



Aalto-yliopisto

Mat-2.4177 Operaatiotutkimuksen projektityöseminaari

Kevät 2010

Korko-optioiden volatilitteettirakenteen estimointi

Pohjola - konserni

Projektisuunnitelma

19.2.2010

Robert Huuhilo	68931W (Projektipäällikkö)
Juhana Joensuu	67500P
Teppo Luukkonen	69204H
Juha Nuutinen	67564A
Ville Viitasaari	69963F

1 Johdanto

Työn tarkoituksena on mallintaa Black-Scholes -mallin (1973) volatiliteettipinta korkokattosopimukseen liittyvien korko-optioiden hintojen määrittämiseksi. Mallia käytetään yleisesti erilaisten optioiden hinnoitteluun. Korkojen sekä volatiliteetin dynamiikan mallintaminen auttavat saamaan tarkan kuvan markkinoista kullakin ajanhetkellä. Tämän vuoksi volatiliteettipinnan mallintaminen on tärkeää optioiden oikeiden hintojen laskemiseksi.

Korkokattosopimus, eli ns. ”cap”, koostuu useasta korko-optiosta (ns. ”caplet”), joiden kohde-etuutena on korkokattosopimukseen liittyvän lainan korkojaksojen forward-korko. Keskitymme työssä erityisesti asuntolainojen korkokattosopimukseen, joiden kohde-etuutena on 12 kuukauden euribor-korko. Tällöin asuntolainan korko tarkistetaan vuoden välein, ja se pysyy kunkin vuoden vakiona. Korkokattosopimuksessa kukin 12 kuukauden jakso on suojattava erillisellä optiolla, jossa kohde-etuutena on kyseisen jakson forward-korko.

Esimerkiksi 3 vuoden lainassa korkotaso tarkistetaan kaksi kertaa, vuoden ja kahden vuoden jälkeen lainanottopäivästä. Jos lainalle otettaisiin korkokatto, sitä vastaavien optioiden kohde-etuudet olisivat forward (12 kk, 24 kk) ja forward (24 kk, 36 kk) - korot. Mikäli korkotaso nousisi vuoden tai kahden vuoden kuluttua korkokaton määräämän tason yli, optiot toteutuessaan kompensoivat koron ja korkokaton välisen erotuksen kustannukset.

Black-Scholes -malli on yleisessä käytössä erilaisten optioiden hinnoittelussa. Vaikka malli toimii kohtalaisen hyvin, se nojaa oletuksiin jotka eivät vastaa todellisuutta. Black-Scholes (B-S) olettaa mm. että kohde-etuus noudattaa geometrista Brownin liikettä, jossa volatiliteetti pysyy vakiona. Tästä huolimatta, B-S on käytännöllinen optioiden hinnoittelussa, sillä option maturiteetin ja toteutushinnan pysyessä vakiona ainoa option hinnan määrittävä muuttuja on kohde-etuuden volatiliteetti. Toisin sanoen jos kohde-etuuden volatiliteetti on tiedossa, saadaan B-S:n kaavasta suoraan kaikkien optioiden hinnat eri maturiteeteilla ja toteutushinnoilla. Siksi optioiden hinnat ilmoitetaankin usein suoraan B-S:n volatiliteettina, eli ns. implisiittisenä volatiliteettina.

Implisiittinen volatiliteetti vaihtelee toteutushinnan ja maturiteetin funktiona. Tämä vaihtelu havainnollistetaan ns. volatiliteettipinnan avulla, joka tässä harjoitustyössä on tarkoitus mallintaa. [1]

2 Tehtävän asettelu

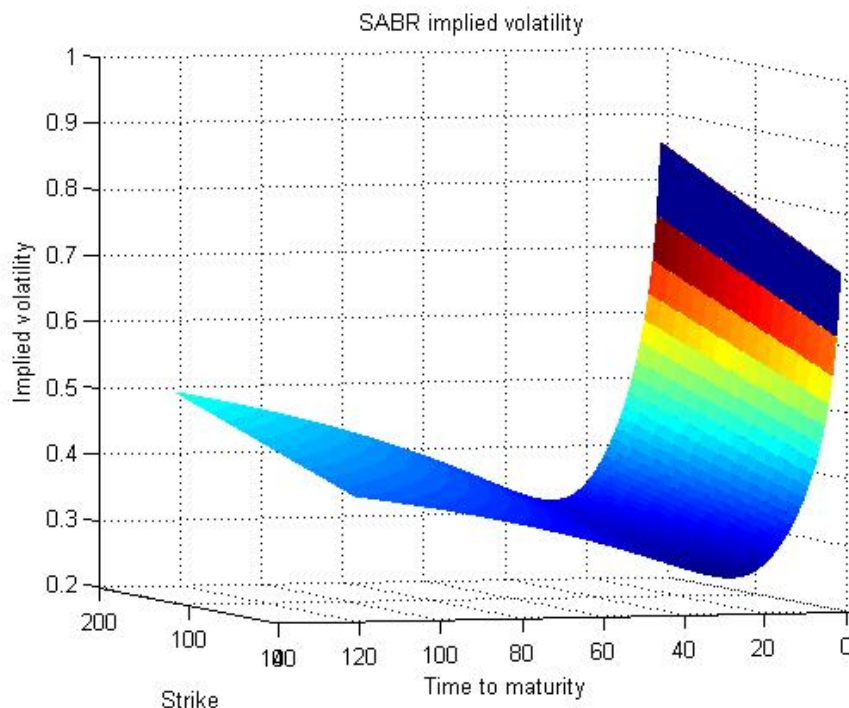
Räätälöidyn korkokaton myyminen asiakkaalle edellyttää korko-option realistista hinnoittelua. Option hinta saadaan selville Black-Scholes -kaavan sekä implisiittisen volatiliteetin avulla. Tavoitteena on löytää malli, jolla määritetään implisiittisen volatiliteetin arvo markkinoilla havaittujen optioiden hintojen perusteella. Tehtävässä tutkitaan 12 kuukauden Euribor-korkoa.

Kohde-etuuden implisiittinen volatiliteetti ei ole B-S:n puutteista johtuen aina sama kuin kohde-etuuden todellinen volatiliteetti. Implisiittisellä volatiliteetilla tarkoitetaan sitä volatiliteetin arvoa, joka sijoitettuna B-S:n kaavaan antaa optiolle oikean hinnan. Sitä kutsutaan implisiittiseksi volatiliteetiksi, sillä volatiliteetille ei saada Black-Scholesin kaavasta analyttistä ratkaisua. Voidaan ajatella, että implisiittinen volatiliteetti on "väärä arvo", joka sijoitettuna "väärään kaavaan" tuottaa oikean hinnan. Implisiittisen volatiliteetin ja todellisen volatiliteetin välinen erotus siis korjaa B-S:n oletuksista johtuvan virheen.

Tehtävää lähestytään tekemällä katsaus implisiittisen volatiliteetin määrittäviin malleihin. Mallit perustuvat ennusteisiin korkokehityksestä. Forward-koron ja sen volatiliteetin avulla pystytään määrittämään korko-optioiden toteutushinta kullakin ajanhetkellä. Tavoitteena on löytää malli, joka ennustaa korkoa mahdollisimman hyvin. Mallien hyvyttä vertaillaan arvioimalla kirjallisuudessa esiintyviä empiirisiä tuloksia sekä tutkimalla mallien ennustamiseen käyttämien tekijöiden eli faktoreiden selittävyttä.

Korkomallien avulla lasketuista korko-optioiden hinnoista saadaan Black-Scholes kaavaa käyttämällä korkokattosopimuksen implisiittinen volatiliteetti korko-optioiden hinnoittelemista varten. Kullakin maturiteetilla toteutuneen option hinnan avulla saadaan mallinnettua realistinen volatiliteettipinta, jossa on huomattavissa ns. smile-efekti. Smile-efekti on seurausta korkomarkkinoiden epätäydellisestä käyttäytymisestä, johon vaikuttavat esimerkiksi markkinoiden yksittäisten toimijoiden odotukset, toiminta sekä valtioiden finanssipolitiikka.

Mallin kalibrointi tapahtuu annetun datan perusteella. Kun malli on kalibroitu annetulla historialla, sitä verrataan valmiiseen pintaan. Saadusta korko-option implisiittisestä volatiliteetista on myös laskettavissa volatiliteetin volatiliteetti, jolla tarkoitetaan volatiliteetin vaihtelua. Volatiliteetti ja sen volatiliteetti ovat erittäin tärkeitä parametreja pankkien riskienhallinnassa, sillä suuren markkinaosuuden omaavien optioiden hintavaihtelu aiheuttaa suuren riskitekijän pankkien toiminnalle.



Kuva 1: Eräs implisiittinen volatiliteettipinta kalibroimattomalla SABR-mallilla

3 Työvaiheet

Malleja optioiden implisiittisen volatiliteetin määrittämiseen löytyy kirjallisuudesta paljon. Ensimmäinen vaihe projektissa on tutustua johdannaisten teoriaan sekä kirjallisuudessa esiintyviin johdannaismalleihin. Kirjallisuuskatsauksessa haetaan erilaisia malleja alan kansainvälisistä julkaisuista. Tarkoituksena on löytää kattava joukko malleja, joiden ominaisuuksia arvioimalla ja saatuja tuloksia vertailemalla löydetään korko-optioihin parhaiten soveltuva malli.

Valittu malli estimoidaan käyttämällä Matlab-ohjelmistoa, jonka käytettävyys ja laskentateho soveltuvat hyvin suuren numeerisen datamäärän käsittelyyn. Käytämme julkista euribor-dataa korkojen kehityksen mallintamiseksi, ja määritämme tästä korkodatasta malliemme tarvitsemat parametrit. Kalibroimme valitsemamme mallin käyttämällä korkodatasta määrittämiämme parametreja. Kalibroidulla mallilla saatavaa korko-optioiden volatiliteettipintaa verrataan Pohjolan optioiden hintadatatista määritettyyn toteutuneeseen volatiliteettipintaan sekä Pohjolla käytössä olevaan referenssivolatiliteettipintaan.

4 Aikataulu ja työnjako

Projekti koostuu kolmesta vaiheesta. Aiheeseen perehdytään kirjallisuuskatsauksessa, joka on edellytys mallin valinnalle. Valinnan jälkeen malli tulee estimoida, minkä jälkeen se simuloidaan Matlabilla. Samaan aikaan saatua dataa käsitellään sopivaan muotoon, jotta malli voidaan simuloinnin jälkeen kalibroida. Mallin simulointi tulisi valmistua väliraporttiin mennessä. Tämän jälkeen kalibroidaan malli ja lopuksi sillä saatuja tuloksia tarkastellaan kriittisesti. Tarkka aikataulutus on esitettyä taulukossa 1, johon on merkitty myös raporttien aikarajat.

Taulukko 1: Projektin aikataulu

Tehtävä	Kuukausi/Viikko			Tammikuu				Helmikuu				Maaliskuu				Huhtikuu			
	Alkaa	Loppuu	Kesto	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16		
Suunnittelu	22.1.	19.2.	29																
Kirjallisuuskatsaus	25.1.	26.2.	33																
Mallin estimointi	19.2.	26.2.	7																
Mallin simulointi	27.2.	19.3.	21																
Datan analysointi	27.2.	19.3.	21																
Väliraportointi	11.3.	17.3.	7																
Mallin kalibrointi	20.3.	9.4.	21																
Tulosten analysointi	10.4.	16.4.	7																
Loppuraportointi	20.3.	16.4.	28																
Raportin arviointi	17.4.	22.4.	7																
Loppupalautte	23.4.	24.4.	2																
Asiakastapaamiset																			
Tapaamiset ohjaajan kanssa																			

Ryhmä koostuu viidestä systeemitieteen pää- tai sivuaineopiskelijasta. Ryhmä jaetaan kolmen hengen simulointiryhmään ja kahden hengen asiantuntijaryhmään. Henkilökohtaiset työpanokset tehtävittäin jakautuvat taulukon 2 mukaisesti.

Taulukko 2: Tehtäväkohtainen työnjako tunneittain

Tehtävä	Robert	Juhana	Ville	Juha	Teppo	Yhteensä
Projektisuunnitelma	30	15	15	15	15	90
Kirjallisuuskatsaus	25	25	25	25	25	125
Dynaamiset mallit	25	25				50
Stokastiset mallit			25	25	25	75
Mallintaminen	30	30	30	30	30	150
Mallin estimointi				10	10	20
Mallin simulointi	15	15	15			45
Datan analysointi				20	20	40
Mallin kalibrointi	15	15	15			45
Väliraportointi	30	10	10	10	10	70
Loppuraportointi	75	50	50	50	50	275
Kirjallisuuskatsaus				30	30	60
Mallit	15	10	10	20	20	75
Mallintaminen	25	15	15			55
Tulosten analysointi	35	25	25			85
Loppupalautte	10	10	10	10	10	50

5 Mallit

Mallien keskeisimpänä parametrina on kohde-etuus, joka projektimme tapauksessa on Euribor 12 kk. Useat malleista olettavat kohde-etuuden hinnan muutoksen koostuvan kahdesta osasta: drift-komponentista sekä satunnaisesta komponentista, joka riippuu volatilitteetti-parametrasta sekä Brownin liikkeestä. Drift-

komponentilla voidaan kuvata esimerkiksi hinnan trendiä, kun taas satunnaisella komponentilla pyritään kvantifioimaan kohde-etuuden stokastinen luonne.

Korko-optioiden volatilitteettipinnan smile-efektiä parhaiten kuvaavia malleja yhdistävistä tekijöistä voidaan tunnistaa mallien olettama hintojen muutosten stokastisuus, useamman kuin yhden selittäjän (faktorin) käyttö sekä stokastisten faktorien vahva korrelaatio. Eri faktoreita voivat olla esimerkiksi forward-korko, inflaatio-odotukset ja kysyntäodotukset. Realistisesti option hintojen muutoksia kuvaavan mallin etsiminen kirjallisuuskatsauksen perusteella on haastavaa.

Kirjallisuuskatsauksen perusteella SABR-mallit vaikuttavat tässä vaiheessa lupaavimmilta sekä smile-efektin selittämisen että toteutuskelpoisuuden kannalta. Hyvin kalibroitu SABR-malli pystyy kuvaamaan melko realistisesti pitkän aikavälin korko-option hinnanmuutoksia. Kalibrointiin käytettävän datan määrä, laatu sekä lopullisen tarkasteluikkunan koko vaikuttavat kuitenkin ratkaisevasti mallin kykyyn selittää markkinoiden käyttäytymistä. Tästä syystä tutkimuksia mallien käyttämien selittäjien hyvyden välillä jatketaan projektin edetessä [1] & [2].

6 Riskit

Määritimme suurimmat projektiin liittyvät riskit seuraavasti:

- Työmäärän osoittautuminen ennakoitua suuremmaksi
- Ongelmat simuloinnissa
- Tulosten osoittautuminen irrelevanteiksi asiakkaalle
- Datan löytämisen vaikeus
- Ryhmän jäsenten poissaolot

Suurimmaksi riskiksi identifioitiin projektin osoittautuminen laajemmaksi urakaksi kuin alun perin suunniteltiin. Tämä voi johtua optioiden hinnoittelumallien runsaasta määrästä ja ongelman vaikeasta lähestyttävyydestä. Toisaalta malleihin tutustumiseen on hyvä varata runsaasti aikaa, jotta vältymme implementointivaiheen tekemiseltä toiselle mallille alkuperäisen mallin tulosten osoittautuessa riittämättömiksi. Olemme käyttäneet projektin alussa paljon aikaa malleihin tutustumiseen, minkä uskomme säästävän aikaa projektin lopussa ja pienentävän riskien toteutumisen todennäköisyyttä.

Myös mallin toteutukseen liittyy suuria epävarmuuksia. Historiallisesta datasta estimoimamme mallin parametrit voivat kuvata tutkittavaa ilmiötä huonosti tulevaisuudessa. Näin ollen parametrien estimoinnissa tehtävät päätökset voivat vaikuttaa mallista saatavien tulosten laatuun. Myös matemaattisesti vaativimpien mallien implementointi Matlabilla voi osoittautua työlääksi projektiksi. Arvioimme kuitenkin mallin implementoinnin pysyvän hyvin aikataulussa ja implementointiin liittyvien riskien olevan pieniä käytössämme olevien työkalujen ansiosta.

Tavoitteenamme on valita menetelmä korko-optioiden implisiittisen volatilitteettipinnan mallintamiseen. Tähän pintaan toivotaan saatavan näkyviin volatility smile -efekti, jossa pinta kaareutuu strike pricen ja maturiteetin funktiona. Tärkeä riski liittyy tähän vaatimukseen, sillä kirjallisuuskatsauksen perusteella on hyvin vaikea ennustaa mallin antamia tuloksia. Näin ollen suuri projektiin liittyvä riski liittyy siihen, että emme saa käyttämällämme mallilla asiakkaan toivomaa tulosta. Tämän riskin toteutuminen voi johtaa usean mallin implementoinnin tarpeeseen, joka potentiaalisesti kasvattaa projektin työmäärää entisestään. Riskin toteutumisen todennäköisyyttä on pyritty pienentämään syvällisellä kirjallisuuskatsauksella olemassa

oleviin volatiliteettimalleihin, jonka avulla pystymme paremmin ymmärtämään eri mallien rajoitteet ja mahdollisuudet.

Vaikeudet mallin vaatiman datan keräämisessä voivat vaarantaa projektin aikataulun ja äärimmäisessä tapauksessa jopa estää mallin käytön, mikäli sen vaatimia parametreja ei pystytä aineistosta määrittämään. Aineiston laatu myös osaltaan määrää tulosten luotettavuuden. Varmistaaksemme datan määrän ja laadun riittävyyden meidän tulee olla läheisesti yhteydessä asiakkaaseen, ja toisaalta varmistaa käyttämiemme menetelmien luotettavuus parametrien estimoinnissa saamastamme aineistosta.

Mahdolliset ryhmän jäsenten poissaolot liittyen sairastumiseen tai muihin kiireisiin voi johtaa projektin aikataulun pettämiseen. Poissaolot ovat erityisen kohtalokkaita, mikäli ne vaikuttavat kriittisen polun työtehtävien suoritukseen, jotka ovat edellytys tulevien tehtävien aloitukselle. Tähän voidaan varautua aloittamalla työnteko hyvissä ajoin ennen aikarajojen umpeutumista, jolloin ikäviin yllätyksiin on varaa. Projektipäällikkö voi myös omalla aktiivisella otteellaan ja innostavalla esimerkillään motivoida ryhmän jäsenet ylittämään itsensä.

Viitteet:

[1] Luenberger, D. Investment Science, 1998.

[2] Ladokhin, S. Volatility modeling in financial markets. Saatavilla osoitteessa:
<http://www.math.vu.nl/~sbhulai/theses/stageverslag-ladokhin.pdf>