



Aalto-yliopisto

Mat-2.4177 Operaatiotutkimuksen projektityöseminaari

Kevät 2010

Korko-optioiden volatiliteettirakenteen estimointi

Pohjola - konserni

Väliraportti

19.3.2010

Robert Huuhilo	68931W (Projektipäällikkö)
Juhana Joensuu	67500P
Teppo Luukkonen	69204H
Juha Nuutinen	67564A
Ville Viitasaari	69963F

1 Projektin tavoitteet

Projektin tavoitteena on mallintaa Black-Scholes -mallin volatilitiiteettipinta korkokattosopimukseen liittyvien korko-optioiden hintojen määrittämiseksi. Tätä varten olemme vertailleet kirjallisuuskatsauksen perusteella erilaisia olemassa olevia optioiden hinnoittelumalleja. Toteutettava malli on valittu kirjallisuuskatsauksen perusteella ja mallin implementointi on aloitettu.

Tehtävä on rajattu yhden mallin toteutukseen. Tällä rajauksella pyritään projektin laajuuden säilyttämiseen tarkoituksenmukaisena sekä syvällisen ymmärryksen saavuttamiseen valitun mallin osalta. Kirjallisuuskatsaukseen onkin käytetty paljon aikaa, jotta valittu malli toteuttaisi tehtävänannon vaatimukset.

2 Toimenpiteet ja tulokset

2.1 Mallin valinta

Korko-optioiden hintojen volatilitiiteetin mallintamista varten on valittu kirjallisuuskatsauksen perusteella SABR - eli Stochastic Alpha, Beta, Rho - malli. Valitsimme parhaiten tehtävänantoa vastaavan mallin, joka

- kuvaa hyvin optioiden toteutuneiden hintojen volatilitiiteettiä
- on implementoitavissa kohtuullisella työmäärällä
- on helposti lähestyttävä
- on nopeasti kalibroituavissa

SABR on Brownin liikkeeseen perustuva volatilitiiteettimalli, jonka oletuksena on volatilitiiteetin sekä forward-korkojen stokastinen vaihtelu ajan suhteen. Tutkimusten perusteella malli kuvaa hyvin optioiden hintojen volatilitiiteetin smile-efektiä ja on implementoitavissa kohtuullisella työmäärällä. Mallille on löydettävissä analyttinen ratkaisu, minkä vuoksi mallin implementointi sekä kalibrointi annetulla markkinahistorialla ovat toteuttamiskelpoisia projektin laajuudessa. Lisäksi malli antaa suoraan volatilitiiteetin lisäksi volatilitiiteetin volatilitiiteetin, josta nähdään hintojen volatilitiiteetin vaihtelu kullakin maturiteetilla ja strike-hinnalla.

SABR-malli on yleisesti käytössä optioiden hinnoittelussa sen nopeuden ja suoraviivaisen kalibroinnin vuoksi. Mallin kalibrointiin on kuitenkin erilaisia lähestymistapoja, jotka voivat vaikuttaa merkittävästi mallin antaman sovituksen selittävytyteen. Erilaisista lähestymistavoista valitaan toteutuneeseen markkinadataan parhaimman sovituksen antava menetelmä. Menetelmää testataan myös ennustamalla markkinahistorian perusteella hintojen toteutuneita volatilitiiteettejä, jolloin saamme tuloksia laajemmasta aikaikkunasta. [1]

2.2 Datan analysointi

Saimme toimeksiantajalta mallin kalibroimista varten tarkan datan kaikkien tarvittavien Euriborin forward-korkojen arvosta (ts. $f(t, t+vuosi)$, jossa $t = \{0...9\}$) jokaiselta päivältä vuoden 2007 alusta lähtien. Kyseiset forward-korot ovat riittävä tieto kohde-etuksien hinnoista.

Lisäksi käytössämme on markkinahinnat erilaisille korkokattosopimuksille eli capeille ilmaistuna ns. flat-volatilitiiteetteina. Flat-volatilitiiteetti on volatilitiiteetin arvo, jolla voidaan laskea kullekin capin capletille sellainen hinta, joka summattuna antaa capille oikean hinnan. Tosiasiassa eri capleteilla on erisuuret implisiittisen volatilitiiteetin arvot. Näin ollen flat-volatilitiiteetti soveltuu ensisijaisesti koko korkokattosopimuksen hinnan määrittämiseen. Tässä työssä on kuitenkin tarpeen selvittää yksittäisten

caplettien arvot. Tätä varten suoritetaan ns. caplet stripping, jossa capien hinnoista päätellään yksittäisten caplettien hinnat.

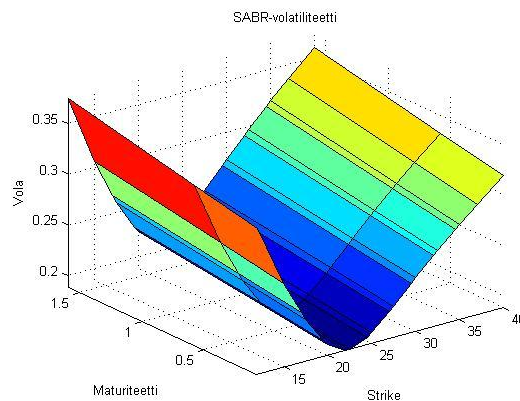
2.3 Parametrien estimointi

SABR-malli tarjoaa kaavan (1) mukaisen analyttisen ratkaisun implisiittiselle volatiliiteettipinnalle. Tulokseen päästään etsimällä alla olevalle stokastiselle differentiaaliyhtälösystemille Blackin yhtälöt toteuttava ratkaisu.

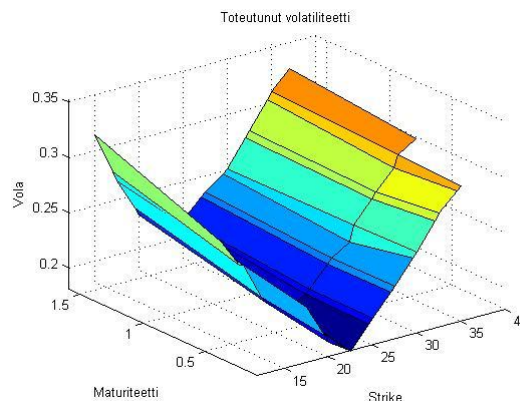
$$\begin{aligned}dF &= \alpha F^\beta dW_1 \\d\alpha &= v\alpha dW_2 \\dW_1 dW_2 &= \rho dt.\end{aligned}\tag{1}$$

Mallin kalibrointi tapahtuu estimoimalla mainitut parametrit siten, että mallin antama ennuste eroaa mahdollisimman vähän markkinoilla toteutuneista optioiden hinnoista. Käytännössä estimointi toteutetaan minimoimalla ennusteen ja toteutuneiden arvojen erotuksen neliösummaa.

Neliösummalausekkeen muodostamisessa olemme testanneet kahta eri menetelmää. Ensimmäisessä tavassa havaittuun volatiliiteettipintaan on sovitettu ennustettu pinta siten, että pintaa kuvaavat pelkästään edellä mainitut neljä parametria. Toisessa tavassa parametrit α , β , ρ ja v on estimoitu jokaista maturiteettia kohden erikseen. Tämän jälkeen volatiliiteettipinta on saatu muodostettua liittämällä eri maturiteettien volatiliiteetikäyrät yhteen interpoloimalla. Kuvassa 1 on esitetty mallimme antama sovite testidataan ja kuvassa 2 testidatan perusteella piirretty pinta. [2]



Kuva 1: SABR-mallin antama sovite testidataan



Kuva 2: Testidatasta interpoloimalla rakennettu toteutunut implisiittinen volatiliiteettipinta

2.4 Volatiliteettipinnan mallintaminen

Mallin implementointi on tehty Matlabilla, sillä se tarjoaa monipuolisen ympäristön numeeriseen laskentaan, ja asiakkaalla on sovellus käytettävissään. SABR-malli antaa implisiittiselle volatiliteetille analyttisen ratkaisun toteutushinnan K ja maturiteetin T funktiona. Tästä saadaan tasainen ja jatkuva volatiliteettipinta, joka pinnan muodossaan noudattaa markkinoilla havaittua volatiliteettipintaa. Se siis pystyy mallintamaan volatiliteettipinnan kaareutumisen eli volatiliteettihymyn, jonka mallintaminen asetettiin alun perin työmme tavoitteeksi.

Pinnan ratkaisu Matlabilla edellyttää parametrien α , β , ρ ja v estimointia aikaisemmassa vaiheessa ja syöttämistä malliin inputina, jotta pinta vastaa mahdollisimman hyvin markkinoilla havaittua volatiliteettipintaa. Parametrien estimoinnin jälkeen pinnan ratkaisu on hyvin suoraviivainen tehtävä. Olemmekin jo rakentaneet teoriaan perustuvan Matlab-toteutuksen, joka pystyy piirtämään annetuista parametreista volatiliteettipinnan.

3 Päivitykset projektisuunnitelmaan

3.1 Tehtävät

Mallin implementoinnin jälkeen aloitetaan mallin kalibrointi. Kalibroinnissa määritellään SABR-mallin vaatimat parametrit annetulla datalla. Näin saadaan parhaiten toteutunutta volatiliteettipintaa vastaava sovite. Kalibroinnin jälkeen verrataan mallin tuottamia pintoja verrokkipintoihin ja arvioidaan mallin toimivuutta. Toisena tärkeänä tehtävänä on raportoida projektin tuloksista loppuraportilla, jossa on tarkoitus kuvata tarkemmin mallin toimintaperiaatteita ja käytännön toteutusta.

3.2 Työnjako

Projektin alkuperäinen työnjako on muuttunut, koska mallin implementointi ei olekaan vaatinut niin paljon työtä kuin oletettiin, mutta datan analysointi ja muokkaamiseen sopivaan muotoon on osoittautunut haastavaksi. Mallin implementoinnista on vastannut Ville ja hän vastaa myös kalibroinnista. Häntä on avustanut Robert, mutta Juhana on pääasiassa analysoinut dataa Tepon kanssa. Juha ja Robert ovat hoitaneet raportointia ja perehtyneet laajemmin malleihin. Kaikki antavat oman panoksensa loppuraportin kirjoittamiseksi.

3.3 Aikataulu

Projekti on pysynyt hyvin suunnitellussa aikataulussa. Mallintaminen on edennyt kalibrointivaiheeseen, jota varten tarpeellista dataa on valmisteltu ja loppuraportin kirjoittaminen on jo aloitettu. Kuitenkin datan analysointi on vaatinut enemmän aikaa kuin on suunniteltu, joten sitä on vielä jatkettu. Kuvassa 3 on esitettynä projektin toteutuneet tehtävät harmaalla ja tulevien tehtävien suunnitellut ajankohdat.

Tehtävä	Kuukausi/Viikko			Tammikuu				Helmikuu				Maaliskuu				Huhtikuu			
	Alkaa	Loppuu	Kesto	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16		
Suunnittelu	22.1.	19.2.	29																
Kirjallisuuskatsaus	25.1.	26.2.	33																
Mallin estimointi	19.2.	26.2.	7																
Mallin simulointi	27.2.	19.3.	21																
Datan analysointi	27.2.	19.3.	21																
Väli raportointi	11.3.	17.3.	7																
Mallin kalibrointi	20.3.	9.4.	21																
Tulosten analysointi	10.4.	16.4.	7																
Loppuraportointi	20.3.	16.4.	28																
Raportin arviointi	17.4.	22.4.	7																
Loppupalautte	23.4.	24.4.	2																
Asiakastapaamiset																			
Tapaamiset ohjaajan kanssa																			

Kuva 3: Toteutuneet tehtävät ja tulevien tehtävien aikataulutus

4 Riskit

Suurimmat riskit tässä työn vaiheessa ovat:

- Vaikeudet parametrien estimoinnissa
- Mallin antaman pinnan osoittautuminen huonosti todellisuutta kuvaavaksi

Parametrien tarkka estimointi on tämän työvaiheen haastavin tehtävä, johon liittyy vielä suuria epävarmuuksia. Pahimmillaan emme pysty tarkasti estimoimaan parametreja, jotka kuvaavat hyvin toteutunutta volatiliteettipintaa kaikilla toteutushinnoilla K ja maturiteeteilla T . Lisäksi tekniset ongelmat parametrien estimoinnissa ja parhaiden sovitteiden löytämisessä voivat venyttää projektin aikataulua. Tähän pyritään varautumaan keskittämällä huomattava määrä resursseja työtehtävään aikaisessa vaiheessa minimoidaksemme riskin toteutumisen vaikutus.

Pystymme vertailemaan mallin antamaa volatiliteettipintaa markkinoilla havaittuun pintaan vasta saatamme mallin implementoinnin päätökseen. Näin ollen on vielä olemassa huomattava riski siitä, että mallimme ei täytä asiakkaan esittämiä kriteerejä volatiliteettihymyn kuvaamisesta. Mallin antaman pinnan osoittautuminen huonosti toteutunutta volatiliteettipintaa kuvaavaksi voi huomattavasti vähentää työmme arvoa asiakkaalle. Olemme pyrkineet varautumaan tähän riskiin syvällisellä kirjallisuuskatsauksella olemassaoleviin malleihin, jonka tuloksena valitsimme implementoitavan SABR-mallin parhaana ehdokkaana asiakkaan kriteereihin sopivaksi malliksi.

Osaan projektisuunnitelmassa tunnistetuista riskeistä on jo pystytty varautumaan, ja niiden todennäköisyys ja vaikutus työhön on pienentynyt.

- Datan löytämisen vaikeus: Asiakas on toimittanut meille kaiken pyytämämme aineiston ja vielä ylimääräistäkin dataa työtämme helpottamaan.
- Ryhmän jäsenten poissaolot: Aktiivisella osallistumisella kaikilla ryhmän jäsenillämme on hyvä kuva tulevista työvaiheista, ja yksittäisten ryhmän jäsenten sairastumiset eivät pysty halvaannuttamaan ryhmän toimintaa.

5 Kirjallisuusviitteet

[1] Erik Nilsson, Calibration of the Volatility Surface, 12.6.2008, Kungliga Tekniska Högskolan

[2] Sergiy Ladokhin, Volatility modeling in financial markets, 26.6.2009, VU University Amsterdam