musta kortti. Tässä tapauksessa mahdollisia vakoojakombinaatioita ovat $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$. Kaikissa tapauksissa vakoojat ovat onnistuneet kommunikoimaan toisilleen pelattujen korttien avulla, minkä kortin he pelaavat jatkossa päätyessään yhdessä projektille. Tästä eteenpäin ei ole mahdollista, että millään projektilla pelattaisiin kaksi mustaa korttia. Koska lisäinformaatiota korttien (tai äänestyskäyttäytymisen) perusteella ei ole mahdollista saada, vastarintojen paras strategia on muodostaa projekteja, joissa on mahdollisimman todennäköisen vakoojakombinaation komplementti. Pelitilanne on $0 - 1$, joten vastarinnalla on käytettävissä kaksi yritystä muodostaa projekti, joka on todellisen vakoojakombinaation komplementti. Jos projekti 2 tuottaa mustan kortin ja $0 - 2$-pelitilanteen, optimaalinen jatkostrategia on muodostaa projektit 3 ja 4 muotoa $P_3 = \{X, Y\}$, $P_4 = \{X, Y, Z\}$. Tällöin projekti 3 epäonnistuu vain tilanteissa, joissa projekti 4 olisi joka tapauksessa epäonnistunut.

On selvää, että koska vakoojakombinaatio $\{1, 2\}$ on epätodennäköisin mahdollinen, valintaa $\{3, 4, 5\}$ pelin toiseksi tai neljänneksi projektiksi ei koskaan tehdä. Vastarinnan pelatessa optimaalisesti vakoojat voittavat varmasti tilanteessa, jossa vakoojakombinaatio on $\{1, 2\}$ ja ensimmäisellä projektilla pelataan yksi musta kortti.

Tiedetään, että vakoojakombinaation $\{1, 2\}$ tapauksessa vakoojat voittavat vain, jos he pelaavat ensimmäisellä kierroksella tasan yhden mustan kortin, tai jos he pelaavat ensimmäisellä kierroksella nolla mustaa korttia ja toisella kierroksella yhden. Toisen kierroksen tapauksessa mustan kortin pelaamistodennäköisyys t on lausekkeen $2t(1-t)$ maksivoiva 0.5. Tästä saadaan ratkaistua lausekkeella

$$\frac{d}{dt_2}2t_2(1-t_2) + 0.5(1-t_2)^2 = -3t_2 + 1, \tag{18}$$

että oletuksella $t_1 = 1$ optimaalinen todennäköisyys $t_2 = 1/3$. Kaavassa 18 vasemmalla puolella on vakoojien voittotodennäköisyys, jonka maksimoiva muuttujan t_2 arvo löytyy derivaatan eli lausekkeen oikean puolen nollakohdasta.

Tasapiste-evaluaation tarjoama $t_2 = 1/3$ todella on optimaalinen strategia, jos oletetaan $t_1 = 1$ strategian osaksi. Tulokseen on kuitenkin syytä suhtautua varauksella, sillä eri tavoin määritetyt muuttujan t_2 arvot voivat olla samat täysin sattumalta.

5.1.2 Vakoojien voittotodennäköisyys

Määritetään vakoojien voittotodennäköisyys, kun vakoojat noudattavat aggressiivista pelistrategiaa. Tavoitteena on myöhemmin löytää strategia, jossa $t_1 \neq 1$, ja jossa vakoojien voittotodennäköisyys on suurempi.

Noudattamalla yllä ratkaistua parasta strategiaa, vastarinta voittaa pelin aina, kun ensimmäisellä projektilla on kaksi vastarinnan jäsentä. Tämän todennäköisyys on 3/10. Jos ensimmäisellä projektilla on yksi vakooja (todennäköisyys 6/10), vastarinta voittaa pelin vain jos toinen kahdesta arvotusta vakoojakombinaatioarvauksesta on oikea. Tämän todennäköisyys on $1 - 5/6 \cdot 4/5 = 1/3$, kun kombinaatiota $\{1, 2\}$ ei koskaan arvata. Sijoittamalla kaavassa 18 derivoitavaan lausekkeeseen lausekkeen arvon maksivoivan arvon $t_2 = 1/3$ saadaan todennäköisyys sille, että kahden ensimmäisellä projektilla olevan vakoojan tapauksessa vakoojat voittavat. Todennäköisyys on $2 \cdot 1/3 \cdot (1 - 1/3) + 0.5(1 - 1/3)^2 = 2/3$, josta saadaan että vastarinnat voittavat tässä tapauksessa pelin todennäköisyydellä $1 - 2/3 = 1/3$. Kun vakoojat pelaavat parhaalla mahdollisella strategialla alkuoletuksella $t_1 = 1$, vastarinnat voittavat pelin todennäköisyydellä $3/10 + 1/3 \cdot 7/10 = 8/15 \approx 0.533$.

Viiden pelaajan tapauksessa vakoojien parhaalla mahdollisella sellaisella kortinpeluustrategialla, jossa $t_1 = 1$, vakoojat voittavat noin 46,7 prosenttia peleistä. Kappaleessa 5.2 osoitetaan, että on olemassa parempi strategia. Paremman strategian olemassaolosta seuraa, että tasapiste-evaluaation mukainen aggressiivinen pelistrategia ei ole optimaalinen.

5.2 Pisteitä uhraava pelistrategia

Jos on olemassa pelistrategia, jossa vakoojat voittavat yli 46,7 prosenttia peleistä vastarinnan pelatessa optimaalisesti, tasapiste-evaluaation mukainen pelistrategia ei ole optimaalinen. Tutkitaan kuinka monta prosenttia vakoojat vähintään voittavat peleistä jos he pelaavat strategialla, jossa projekteilla 1 ja 3 pelataan aina punainen kortti.

Koska vakoojat pelaavat vain punaisia kortteja projekteilla 1 ja 3, vastarinta voittaa vain jos jollain projekteista 2, 4, 5 pelataan vain punaisia kortteja. Vakoojat pyrkivät projekteilla 2, 4, 5 aina pelaamaan vähintään yhden mustan kortin. Jos projektilla on vähintään yksi vakooja, tämä on mahdollista.

Vain yksi kombinaatio kymmenestä mahdollisesta kolmen pelaajan kombinaatioista sisältää pelkästään vastarintaa. Vastarinta voittaa varmasti vähintään todennäköisyydellä 3/10, koska projekteilla 2, 4 ja 5 pystytään kokeilemaan kolmea näistä kymmenestä kombinaatiosta. Jos oletettaisiin, että vakoojat voisivat kaikilla projekteilla salaisesti kommunikoida pelattavien korttien väreistä, projektilla ei koskaan pelattaisi yli yhtä mustaa korttia, koska useampi musta kortti antaa lisäinformaatiota vastarinnalle. Tällöin vastarinnan voittotodennäköisyys olisi tasan 3/10, koska viiden pelaajan pelissä kolmen pelaajan projekti, jolla pelataan yksi musta kortti, rajaa pois vain yhden mahdollisen vakoojakombinaation. Esimerkiksi jos ennen yhden mustan kortin tuottavaa projektia $P_m = \{1, 2, 3\}$ kaikki vakoojakombinaatiot ovat mahdollisia, projektin jälkeen kaikki vakoojakombinaatiot paitsi kombinaatio $\{4, 5\}$ ovat edelleen mahdollisia.

Kiinnitetään projekti $P_1 = \{1, 2\}$. Projektilla pelataan varmasti kaksi punaista korttia, joten kaikki vakoojakombinaatiot ovat edelleen mahdollisia ja yhtä todennäköisiä. Vastarintojen voittomahdollisuudet maksimoi strategia, jossa on mahdollisimman todennäköistä, että projektilla 2 pelataan joko 0 tai 2 mustaa korttia. Todennäköisyys nollalle vakoojalle projektilla on projektin valinnasta riippumatta aina 1/10, koska kaikki vakoojakomibnaatiot ovat mahdollisia ja yhtä todennäköisiä. Vastarinnan paras strategia on siis projektivalinnallaan maksimoida todennäköisyys, että projektilla on kaksi sellaista vakoojaa, jotka eivät kykene kommunoimaan pelattavien korttien väreistä. Jos vakoojakombinaatio on jokin kombinaatioista $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$, vakoojat pystyvät kommunikoimaan keskenään, eikä millään tulevalla kaksi vakoojaa sisältävällä projektilla pelata nollaa tai kahta mustaa korttia. Mahdolliset vakoojakombinaatiot $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 5\}$ eivät ensimmäisen projektin jälkeen kykene kommunikoimaan keskenään. Vastarinnan paras strategia on sisällyttää mahdollisimman monta tällaista kombinaatiota projektiin, joten $P_2 = \{3, 4, 5\}$.

Todennäköisyys sille, että projektilla $P_2 = \{3, 4, 5\}$ on nolla vakoojaa, on 1/10. Todennäköisyys yhdelle vakoojalle on 6/10, ja todennäköisyys kahdelle vakoojalle on 3/10. Annetaan vakoojille toisen kierroksen strategian osaksi $t_2 = 1/2$, ja osoitetaan että tällä strategialla vastarinta ei voi voittaa yli 53 prosenttia peleistä.

Jos projektilla pelataan nolla mustaa korttia, vastarinta voittaa pelin sillä oletetaan, että vakoojat pelaavat kolmannella projektilla aina punaista. Todennäköisyys nollalle mustalle kortille koostuu todennäköisyydestä nollalle vakoojalle ja todennäköisyydestä sille, että projektilla on kaksi vakoojaa, jotka pelaavat molemmat punaisen kortin. Todennäköisyys nollalle mustalle kortille on siis $1/10 + 3/10 \cdot (1 - t_2)^2 = 1/10 + 3/10 \cdot (1 - 1/2)^2 = 0.175$. Todennäköisyys kahdelle mustalle kortille on puolestaan $3/10 \cdot t_2^2 = 3/10 \cdot (1/2)^2 = 0.075$. Jos projektilla pelataan kaksi mustaa korttia, mahdollisia ja keskenään yhtä todennäköisiä vakoojakombinaatioita on kolme, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$ ja $\{4, 5\}$. Kun neljännen ja viidennen kierroksen projektit ovat kahden mahdollisen vakoojakombinaation komplementit, esim. $P_4 = \{1, 2, 5\}$, $P_5 = \{1, 2, 4\}$, vastarinnan voittotodennäköisyys kahden mustan kortin tapauksessa on $2/3 \approx 0.667$.

Todennäköisyys yhdelle mustalle kortille projektilla 2 on $1 - 0.175 - 0.075 = 0.75$. Jos lopputuloksena on yksi musta kortti, kaikki mahdolliset vakoojakombinaatiot pystyvät tästä eteenpäin kommunikoimaan pelattavien korttien väristä. Kolmannella projektilla pelataan varmasti vain punaisia kortteja, jonka jälkeen peli on $2-1$ vastarinnalle. Koska kaikki vakoojat pystyvät varmasti keskenään kommunikoimaan korttien väristä, vastarinta voittaa vain toteuttamalla joko kierroksella 4 tai 5 projektin, joka on oikean vakoojakombinaation komplementti.

Kaikki kahden pelaajan kombinaatiot poislukien kombinaatio $\{1,2\}$ ovat mahdollisia vakoojakombinaatioita. Kaikki mahdolliset kombinaatiot eivät kuitenkaan ole yhtä todennäköisiä. Vakooojakombinaatioiden $\{3,4\}$, $\{3,5\}$ ja $\{4,5\}$ tapauksissa toisella kierroksella ollaan pelattu tasan yksi musta kortti todennäköisyydellä $2t_2(1-t_2) = 2 \cdot 1/2(1-1/2) = 1/2$. Muiden kombinaatioiden tapauksessa toisella kierroksella ollaan varmasti pelattu tasan yksi musta kortti. Vastarinnan paras strategia on projekteilla 4 ja 5 pelata joidenkin todennäköisimpien vakoojakombinaatioiden $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$ komplementit, esimerkiksi $P_4 = \{2,4,5\}$, $P_5 = \{2,3,5\}$. Tällä strategialla vastarinta voittaa todennäköisyydellä $(2 \cdot 1)/(6 \cdot 1 + 3 \cdot 1/2) = 2/7.5 \approx 0.267$ silloin, kun toisella projektilla pelataan yksi musta kortti.

Yllä on laskettu todennäköisyydet vastarinnan voittotodennäköisyyksille kaikissa toisen projektin mahdollisissa lopputuloksissa, sekä näiden lopputulosten todennäköisyydet. Nämä yhdistämällä saadaan vastarinnan voiton todennäköisyydeksi oletetulla mielivaltaisella vakoojien kortinpeluustrategialla $0.75 \cdot 0.267 + 0.175 \cdot 1 + 0.075 \cdot 0.667 \approx 0.426$. Vastarinta siis voittaa 42,6 prosenttia peleistä ja vakoojat voittavat 57,4 prosenttia peleistä.

Aiemmin on osoitettu vakoojien voittavan 46,7 prosenttia peleistä, jos vakoojat pelaavat tasapiste-evaluaation mukaisella ensimmäisen kierroksen strategialla $t_1 = 1$, $t_2 = 1/3$, ja ensimmäisen kierroksen jälkeen pelaavat parhaalla mahdollisella tavalla. Nyt on osoitettu, että mielivaltaisella strategialla, jossa mm. ensimmäisen kierroksen strategia on $t_1 = 0$, $t_2 = 0$, vakoojat voittavat 57,4 prosenttia peleistä. Tämän perusteella voidaan todeta, että tasapiste-evaluaatio on vähintään epätäydellinen ja mahdollisesti jopa huono pelitilanteen hyvyyden kuvaaja. Toisin sanoen jonkun pelitilanteen hyvyyttä joukkueelle ei kuvaa oman joukkueen pistemäärän ja vastustajajoukkueen pistemäärän erotus.

6 Yhteenveto

Työn tavoitteena oli parantaa ymmärrystä Vastarinta-peliin liittyen. Työssä tarkasteltiin kattavasti pelin ensimmäistä kierrosta sekä osoitettiin, että kaikki pelissä jaettavat pisteet eivät ole saman arvoisia.

Työssä tehdyissä tarkasteluissa olennaiset oletukset olivat, että projektien ulkopuolisessa pelissä kaikki pelaajat pelaavat vastarinnan pelistrategian mukaisella tavalla. Pelaajilla on käytössään satunnaislukugeneraattori, jonka tuottamiin arvoihin vakoojat eivät pysty vaikuttamaan. Molemmat joukkueet tietävät, mitä strategiaa toinen joukkue noudattaa. Vakoojat pystyvät kommunikoimaan pelattavien korttien väreistä ainoastaan heidän aiemmilla projekteillaan pelaamien korttien avulla.

Merkittävä osa työtä oli ensimmäisen pelikierroksen tarkastelu. Tarkastelussa määritettiin todennäköisyydet kaikilla pelaajamäärillä sille, että satunnaisesti valitulla ensimmäisen pelikierroksen projektilla on mukana nolla vakoojaa tai yksi vakooja. Tarkastelussa myös määritettiin mahdollisten vakoojakombinaatioiden määrä pelissä ensimmäisen projektin jälkeen käyttäen tietoa siitä, mitä kortteja ensimmäisellä projektilla pelattiin. Vaikka peliä tarkasteltiin ideaalisesta näkökulmasta, edellä mainittuja tuloksia voidaan hyödyntää käytännön pelissä. Mahdollisten vakoojakombinaatioiden määrä ei riipu pelaajien taitotasosta tai pelistrategiasta. Jos käytännön pelissä ensimmäisen kierroksen projekti valitaan satunnaisesti, todennäköisyys tietylle vakoojien määrälle projektilla ei riipu tekijöistä, joihin pelaajat voisivat vaikuttaa.

Osana ensimmäisen kierroksen tarkastelua määritettiin, millä todennäköisyydellä projektilla pelataan tietty määrä mustia kortteja kun projektilla on tietty määrä vakoojia. Nämä todennäköisyydet riippuvat yksittäisen vakoojan mustan kortin pelaamisen todennäköisyydestä. Jotta nämä tulokset yleistyisivät käytännön peliin, kaikilla vakoojilla pitäisi olla sama todennäköisyys mustan kortin pelaamiselle. Tämä edellyttäisi, että kaikilla vakoojilla olisi täysin samanlainen käsitys pelistrategiasta ja että vakoojat eivät voisi kommunikoida keskenään muiden pelaajien huomaamatta. On kuitenkin ilmeistä, että käytännön pelin luonteeseen kuuluu epäsuora (ts. vaivihkainen) kommunikaatio ja kaikkien pelaajien käsitykset pelistä eivät ole identtiset.

Työssä osoitettiin kahta pelistrategiaa vertaamalla, että pelissä jaettavat pisteet eivät ole keskenään saman arvoisia. Aggressiivinen pelistrategia on paras mahdollinen sellainen strategia, jossa ensimmäisellä projektilla mukana oleva yksittäinen vakooja pelaa aina mustan kortin. Pisteitä uhraavassa pelistrategiassa vakoojat pelaavat pelin ensimmäisellä ja kolmannella projektilla vain punaisia kortteja. Aggressiivisella strategialla vakoojat voittavat 46,7 prosenttia peleistä ja pisteitä uhraavalla strategialla 57,4 prosenttia peleistä. Toisin sanoen vakoojat voittavat yli 20 prosenttia enemmän pelejä pisteitä uhraavalla strategialla kuin parhaalla mahdollisella sellaisella strategialla, jossa ensimmäisellä kierroksella pelataan aina kun mahdollista yksi musta kortti. Vaikka nämä tulokset eivät yleisty käytännön peliin antavat ne viitteitä siitä, että käytännön pelissäkään ei kannata pelata yksittäistä mustaa korttia aina kun se on mahdollista.

Tässä työssä käsitellystä Vastarinta-pelin versiosta ei ollut olemassa aikaisempaa tutkimusta. Kaikki tämän työn keskeiset tulokset ovat sellaista uutta tietoa, jota ei ole aiemmin akateemisessa kirjallisuudessa esitetty.

Pelikierrosten 2-5 perusteellinen tarkastelu on rajattu tämän työn ulkopuolelle. Jos kaikkien pelikierrosten mahdolliset tilanteet käytäisiin läpi, optimaalinen pelistategia ideaalisessa pelissä olisi oletettavasti mahdollista määrittää. Pelin optimaalisen pelistrategian määrittäminen kaikkia pelikierroksia tarkastellen on mahdollinen jatkotutkimusaihe. Vaihtoehtoinen lähestymistapa pelin tutkimiseen, jota tässä työssä ei käytetty, on pelin simulointi. Simuloinnissa voitaisiin esimerkiksi verrata useita vastarinnan pelistrategian ja vakoojien pelistrategian yhdistelmiä, ja määrittää joukkueiden voittotodennäköisyyksiä eri strategioilla. Yksi mahdollinen simulointimenetelmä olisi myös peliä pelaavan neuroverkon rakentaminen.

Viitteet

Boardgamegeek. The resistance. *Verkkosivu*. Viitattu 25.12.2021. Saatavissa: https://boardgamegeek.com/boardgame/41114/resistance.

M. Braverman, O. Etesami, ja E. Mossel. Mafia: A theoretical study of players and coalitions in a partial information environment. *Annals of Applied Probability 2008, Vol. 18, No. 3*, 2008.

Rulebook. The resistance rulebook. *Verkkosivu*. Viitattu 25.12.2021. Saatavissa: https://cdn.1j1ju.com/medias/1e/da/43-the-resistance-rulebook.pdf.

J. Serrino, M. Kleiman-Weiner, D. C. Parkes, ja J. B. Tenenbaum. Finding friend and foe in multi-agent games. *Advances in Neural Information Processing Systems, 32.*, 2019.

S. Tadelis. *Game Theory: An Introduction*. Princeton University Press, Princeton, 2013.

E. Yao. A theoretical study of mafia games. *arXiv:0804.0071*, 2008.