



Aalto-yliopisto
Mat-2.4177 Operaatiotutkimuksen projektityöseminaari
Kevät 2010



Korko-optioiden volatiliteetin mallintaminen

Loppuraportti
2.5.2010

Robert Huuhilo	68931W	(Projektipäällikkö)
Juhana Joensuu	67500P	
Teppo Luukkonen	69204H	
Juha Nuutinen	67564A	
Ville Viitasaari	69963F	

Sisällysluettelo

1	Johdanto	2
2	Korko-optioiden hinnoittelu Black-Scholesin kaavalla	3
3	Kirjallisuuskatsaus korkojen dynamiikan mallinnukseen	3
3.1	SABR	5
3.2	Vasicekin malli.....	5
3.3	Ho-Lee -malli	5
3.4	Hull-Whiten malli.....	6
3.5	Black-Karasinski.....	6
3.6	Kahden faktorin Hull-White	6
3.7	GARCH	7
3.8	Volatiliteettipinnan approksimointi polynomilla.....	7
4	Mallin valinta.....	8
5	Datan analysointi	8
6	Mallin rakentaminen.....	9
6.1	Stochastic Alpha, Beta, Rho	9
6.2	Mallin implementointi	10
6.3	Mallin kalibrointi	11
7	Tulokset.....	11
7.1	Volatiliteettipinta	11
7.2	Korko-optioiden hinnoittelu volatiliteettipinnalla.....	13
7.3	Parametrien tarkastelu ja kehitys ajan suhteen	15
7.4	Parametrien vaikutus volatiliteettipintaan	18
8	Mallin jatkokehitys.....	21
8.1	SABR-malli.....	21
8.2	Δ - ja Λ -riskit SABR-mallissa	21
9	Yhteenveto	23
	Viitteet.....	25
	Liitteet	26
	Arvio projektin toteutuksesta	26
	Ryhmän toiminta	26
	Riskien hallinta.....	26
	Todellinen työmäärä	26
	Onnistumiset ja epäonnistumiset	26
	Parannettavaa tulevaisuutta ajatellen	27

1 Johdanto

Projektin aiheena on volatiliteettipinnan mallintaminen korkokattosopimukseen liittyvien korko-optioiden hintojen määrittämiseksi. Volatiliteettipinnan avulla pystytään määrittämään korko-optioiden markkinahinnat kaikilla toteutushinnoilla ja maturiteeteilla.

Korkokattosopimus (cap) koostuu useasta korko-optiosta (caplet), joiden kohde-etuutena on korkokattosopimukseen liittyvän lainan korkojaksojen forward-korko. Tässä tapauksessa kyseessä on erityisesti asuntolainoihin liittyvät korkokattosopimukset. Työssä keskitytään Suomessa yleisesti kohde-etuutena käytettyyn 12 kk:n Euribor-korkoon. Tällöin asuntolainan korko tarkistetaan vuoden välein, ja se pysyy kunkin vuoden ajan vakiona. Tällaisessa korkokattosopimuksessa kukin 12 kk:n jakso on suojattava erillisellä optiolla (caplet), jossa kohde-etuutena on kyseisen jakson forward-korko.

Esimerkiksi 3 vuoden lainassa korkotaso tarkistetaan kaksi kertaa, vuoden ja kahden vuoden jälkeen lainanottopäivästä. Jos lainalle otetaan korkokatto, sitä vastaavien optioiden kohde-etuudet ovat forward (12 kk, 24 kk) ja forward (24 kk, 36 kk) - korot. Mikäli korkotaso nousee vuoden tai kahden vuoden kuluttua korkokaton toteutushinnan yli, optiot kompensoivat koron ja korkokaton välisen erotuksen kustannukset.

Black-Scholes -malli on yleisessä käytössä erilaisten optioiden hinnoittelussa. Vaikka malli toimii kohtalaisen hyvin, se nojaa oletuksiin, jotka eivät vastaa todellisuutta. Black-Scholes (B-S) olettaa mm. että kohde-etuuden hintamuutokset noudattavat geometrista Brownin liikettä, jossa volatiliteetti pysyy vakiona. Tästä huolimatta B-S on käytännöllinen optioiden hinnoittelussa, sillä option maturiteetin ja toteutushinnan pysyessä vakiona ainoa option hinnan määrittävä muuttuja on kohde-etuuden volatiliteetti. Siksi optioiden hinnat ilmoitetaan usein suoraan Black-Scholesin volatiliteettina, eli ns. implisiittisenä volatiliteettina.

Blackin kaava on Black-Scholesin kaavasta johdettu kaava korko-optioiden hinnoitteluksi. Siinä implisiittinen volatiliteetti on vakio, eli se ei riipu toteutushinnasta ja maturiteetista. Todellisuudessa implisiittinen volatiliteetti vaihtelee toteutushinnan ja maturiteetin mukaan. Tämä vaihtelu havainnollistetaan ns. volatiliteettipinnan avulla, jossa implisiittinen volatiliteetti on kuvattu toteutushinnan ja maturiteetin funktiona. Implisiittisellä volatiliteetilla tarkoitetaan sitä volatiliteetin arvoa, joka sijoitettuna Blackin kaavaan antaa optiolle oikean hinnan. Sitä kutsutaan implisiittiseksi volatiliteetiksi, sillä volatiliteetille ei saada Blackin kaavasta analyttistä ratkaisua. Volatiliteettipinnan avulla pystytään hinnoittelemaan optiot oikein Blackin kaavalla. Nykyiset mallit volatiliteettipinnan rakentamiseksi pyrkivät siten tuottamaan implisiittiset volatiliteetit sellaisessa muodossa, että niitä voidaan käyttää Blackin kaavassa optioiden hinnoitteluksi.

Tehtävänantona oli valita menetelmä korko-optioiden implisiittisen volatiliteetin mallintamiseen kirjallisuuskatsauksen perusteella. Tämän jälkeen malli tuli ohjelmoida ja kalibroida annetulla markkinahintahistorialla. Mallin oli tarkoitus tuottaa volatiliteettipinta, jota voidaan vertailla markkinoilla esiintyvistä volatiliteeteista muodostettuun pintaan. Lisäksi mallimme tuli pystyä määrittämään pintaan liittyvä volatiliteetin volatiliteetti -parametri. Työmme tavoitteena oli tuottaa valitsemastamme mallista ja vaihtoehtoisista malleista volatiliteettipinnan mallintamiseen tiivis tietopaketti, jota asiakas voi käyttää päätöksenteon tukena tulevista projekteista päätettäessä.

2 Korko-optioiden hinnoittelu Black-Scholesin kaavalla

Korko-optio toimii samalla periaatteella kuin eurooppalainen optio. Option toteutushinnalla K tuottama hyöty maksuajanhetkellä t_{set} riippuu korkotasosta R_T option maturiteettihetkellä t_{ex} . Hyötyä optiosta saadaan vain, jos korkotaso ylittää option toteutushinnan. Hyöty ajanhetkellä t_{set} saadaan kaavasta

$$L = \max(R_T - K, 0) \quad (1)$$

Korko-optioiden hinta voidaan johtaa Black-Scholesin osittaisdifferentiaaliyhtälöstä

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} rS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 = rf, \quad (2)$$

jossa kohde-etuuden hinta noudattaa geometrista Brownin liikettä aikahorisontin $[0, t_{ex}]$ yli siten, että

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz. \quad (3)$$

Kaavassa 2 r on korko ja $f(S, t)$ kohde-etuuden S hinnasta johdettu option hinta. Kaavassa 3 z kuvaa standardia Wiener-prosessia. Kaavasta 2 voidaan johtaa hinta korko-optiolle, jolloin

$$V = P(0, t_{set}) (F(t_{ex}, t_{set}) N(d_1) - KN(d_2)), \quad (4)$$

jossa option maturiteetti on t_{ex} , diskonttauskerroin option maksuajanhetken t_{set} päähän on $P(0, t_{set})$, option vastaava forward-korko aikavälille t_{ex}, t_{set} on $F(t_{ex}, t_{set})$, toteutushinta on K ja kumulatiivinen standardinormaalijakauma on N . Kumulatiivisen standardinormaalijakauman parametrit d_1 ja d_2 saadaan kaavoista

$$d_1 = \frac{\ln(F(t_{ex}, t_{set})/K) + \frac{1}{2} \sigma_B^2 t_{ex}}{\sigma_B \sqrt{t_{ex}}} \quad (5)$$

ja

$$d_2 = d_1 - \sigma_B \sqrt{t_{ex}}, \quad (6)$$

joissa koron volatilitteetti ajanhetkellä t_{ex} on σ_B (Hull 2003).

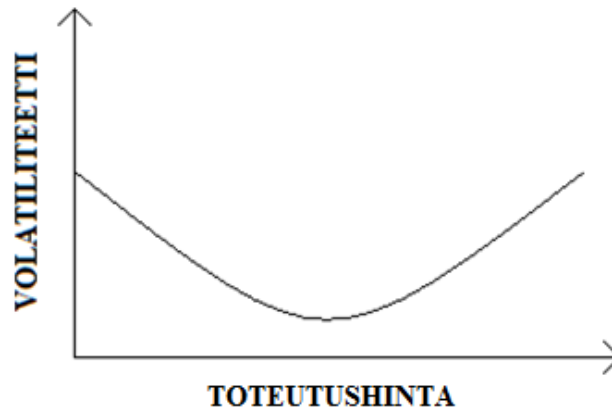
3 Kirjallisuuskatsaus korkojen dynamiikan mallinnukseen

Korko-optioiden hinnoitteluun käytettävien mallien kirjo on todella laaja. Olemassa olevien mallien kehitystä ja uusien mallien rakentamista motivoi se, ettei markkinahintojen volatilitteetti pysy vakiona. Tämä luo haasteita pankkien riskienhallinnalle.

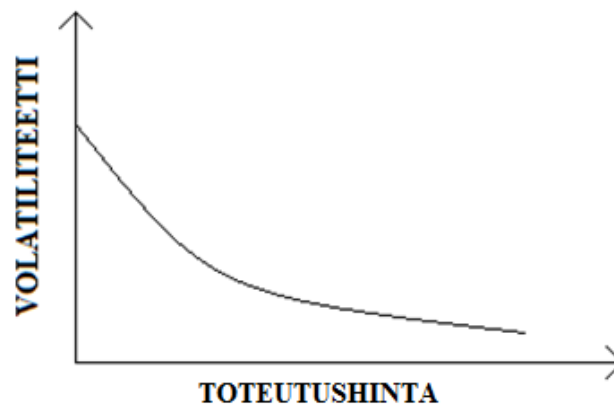
Mallien keskeisimpänä parametrina on kohde-etuuden hinta, joka projektimme tapauksessa on Euribor 12kk. Muut parametrit liittyvät markkinoiden toimintaan ja ohjaavat koron suuntaa markkinaennusteiden mukaisesti.

Useat malleista olettavat hintojen muutosten stokastisuuden. Tällöin malleissa oletetaan kohde-etuuden hinnan noudattavan Brownin liikettä jollakin estimoidulla parametrilla. Tällä satunnaisella parametrilla yritetään selittää koroissa tapahtuvat satunnaiset vertikaalipoikkeamat ajan funktiona. Toinen malleissa esiintyvä termi on niin sanottu drift-termi, joka kuvastaa koron trendiä ajan funktiona.

Black-Scholes -kaavasta voidaan ratkaista numeerisesti implisiittiset volatilitteetit. Kun näistä implisiittisistä volatilitteeteista muodostetaan pinta, voidaan havaita ns. smile-efekti. Tällä tarkoitetaan pinnan kaareutumista siten että option suurilla ja pienillä toteutushinnoilla implisiittinen volatilitteetti kasvaa. Pinnan smile-efektiin liittyy myös pinnan vinous eli skewness. Pinnan vinoutumisella tarkoitetaan volatilitteetin kasvamista toteutushinnan kasvaessa tai pienentyessä. Smile - sekä skew - efektin voi havaita myös maturiteetin funktiona.



Kuva 1: Volatilitteetin smile-efekti toteutushinnan (strike price) funktiona



Kuva 2: Volatilitteetin skew-efekti toteutushinnan (strike price) funktiona

Volatilitteetti ei siis ole Black-Scholesin oletusten mukaisesti vakio, vaan vaihtelee maturiteetin ja toteutushinnan funktiona. Kuvissa 1 ja 2 on esitetty volatilitteetin muutos toteutushinnan funktiona. Käyrän muoto riippuu tarkasteltavasta kohde-etuudesta. Joillakin markkinoilla havaitaan volatilitteetin kasvua sekä suurilla että pienillä toteutushinnoilla, kun taas toisilla markkinoilla volatilitteetti kasvaa vain pienillä toteutushinnoilla.

Korko-optioiden volatilitteettipinnan smile-efektiä parhaiten kuvaavia malleja yhdistävistä tekijöistä voidaan tunnistaa kirjallisuuden perusteella mallien olettama hintojen muutosten stokastisuus, useamman kuin yhden selittäjän (faktorin) käyttö sekä stokastisten faktorien vahva korrelaatio. Eri faktoreita voivat olla esimerkiksi forward-korko, forward-koron volatilitteetti sekä volatilitteetin volatilitteetti. Seuraavissa

kappaleissa on esitelty yleisimpiä kirjallisuudessa esiintyviä korko- sekä volatiliteettimalleja perusmuodoissaan (Hull 2003).

3.1 SABR

SABR on lyhenne sanoista "stochastic alpha, beta, rho" ja yläkäsite joukolle volatiliteettimalleja. SABR-mallin etuja ovat muun muassa analyttinen ratkaisu implisiittiselle volatiliteettipinnalle sekä parametrien selkeä teoreettinen tulkinta.

Tavallisessa SABR-mallissa koron ja koron volatiliteetin oletetaan noudattavan stokastista differentiaaliyhtälösystemiä

$$dF = \alpha F^\beta dW_1 \quad (7)$$

$$d\alpha = \nu \alpha dW_2, \quad (8)$$

jossa F on forward-korko, α koron volatiliteetti, ν volatiliteetin volatiliteetti, β parametri, jolla kuvataan oletusta forward-koron jakaumasta sekä W_i :t ovat Wiener-prosesseja. Ensimmäisestä yhtälöstä nähdään, että $\beta = 0$ vastaa oletusta koron normaalijakautuneisuudesta ja $\beta = 1$ oletusta koron jakauman lognormaalista luonteesta. Lisäksi Wiener-prosessit korreloivat siten, että

$$dW_1 dW_2 = \rho dt, \quad (9)$$

jossa ρ on korrelaatiokerroin (Hagan 2002).

3.2 Vasicekin malli

Vasicekin malli kuuluu ns. tasapainomalleihin, jossa korkojen ajatellaan kehittyvän kohti pitkäaikaista normaalitasoa eli reversiotasoa (mean reversion level). Jos lyhyt korko on alle reversiotason, sen odotetaan kehittyvän ylöspäin, ja jos se on yli reversiotason, sen odotetaan kehittyvän alaspäin. Mallissa stokastinen termi tuottaa koron tasoon shokkeja. Ilman sitä korko asettuisi pitkäaikaiselle normaalitasolleen. Yhden faktorin Vasicekin malli kuvaa lyhyen koron kehitystä yhtälön 10 mukaisesti.

$$dr = a(b - r)dt + \sigma dz, \quad (10)$$

jossa b kuvaa koron reversiotasoa, a kuvastaa nopeutta, jolla lähestytään tasoa b , σ on lyhyen koron hetkellinen volatiliteetti ja dz on Wiener-prosessi. Muuttamalla parametreja a ja b , malli saadaan vastaamaan erimuotoisia korkokäyriä. Tärkein epäkohta Vasicekin kaltaisessa tasapainomallissa on se, että mallin yksinkertaisuus asettaa rajoitteita korkokäyrien muodoille. Lisäksi on periaatteessa mahdollista, että malli antaa lyhyelle korolle negatiivisia arvoja. Mallista onkin tehty paranneltuja versioita, esimerkiksi Black Karasinskin tai Hull-Whiten mallit, jotka kuvastavat paremmin lyhyen koron dynamiikkaa (Hull 2003).

3.3 Ho-Lee -malli

Ho-Lee on ensimmäinen yhden faktorin arbitraasiton malli. Tämä tarkoittaa sitä, että malliin saadaan syötettyä eksaktisti minkämuotoinen korkokäyrä tahansa. Tasapainomalleissa (esim. Vasicek) puolestaan voidaan vain asettaa parametrit siten, että mallin kuvaama korkokäyrä vastaisi mahdollisimman hyvin todellista korkokäyriä. Ho-Leen malli kuvaa lyhyen koron kehitystä yhtälön 11 mukaisesti.

$$dr = \theta(t)dt + \sigma dz, \quad (11)$$

jossa $\theta(t)$ on funktio, joka kuvaa minkä suuntaista muutosta lyhyessä korossa r korkokäyrä ennustaa ajanhetkelle t , on vakio, joka kuvaa hetkellistä lyhyen koron volatilitteettia ja dz on Wiener-prosessi. Mallin funktiolle $\theta(t)$ voidaan johtaa approksimaatio

$$\theta(t) \approx F_t(0, t), \quad (12)$$

josta nähdään että mallissa lyhyen koron hetkellisen muutoksen odotusarvo hetkellä t on suunnilleen sama kuin nykyhetken korkokäyrän kulmakerroin maturiteetilla t . Ho-Leen mallissa $\theta(t)$ ei riipu r :n arvosta, joten prosessi voi pitkällä aikavälillä poiketa alkuperäisen korkokäyrän implikoimasta koron kehityksen ennusteesta mielivaltaisesti (Hull 2003).

3.4 Hull-Whiten malli

Yhden faktorin Hull-White on eräänlainen parannus Vasicekin mallista, joka mahdollistaa eksaktin korkokäyrän sovittamisen malliin. Yhden faktorin malli voidaan esittää muodossa

$$dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma dz, \quad (13)$$

jossa $\theta(t)$ on korkokäyrän ennustamaa korkojen muutosta kuvaava funktio, a on vakio joka kuvaa nopeutta, jolla ennustettua lyhyen koron tasoa lähestytään, σ on lyhyen koron hetkellinen volatilitteetti ja dz on Wiener-prosessi. Voidaan ajatella, että kyse on Vasicekin mallista, jossa vakio b eli koron pitkän ajan reversiotaso on asetettu ajasta riippuvaksi korkokäyrän ennusteen mukaisesti. Toisaalta jos asetetaan parametri $a = 0$, kysymyksessä on Ho-Leen malli. Toisin sanoen, kun Ho-Leen mallissa lyhyt korko voi poiketa pitkällä aikavälillä mielivaltaisesti korkokäyrän ennustamasta tasosta, Hull-Whiten mallissa korko pyrkii kehittymään kohti korkokäyrän ennustetta. Kuten Vasicek ja Ho-Lee, Hull-Whiten mallissa korko voi periaatteessa kehittyä negatiiviseksi, mikä ei ole realistista (Hull 2003).

3.5 Black-Karasinski

Black-Karasinskin malli on muunnelma Hull-Whiten mallista, jossa korko r ei voi kehittyä negatiiviseksi. Malli voidaan esittää muodossa

$$d \ln r = (\theta(t) - a(t) \ln(r))dt + \sigma(t)dz, \quad (14)$$

jossa koron logaritmi noudattaa samanlaista prosessia kuin itse korko Hull-Whiten mallissa. Black-Karasinsin mallissa valittu koron piste tulevaisuudessa noudattaa log-normaalijakaumaa, kun taas yllä esitetyissä malleissa se on noudattanut normaalijakaumaa.

Huono puoli mallissa on se, että sitä on vaikeampi soveltaa käytännössä, esimerkiksi joukkovelkakirjojen arvostamiseen (Hull 2003).

3.6 Kahden faktorin Hull-White

Esitetyistä malleista on tehty lukuisia muunnoksia ja parannuksia, esimerkiksi lisäämällä vakioihin a , b tai σ aikariippuvuus tai lisäämällä malleihin stokastisia termejä. Esitetään seuraavaksi kahden faktorin Hull-Whiten malli. Yhden faktorin Hull-Whitessa on vain yksi stokastinen termi σdz , joka noudattaa Wiener-

prosessia. Kahden faktorin mallilla tarkoitetaan sitä, että mallissa on mukana kaksi stokastista prosessia. Malli voidaan kirjoittaa esimerkiksi muotoon:

$$df(r) = (\theta(t) + u - af(r))dt + \sigma_1 dz_1, \quad (15)$$

jossa u saa alkuarvon 0 ja noudattaa stokastista prosessia

$$du = -bu dt + \sigma_2 dz_2, \quad (16)$$

Kuten yhden faktorin malleissa, funktio $\theta(t)$ valitaan siten, että lyhyt korko pyrkii muuttumaan kohti korkokäyrän ennustetta nopeudella a . Termin u merkitys tässä mallissa on se, että se aiheuttaa stokastisia muutoksia reversiotasoon eli alkuperäisen korkokäyrän mukaiseen ennusteeseen. Koska todellisuudessa korkokäyrän muutokset ovat osittain stokastisia, kahden faktorin malli kuvaa paremmin lyhyen koron dynamiikkaa kuin yhden faktorin malli (Hull 2003).

3.7 GARCH

GARCH-mallit eli vapaasti suomennettuna generoidut, autoregressiiviset, ehdolliset heteroskedastisuuden olettavat mallit ovat volatilitietin ennustamiseen käytettäviä malleja, joissa option hintojen varianssi kehittyi kohti reversiotasoa. Yleisimmin käytetyssä GARCH(1,1)-mallissa varianssi σ_t^2 lasketaan pitkän aikavälin keskimääräisestä varianssista V_L , aiemmasta volatilitietistä σ_{t-1} sekä markkinoilla tapahtuvasta päivittäisestä suhteellisesta hinnanmuutoksesta u_{n-i} . GARCH- mallille saadaan johdettua perusmuoto näistä parametreista, jolloin varianssille pätee

$$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{n-i}^2 = \omega + \sum_{i=1}^m \alpha_i u_{n-i}^2, \quad (17)$$

missä

$$\gamma + \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1. \quad (18)$$

Mallissa γ kuvaa keskimääräisen varianssin painoa ja α_i hinnanmuutoksen painoa. GARCH-malli on dynaaminen eli ajan mukana muuttuva optioiden hinnoittelumalli, joka käyttää parametreinaan vain historiadataa eikä ota huomioon markkinoiden stokastisia ominaisuuksia. Tämä saattaa muodostua ongelmaksi, mikäli markkinoilla tapahtuu jotakin yllättävää.

GARCH-mallien perhe on laaja. Kirjallisuudessa on useita mainintoja esimerkiksi EGARCH-mallista, joka olettaa hinnan muutosten olevan eksponentiaalisia (Hull 2003).

3.8 Volatilitieettipinnan approksimointi polynomilla

Eryteisesti lyhyen aikavälin ennusteiden laatimisessa on todettu toimivaksi implisiittisen volatilitieettipinnan etsiminen markkinoilla havaituista optioiden hinnoista ratkaisemalla numeerisesti volatilitieettiparametrin arvo Black-Scholesin -kaavasta jokaista (maturiteetti, strike) -paria kohti. Tällöin siis löydetään volatilitieettipinta, joka tuottaa Black-Scholes -kaavalla laskettuna havaintodatan kanssa yhteensopivat, markkinoilla toteutuneet optioiden hinnat.

Pintaa voidaan varsin yksinkertaisin menetelmin approksimoida esimerkiksi seuraavalla polynomimuotoisella funktiolla

$$\sigma_{imp} = a + b_1K + b_2K^2 + b_3K^3 + c_1T + c_2T^2, \quad (19)$$

jossa K on strike ja T maturiteetti. Parametrien valinta voidaan toteuttaa pienimmän neliösumman menetelmällä.

Pinnan dynamiikan ennustaminen voidaan toteuttaa tutkimalla, miten parametrien a ja b_i arvot muuttuvat ajan kuluessa. Käytännössä malli voidaan sovittaa optioiden hintoihin eri historian ajanhetkinä, jolloin parametrien arvot muodostavat kuusi aikasarjaa. Saatuja aikasarjoja voidaan sitten mallintaa esimerkiksi ARMA-prosesseina, jos aikasarjoissa havaitaan selvää autokorrelaatiota (Ladokhin 2009).

4 Mallin valinta

Korko-optioiden hintojen volatiliteetin mallintamista varten valittiin kirjallisuuskatsauksen perusteella SABR - eli Stochastic Alpha, Beta, Rho - malli. Valitsimme parhaiten tehtävänantoa vastaavan mallin, joka

- kuvaa hyvin optioiden toteutuneiden hintojen volatiliteettia
- on implementoitavissa kohtuullisella työmäärällä
- on helposti lähestyttävä
- on nopeasti kalibroituavissa
- tuottaa analyttisen pinnan
- kuvaa smile-efektiä

Tutkimusten perusteella malli kuvaa hyvin optioiden hintojen volatiliteetin smile-efektiä ja on implementoitavissa kohtuullisella työmäärällä. Mallille on löydettävissä sarjamuotoinen approksimatiivinen ratkaisu, minkä vuoksi mallin implementointi sekä kalibrointi annetulla markkinahistorialla ovat toteuttamiskelpoisia projektin laajuudessa. Lisäksi malli antaa suoraan volatiliteetin lisäksi volatiliteetin volatiliteetiksi kutsutun parametrin, joka kuvaa parametrin α vaihtelua kullakin maturiteetilla ja strike-hinnalla.

SABR-malli on suosittu optioiden hinnoittelussa sen nopean ja suoraviivaisen kalibroinnin vuoksi. Mallin kalibrointiin on kuitenkin erilaisia lähestymistapoja, jotka voivat vaikuttaa merkittävästi mallin antaman sovitteen selittävytyteen. Erilaisista lähestymistavoista on valittu toteutuneeseen markkinadataan parhaimman sovitteen antava menetelmä. Menetelmää testataan ennustamalla markkinahistorian perusteella hintojen toteutuneita volatiliteettejä, jolloin saamme tuloksia laajemmasta aikaikkunasta.

5 Datan analysointi

Mallin rakentamista varten käytössä oli korkomarkkinadatan vuodelta 2009. Data sisälsi vuoden jokaiselle päivälle vuotuiset Euribor 12kk -forward-korot 10 vuoteen asti, vuotuiset kupongittomat korkokäyrät sekä Euribor 12 kk -korko-optioista koostuvien korkokattosopimusten eli capien flat-volatiliteetit strikeille 2 - 9 % ja maturiteeteille 2 - 9 vuotta.

Yksittäisen capin hinnoittelemisessa käytetty flat-volatiliteetti σ_{flat} vastaa sitä volatiliteettia, joka hinnoittelee capin jokaisen capletin Black-Scholesin kaavalla 1 niin, että caplettien yhteishinta vastaa capin hintaa eli

$$CAP(\sigma_{flat})(0,T) = \sum_{i=1}^{T-1} CAPLET(\sigma_{flat})(i,i+1), \quad (20)$$

jossa capin maturiteetti on T . Caplettien hinnat saadaan capien hinnoista hajoittamalla capit (ns. caplet stripping). Yksittäisen capletin hinta saadaan laskemalla hintojen erotus kahdelle capille, joilla on vierekkäiset maturiteetit eli

$$CAPLET_{(T,T+1)} = CAP_{(0,T+1)} - CAP_{(0,T)}. \quad (21)$$

Capletin hintaa vastaava implisiittinen volatilitteetti saadaan laskettua numeerisesti kaavasta 4, kun tiedetään option maturiteetti, strike, option hinta, optiota vastaava kohde-etuus eli option maturiteettihetkellä alkava forward-korko ja riskitön korko maksuhetkeen asti.

6 Mallin rakentaminen

6.1 Stochastic Alpha, Beta, Rho

Vakio volatilitteetin aiheuttama virhe korko-optioiden dynamiikan mallintamisessa johtaa kahden selittävän tekijän huomioimiseen markkinoiden selittäjänä. SABR-mallissa selittävien stokastisten differentiaaliyhtälöiden oletetaan noudattavan standardia Brownin liikettä yhtälöiden 22 ja 23 mukaisesti,

$$d\hat{F} = \hat{\alpha}\hat{F}^\beta dW_1, \quad \hat{F}(0) = F \quad (22)$$

$$d\hat{\alpha} = \nu\hat{\alpha}dW_2, \quad \hat{\alpha}(0) = \alpha. \quad (23)$$

Yhtälössä 22 \hat{F} kuvaa kohde-etuuden forward-hintaa eli tässä tapauksessa forward-korkoa. Volatilitteetin $\hat{\alpha}$ muutoksen oletetaan olevan stokastinen prosessi. Parametria ν kutsutaan volatilitteetin volatilitteetiksi. β kuvaa oletusta markkinoiden toiminnasta. Standardiin Brownin liikkeeseen perustuvien Wiener-prosessien dW_1 ja dW_2 välille oletetaan korrelaatio ρ siten, että

$$dW_1 dW_2 = \rho dt. \quad (24)$$

SABR-mallissa implisiittinen volatilitteetti määritetään markkinadatasta Black-Scholes -mallin avulla. Blackin mallin mukaan eurooppalaisen option hinnalle saadaan osto-option tapauksessa

$$V_{call} = D(t_{set})[FN(d_1) - KN(d_2)] \quad (25)$$

ja myynti-option tapauksessa

$$V_{put} = V_{call} + D(t_{set})[K - F], \quad (26)$$

missä normaalijakauman $N(d_i)$ parametrit d_1 ja d_2 saadaan kaavoista 5 ja 6. Kaavoissa 5 ja 6 esiintyvä t_{ex} on option toteutumisaikakohta ja σ_B implisiittinen volatilitteetti eli toisin sanoen Black-Scholes -volatilitteetti.

Kaavoissa 25 ja 26 esiintyvä $D(t_{set})$ on diskonttaustekijä option maksuajankohdan t_{set} funktiona. SABR-mallin antamalle implisiittiselle volatilitteetille saadaan johdettua kaavan 27 mukainen, sarjamuotoinen ratkaisu.

$$\sigma_B(K, F) = \frac{\alpha}{(FK)^{\frac{1-\beta}{2}} \left(1 + \frac{(1-\beta)^2}{24} \ln^2\left(\frac{F}{K}\right) + \frac{(1-\beta)^4}{1920} \ln^2\left(\frac{F}{K}\right) + \dots \right)} \cdot \left(\frac{\xi}{x(\xi)} \right) \cdot \left(1 + \left(\frac{(1-\beta)^2 \alpha^2}{24(FK)^{1-\beta}} + \frac{\rho \alpha \nu \beta}{4(FK)^{\frac{1-\beta}{2}}} + \frac{2-3\rho^2}{24} \nu^2 \right) t_{ex} + \dots \right). \quad (27)$$

Kaavassa 27 volatiliteetin volatiliteetin suhdetta volatiliteettiin forward-korolla f kuvataan parametrilla

$$\xi = \frac{\nu}{\alpha} (fK)^{\frac{1-\beta}{2}} \ln\left(\frac{f}{K}\right). \quad (28)$$

Lisäksi suhteelle ξ ja korrelaatiolle ρ saadaan riippuvuus

$$x(\xi) = \ln\left(\frac{\sqrt{1-2\rho\xi+\xi^2}-\rho+\xi}{1-\rho}\right). \quad (29)$$

Kaavassa 27 esitettyyn sarjamuotoiseen ratkaisuun on kirjoitettu kaksi ensimmäistä termiä. Ratkaisu tarkentuu t :n lähestyessä nolaa. Kaavasta 27 nähdään, että $\hat{\alpha}$:lla on yhteys at-the-money -volatiliteettiin. Kun ollaan ns. at-the-money eli $K = F$, saadaan kaavalle 27 muoto

$$\sigma_{atm}(F, F) = \frac{\alpha \left(1 + \left(\frac{(1-\beta)^2 \alpha^2}{24 F^{2-2\beta}} + \frac{1\rho\beta\nu\alpha}{4F^{1-\beta}} + \frac{2-3\rho^2}{24} \nu^2 \right) t_{ex} \right)}{F^{1-\beta}}. \quad (30)$$

Kun kaavassa 27 asetetaan parametrin β arvoksi joko 0 ja 1, saadaan kaksi erikoistapausta. Tapauksessa $\beta = 0$ kohde-etuuden hinta palautuu stokastisesti normaalijakautuneeksi ja tapauksessa $\beta = 1$ log-normaalijakautuneeksi. Näistä erikoistapauksia tarkastellaan lisää kappaleessa 7.3.

Kun kaavan 27 mukainen implisiittisen volatiliteetin ratkaisu sijoitetaan uudelleen Black-Scholes:n kaavaan, saadaan korko-optioille mallin oletusten mukaiset hinnat. Kappaleessa 6.2 esitetään mallin implementointi.

Mallin johtaminen markkinoiden oletusten pohjalta on matemaattisesti erittäin haastavaa ja vaatii erityisesti martingaaliteorian syvällistä ymmärtämistä. Edellä on kuvattu mallin dynamiikkaa sen implementoinnin edellyttämässä laajuudessa. Mallin parametreja sekä käyttäytymistä eri parametrien arvoilla on tulkittu saatujen tulosten pohjalta kappaleessa 7.3.

Mallin kehittivät Patrick Hagan, Deep Kumar, Andrew Lesniewski sekä Diana Woodward ja se esiteltiin ensimmäisen kerran julkaisussa "Managing Smile Risk" vuonna 2002. Julkaisussa on esitetty perusteet mallin oletuksille, ja se sisältää kattavan tutkielman ns. volatiliteettihymyn dynamiikasta (Hagan 2002).

6.2 Mallin implementointi

Ohjelmoimme staattisen SABR-mallin mukaisen toteutuksen Matlabilla (Hagan 2002). Lisäksi ohjelmoimme algoritmin, joka muodostaa SABR:n parhaan mahdollisen sovituksen havaittuihin markkinahintoihin PNS-menetelmää käyttäen (Ladokhin 2009). Ohjelmoimme myös raportissa esiintyvien graafien ja taustaanalyysien tuottamista varten useamman erillisen funktion, jotka integroituvat SABR:n Matlab-toteutukseen. Mallimme toimii ainoastaan uusimmassa Matlabin versiossa 2009b, jossa Optimization Toolboxin fmincon-funktion interior point method on uudistettu.

Toteutuksemme mahdollistaa SABR:n parametrien kalibroinnin mielivaltaisille havaintoajanjaksoille. Tässä työssä kalibroimme parametrit havaintojakson (vuosi 2009) jokaiselle päivälle erikseen, jolloin pystyimme tarkastelemaan parametrien kehitystä ajassa.

Teimme kalibroinnin kiinnittämällä β :n haluttuun arvoon. Arvon valinta kuvasi näkemystämme koron hintadynamiikasta. β :n voi myös määrittää historiallisista havainnoista F :n ja σ_{atm} :n parien log log -kuvaajasta (Hagan 2002), mutta arvelimme tähän liittyvän epävarmuuksia käyttämämme datan lyhyen ajanjakson vuoksi. Teimme sovituksen pitämällä parametrit ρ , ν ja α vapaina muuttujina. Parempi tapa olisi pitää ρ ja ν vapaina muuttujina ja asettaa α havaintoaineistosta löytyvien "at the money" -havaintojen perusteella. Datassamme ei kuitenkaan ole riittävästi "at the money" -havaintoja, joten on perusteltua käyttää valitsemaamme optimointitapaa. At-the-money havaintoja voitaisiin arvioida, mutta se olisi spekulatiivista.

Datan analysoinnissa erityisesti implisiittisen volatiliteetin numeerinen ratkaiseminen stripatuista caplettien hinnoista (raskas operaatio `blsimpv()` -funktiolla) osoitti Matlabin tarpeellisuuden verrattuna esim. Exceliin. Matlabin toiminnallisuus ja laskentatehokkuus tulivat useasti käyttöön projektin aikana. Nykyisessä laajuudessaan työmme olisi ollut mahdoton urakka esimerkiksi Excelin Visual Basicilla mallinnettuna.

6.3 Mallin kalibrointi

Mallin parametrit kalibroidiin käyttämällä korkomarkkinoilla hinnoiteltujen caplettien volatiliteetteja. Parhaan SABR-mallin tuottaman sovituksen saamiseksi muutettiin mallin parametreja α , ν ja ρ , kun β oli asetettu vakioksi. Tällöin saatiin minimoitua jokaisella maturiteetti-strike -parilla toteutuneiden volatiteettien ja SABR-mallin antamien volatiteettien erotusten neliöiden summa eli

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^s (\sigma_{toteutunut,ij} - \sigma_{B,ij})^2. \quad (30)$$

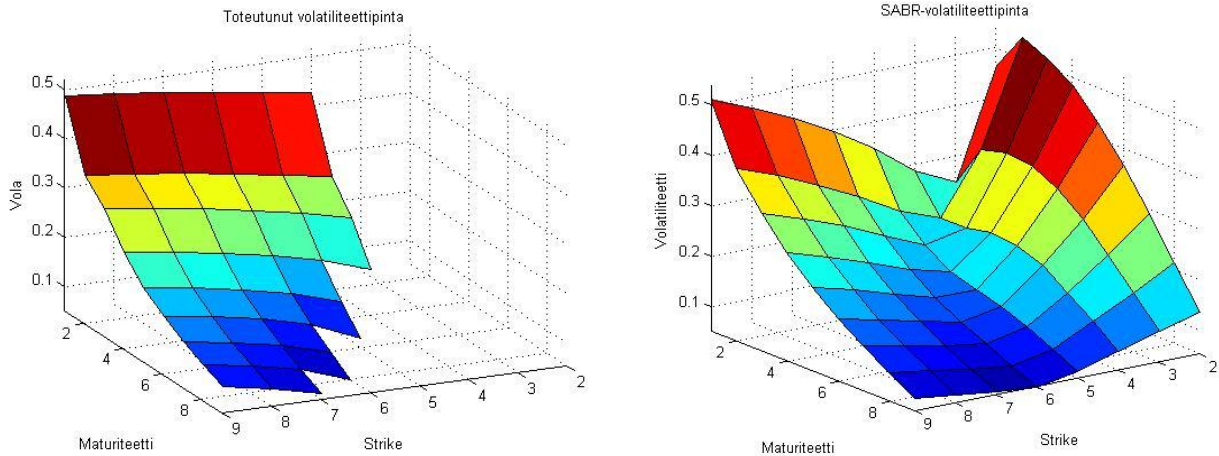
Pienin neliösumma saatiin käyttämällä sisäpistemenetelmää, joka ratkaisee epälineaarisen tehtävän yhtälö- ja epäyhtälörajoitusehtojen kanssa. Matlabissa sisäpistemenetelmää käyttää `fmincon`-funktio.

7 Tulokset

SABR-mallin toimintaa tarkasteltiin vertaamalla sen antamilla parametreilla muodostettua volatiliteettipinnan sovitetta toteutuneeseen volatiliteettipintaan. Mallin toimivuutta validoitiin tarkastelemalla saadun volatiliteettipinnan implikoimien korko-optioiden hintoja ja vertaamalla niitä toteutuneisiin hintoihin. Mallin parametrien kelpoisuutta tarkasteltiin tutkimalla niiden muutosta ajan funktiona ja niiden vaikutusta mallin antaman pinnan muotoon.

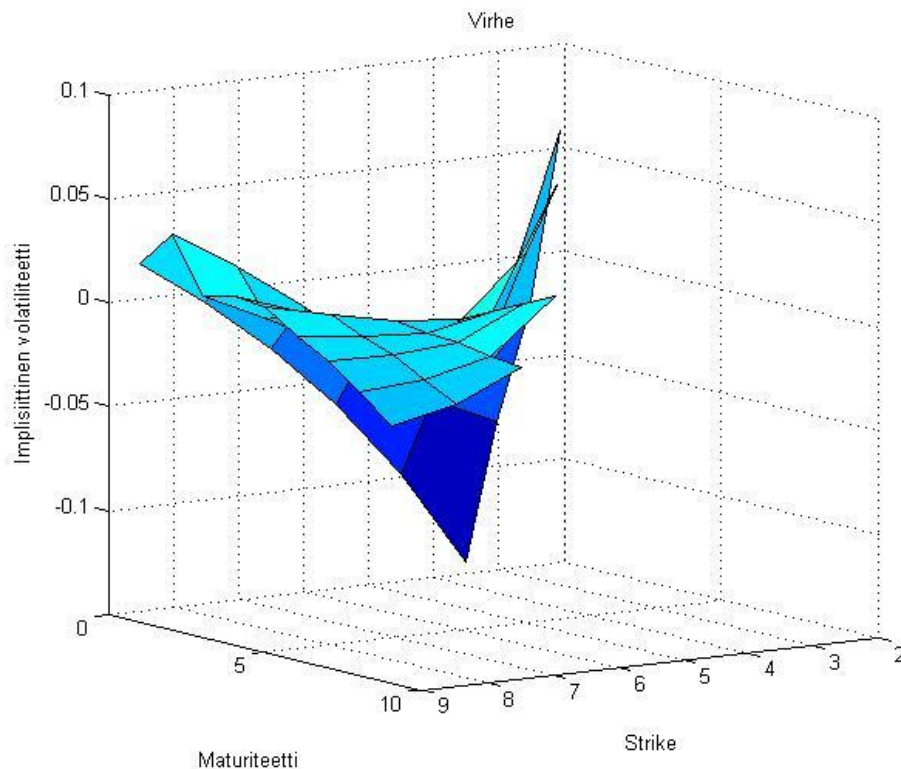
7.1 Volatiliteettipinta

Käytössä olleeseen dataan kalibroidiin jokaiselle päivälle erikseen SABR-mallin parametrit, joilla voitiin muodostaa volatiliteettipinta maturiteetin ja striken funktiona. Kuvassa 3 on esitettyä 30.12.2009 toteutunut volatiliteettipinta, jota verrattiin mallin samalle päivälle antamaan pintaan, joka on esitettyä kuvassa 4.



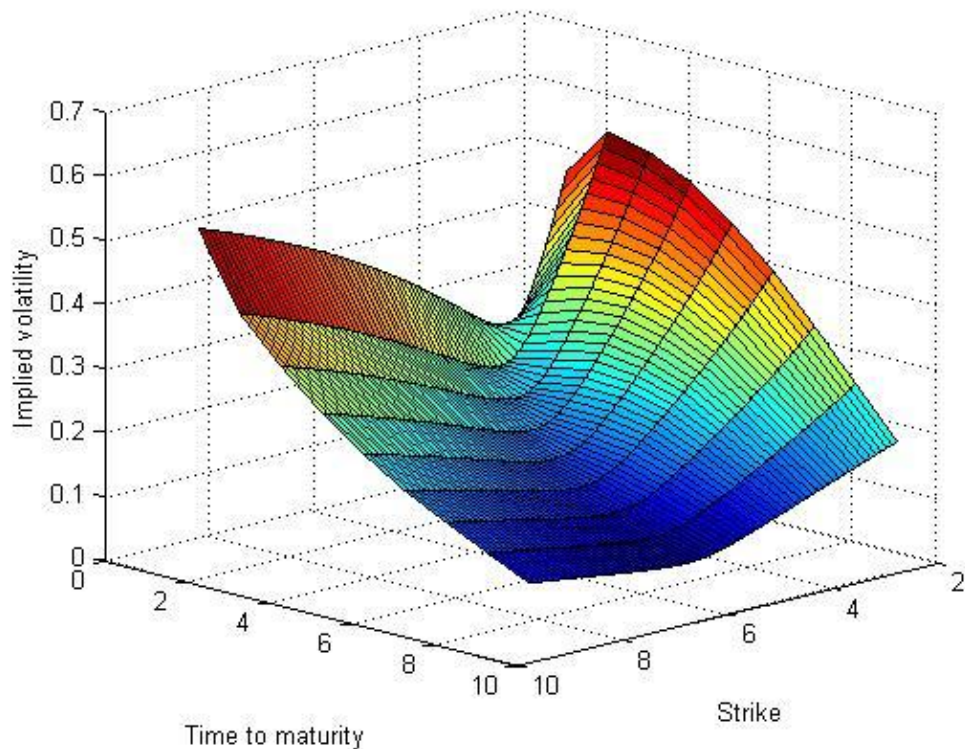
Kuvat 3 ja 4: Toteutunut ja SABR:n antama volatilitteettipinta 30.12.2009

Toteutuneen ja SABR-mallin antaman volatilitteettipinnan välinen virhe on esitetty kuvassa 5, josta nähdään, että SABR:n antama volatilitteetti on liian pientä lyhyiden maturiteettien pienillä strikeilla ja oletettavasti liian suurta pitkien maturiteettien pienillä strikeilla. Virhe johtuu datan puuttumisesta kyseisellä alueella.



Kuva 5: SABR:n antaman volatilitteettipinnan virhe verrattuna toteutuneeseen volatilitteettipintaan 30.12.2009

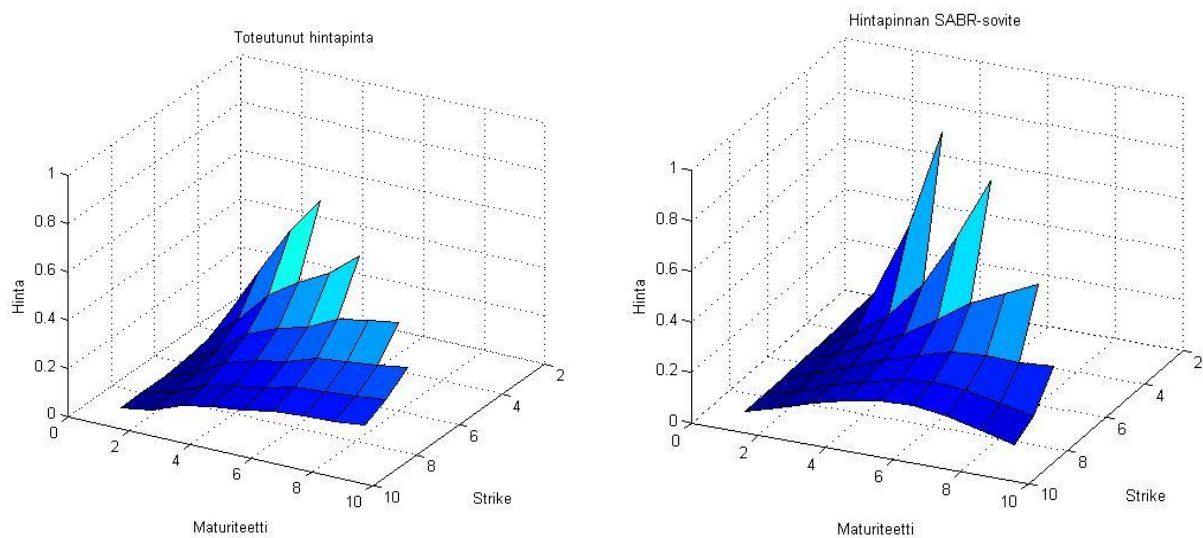
SABR-mallilla voidaan muodostaa capletin volatilitteetti millä tahansa striken arvolla, jolloin saadaan kuvan 6 mukainen pinta, joka on kuvan 4 pintaan verrattuna sileämpi.



Kuva 6: SABR-mallin antama volatiliteettipinta tiheämmillä striken arvoilla

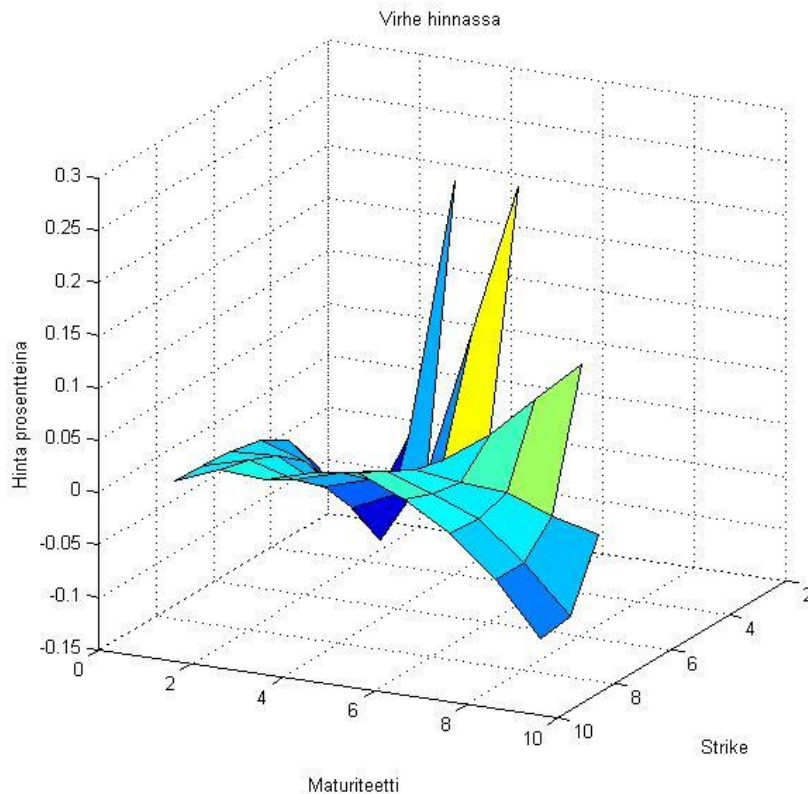
7.2 Korko-optioiden hinnoittelu volatiliteettipinnalla

Mallin toimivuutta tutkittiin vertaamalla mallin antamien volatiliteettien tuottamia korko-optioiden hintoja toteutuneisiin hintoihin. Hinnat on ilmoitettu osuutena kohde-etuuden hinnasta. Kuvassa 7 on esitettyä toteutuneet korko-optioiden hinnat ja kuvassa 8 SABR-mallilla saadut hinnat 30.12.2009.



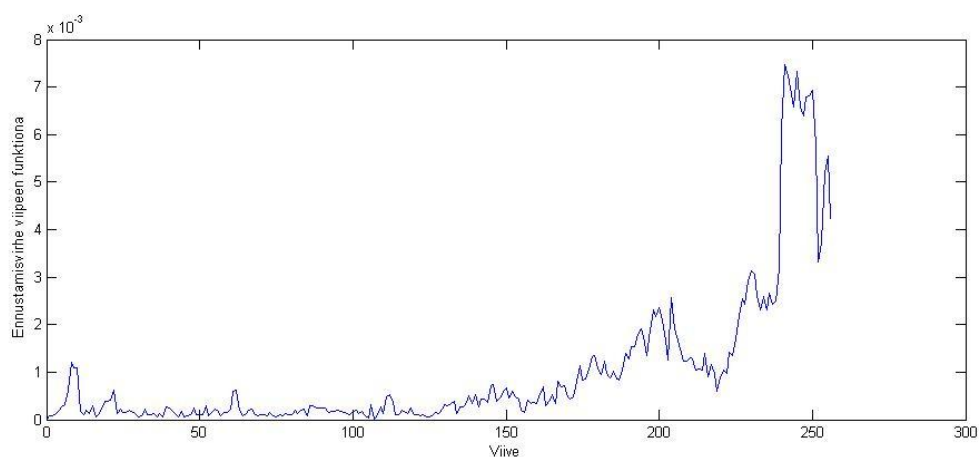
Kuvat 7 ja 8: Toteutuneet ja SABR:n antamat korko-optioiden hinnat maturiteetin ja striken funktiona 30.12.2009

Kuvassa 9 on esitetty SABR-mallin antamien hintojen virhe verrattuna toteutuneisiin hintoihin 30.12.2009. Kuvasta huomataan, että SABR-malli ylihinnottelee capletit, joiden viereisiltä maturiteeteilta ja strikeilta ei ole käytössä markkinadataa. Sovitteen tuottama virhe on kuitenkin pientä alueella, johon SABR:n volatilitteettipinta on sovitettu.



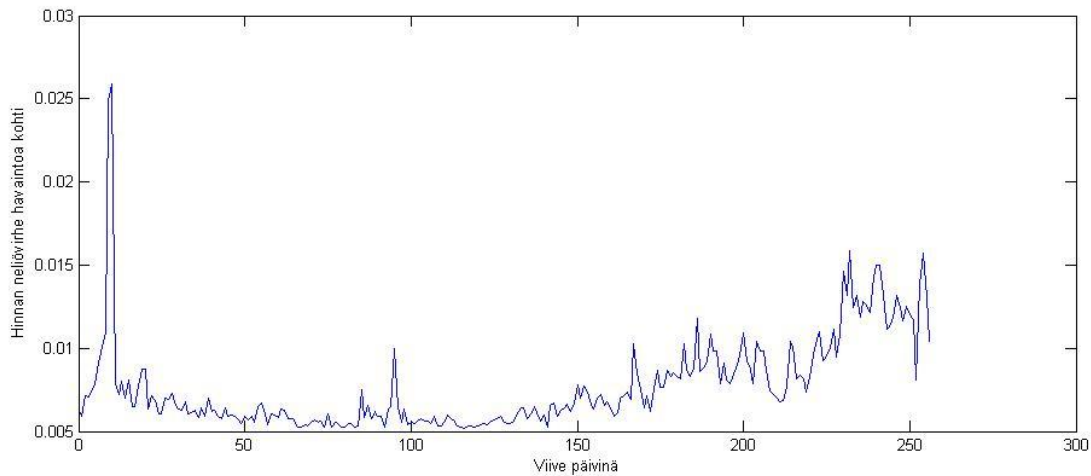
Kuva 9: Toteutuneen ja SABR:n antaman korko-optioiden väliset hintaerot 30.12.2009

Kuva 10 esittää mallin ennustamisvirhettä viipeen funktiona. Esimerkiksi viipeellä 1 tarkoitetaan päivän 30.12. havaittujen implisiittisten volatilitteettien ennustamista päivän 29.12. parametreilla. Ennustamisvirhe on laskettu neliösummana koko volatilitteettipinnan yli.



Kuva 10: Implisiittisen volatilitteetin ennustamisvirhe viipeen funktiona

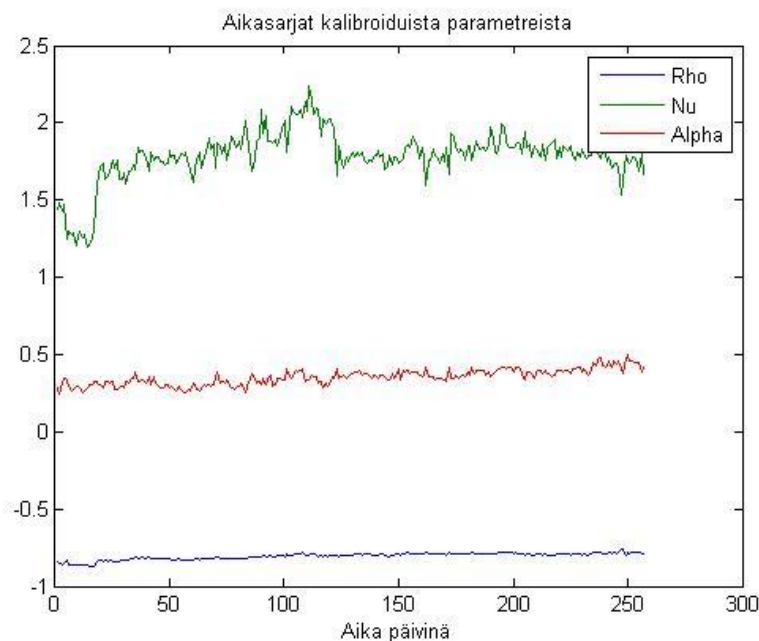
Kuva 11 esittää capletin hinnan virheen havaintoa kohti ennustamisviipeen funktiona. Esimerkiksi hinnan keskimääräinen neliövirhe viipeellä 1 on saatu ennustamalla päivän 30.12. capletien hintoja päivän 29.12. parametreilla.



Kuva 11: Option hinnan keskimääräinen virhe havaintoarvoa kohti

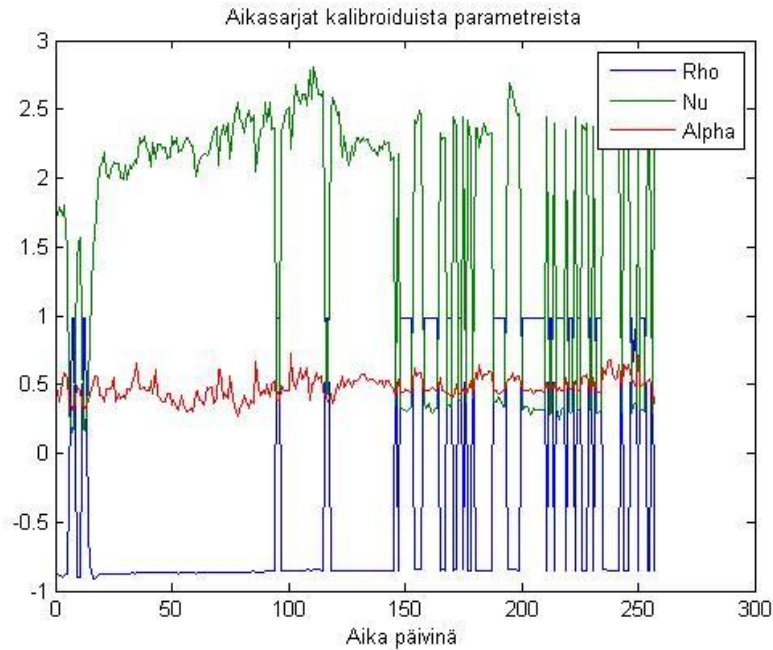
7.3 Parametrien tarkastelu ja kehitys ajan suhteen

SABR-mallin muodostama volatilitteettipinta sovitettiin jokaiselle päivälle erikseen, jolloin saatiin parhaiten kyseistä päivää vastaavat parametrit. β -parametrille voidaan käyttää arvoja nollan ja yhden väliltä. Arvo nolla viittaa koron normaalijakautuneisuuteen ja yksi viittaa koron lognormaaliseen jakaumaan. Kuvassa 10 on esitettyä parametrien päivittäinen kehitys vuonna 2009, kun β -parametri on asetettu arvoon 0,9. Kyseinen arvo kuvastaa oletuksiamme koron dynamiikasta, sillä oletamme koron liikkeiden olevan lähes lognormaalisia.



Kuva 12: Parametrien kehitys ajassa, kun $\beta = 0,9$. Kalibroitinta on toteutettu volatilitteeteilla.

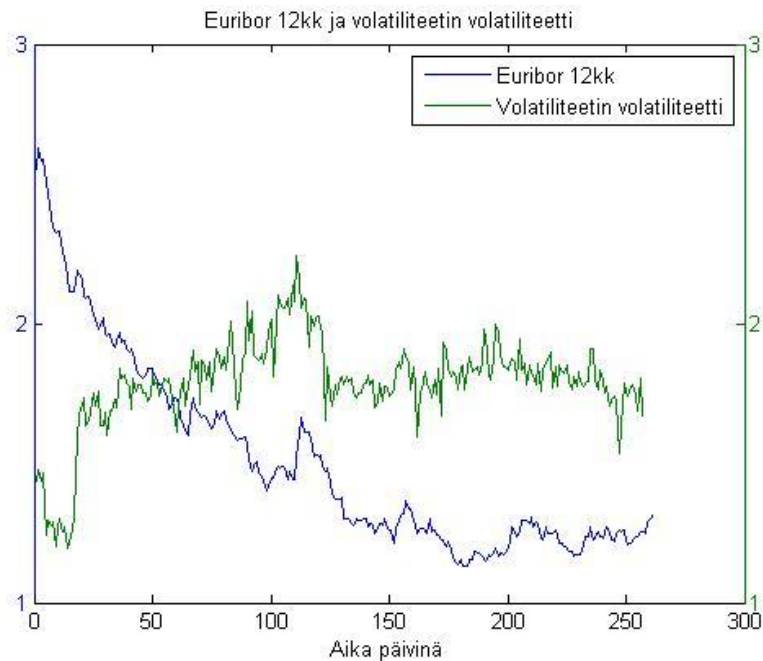
Emme estimoineet erikseen β :lle arvoa datasta, vaan piirsimme sen sijaan parametrien ρ , ν ja α kiinteällä β :n arvolla. Vertailun vuoksi kuvassa 11 on piirretty parametrien ρ , ν ja α kehitys ajassa betan arvolla 0,4.



Kuva 13: Parametrien kehitys ajassa, kun $\beta = 0,4$

Kuten kuvasta 11 nähdään, parametrien kehitystä kuvaavista käyristä ei tällöin tule jatkuvia. Tämä johtuu siitä, että mallin sovittamiseen käytetty PNS-algoritmiimme ei tällöin löydä parametreille aina ratkaisua. Kuvista myös huomataan, että kun β :n arvo on pienempi, muiden parametrien varianssit kasvavat.

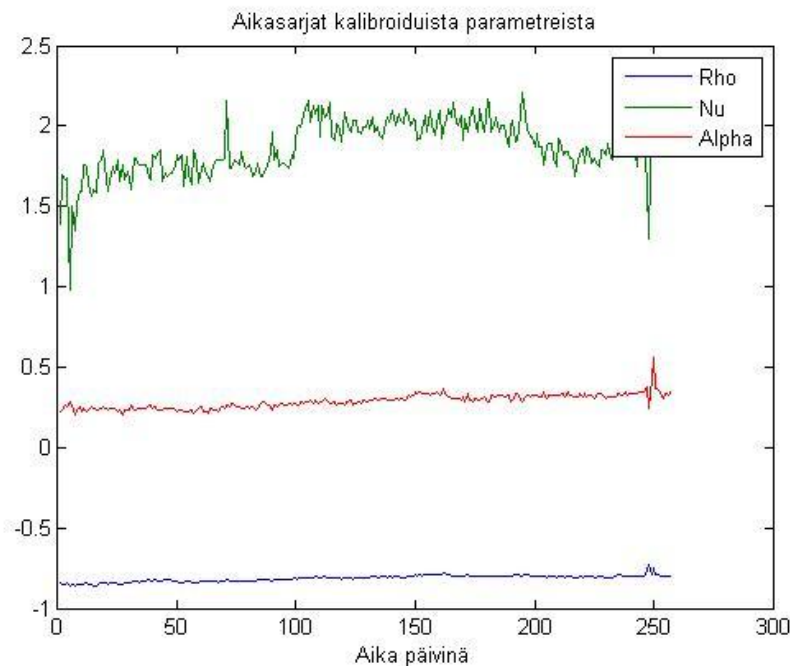
Kuvasta 12 nähdään kuinka volatilitiitin volatilitiitin kehitystä voidaan selittää koron muutoksilla. Tarkasteltavan ajanjakson, vuoden 2009, alussa tapahtuva koron jyrkkä lasku osuu samaan aikaan volatilitiitin volatilitiitin poikkeaman kanssa. Noin päivän 110 kohdalla tapahtuva heilahdus volatilitiitin volatilitiitissa sopii hyvin yhteen koron nopean vaihtelun kanssa.



Kuva 14: Euribor 12kk koron ja volatiliteetin volatiliteetin kehitys

Parametreille saatiin estimoitua β arvolla 0,9 keskimääräiset arvot $\rho = -0,8$, $\nu = 1,8$, $\alpha = 0,4$.

Kirjallisuuskatsauksen perusteella α ja ν ovat samaa suuruusluokkaa kirjallisuudessa käytettyjen arvojen kanssa (Benhamou 2007). Benhamou käyttää seuraavia arvoja kohde-etuutena olevalle LIBOR-korolle: $\beta = 0,7$, $\rho = -0,5$, $\nu = 0,2$ ja $\alpha \in [0,11, 0,3]$. Estimoimamme parametrien arvot ovat samaa suuruusluokkaa kirjallisuudesta löydettyjen parametrien arvojen kanssa, vaikkakin meillä ν on suurempi.

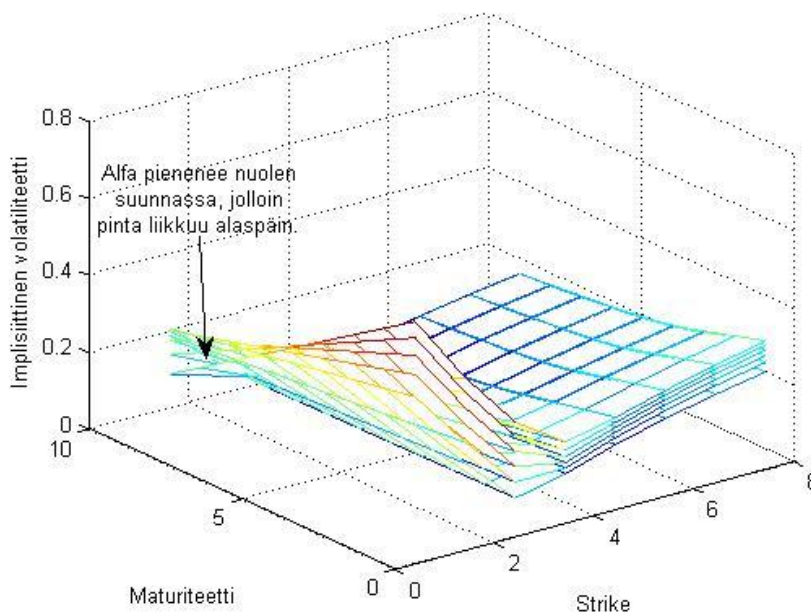


Kuva 15: Parametrien kehitys ajassa, kun $\beta = 0,9$. Kalibrointi on toteutettu hinnoilla.

Kuvassa 15 on esitetty vielä parametrien kehitys ajassa, kun $\beta = 0,9$ ja kalibrointi on toteutettu hintojen mukaan. Vertaamalla kuvia 12 ja 15 voidaan havaita, että parametrit saavat sekä volatilitteettien että hintojen mukaan kalibrointina samat arvot. Parametrien kehitys ajassa on tasaisempaa, kun kalibrointi on tehty hintojen mukaan.

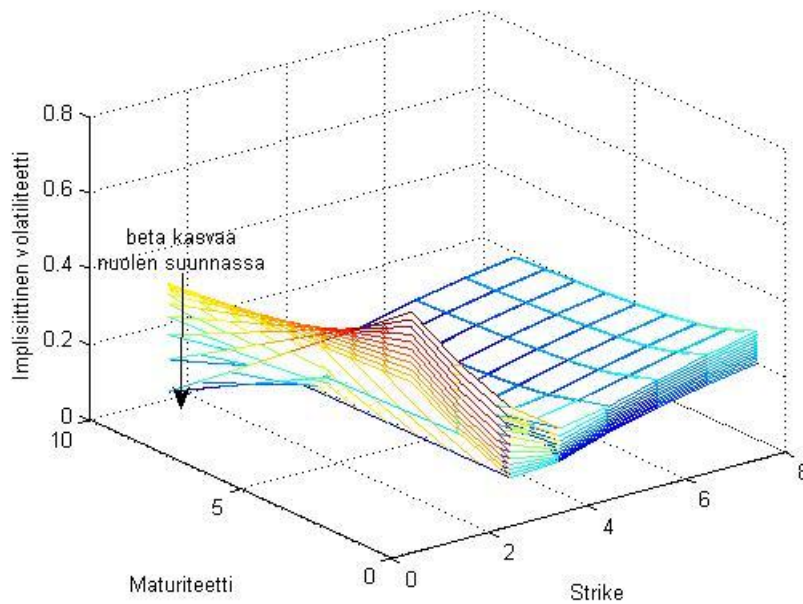
7.4 Parametrien vaikutus volatilitteettipintaan

Teimme herkkyyksianalyysia nähdäksemme, kuinka parametrien arvot vaikuttavat volatilitteettipinnan muotoon. Analyysissa muutettiin jokaista parametria erikseen volatilitteettipinnalla, jonka alkuperäiset arvot olivat $\alpha = 0,4, \beta = 0,9, \rho = -0,8$ ja $\nu = 1,8$. α -parametria muutettiin välillä $0 - 0,4$, jolloin saatiin kuvien 15 - 18 mukaiset pinnat. Kuvasta 13 nähdään, että α :n pienentyessä volatilitteettipinta laskee ja kääntyy hieman.



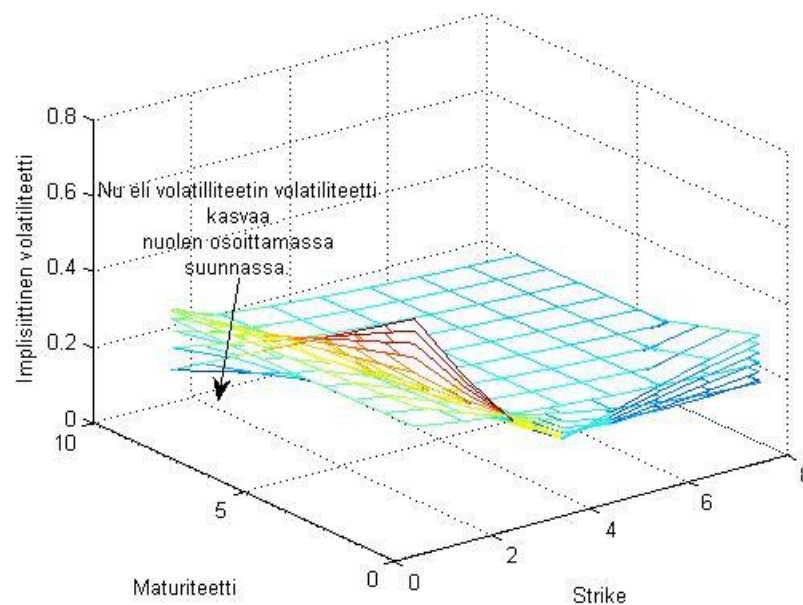
Kuva 15: α -parametrin vaikutus volatilitteettipinnan tasoon

β -parametria muutettiin välillä $0 - 1$, jolloin saatiin kuvan 16 mukaiset volatilitteettipinnat, joista huomataan selvästi parametrin vaikutus vinouteen maturiteetin funktiona.



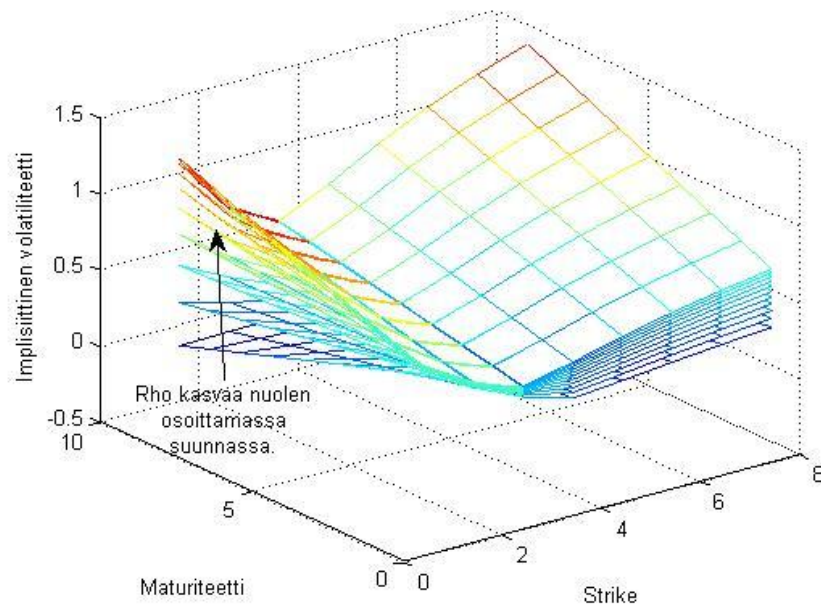
Kuva 16: β -parametrin vaikutus volatilitiieettipinnan skewin muotoon

ν -parametria muutettiin välillä 0,1 – 1,9, jolloin saatiin kuvan 17 mukaiset volatilitiieettipinnat. Poinnoista huomataan kuinka volatilitiieetin kasvaessa muodostuu vinous niin toteutushinnan kuin maturiteetin funktiona.



Kuva 17: ν -parametrin vaikutus volatilitiieettipinnan muotoon

ρ -parametria muutettiin välillä -0,9 – 0,9, jolloin huomataan parametrin voimakas vaikutus toteutushinnan vinoumaan, mikä on nähtävissä kuvassa 16.



Kuva 18: ρ -parametrin vaikutus volatilitiiteettipinnan skewin muotoon

Herkkyysanalyysistä saatiin samanlaiset tulokset parametrien vaikutuksesta volatilitiiteettipintaan kuin yleisesti kirjallisuudessa on havaittu (Hagan, 2002). Parametreilla β ja ρ on voimakas vaikutus pinnan vinouteen. Parametri α vaikuttaa pinnan korkeuteen ja parametri v voimistaa smile-efektiä.

8 Mallin jatkokehitys

Tuloksista huomataan, että SABR-mallilla lasketut volatilitetit vastaavat hyvin markkinoilla havaittuja volatilitetteja. SABR-malli kannattaa näin ollen ottaa huomioon myöhemmissä tutkimuksissa. Tämä tutkimus rajoittuu kuitenkin pieneen aikaikkunaan, minkä johdosta jatkotutkimuksia on syytä tehdä. Kappaleessa 8.1 esitellään muutamia lähtökohtia jatkotutkimuksille sekä mallin parantamiselle. Kappale 8.2 esittelee delta ja vega - riskejä sekä antaa tulkinnan volatilitetin volatilitetille v . Delta ja vega - riskien tulkinta havainnollistaa parametrien keskinäistä riippuvuutta ja antaa työkaluja riskienhallinnan tueksi SABR-mallia käytettäessä.

8.1 SABR-malli

Pinnasta saataisiin parempi muun muassa etsimällä markkinadataan puuttuvat pisteet pienillä strike-hinnoilla ja suurilla maturiteeteilla. Tällöin pinnan muodosta ja smile-efektistä tulee vähemmän kumikas ja estimoinnemme pinta pystyy paremmin kuvaamaan oikeita volatilitetin arvoja erityisesti alueella, josta tällä hetkellä puuttuvat havaintoarvot. Tällöin myös estimoinnemme parametrit ρ , ν ja α kuvaavat paremmin markkinoilla havaittuja arvoja, jolloin niiden merkitystä ja muuttumista ajassa voidaan arvioida paremmin perusteiden.

Lisäksi mallin teoreettista selityskykyä voidaan parantaa antamalla volatilitetin volatilitetin ν kehittyä ajassa, kuten olemme demonstroineet kuvissa 12 ja 13. Tässä projektityössä esittelemämme SABR-malli on pohjimmiltaan staattinen, mutta on erikseen olemassa dynaaminen SABR-malli, jonka ominaisuuksiin kuuluu volatilitetin volatilitetin ν kehittyminen maturiteetin funktiona. Tähän dynaamiseen SABR-malliin kannattaa tutustua jatkossa, sillä sen avulla voidaan saada vieläkin parempia tuloksia.

SABR-malli ei itsessään sisällä pitkäaikaiseen normaalitasoon kehittyvää trendiä (mean reversion). Tuloksemme eivät myöskään ota kantaa SABR:n ennustamiskykyyn pitkissä aikaikkunoissa. SABR-mallin voisi kalibroida pitkän aikavälin markkinahistorialla, painottaen havaintoja havaintoajankohdan mukaan, jolloin malli huomioi myös pitkän aikavälin suhdanteet. Tällainen menetelmä on esimerkiksi havaintoarvojen eksponentiaalinen painottaminen ajan funktiona. Painotuksen merkitystä tuloksiin kannattaisi tutkia jatkossa, sillä pitkän aikavälin suhdannekehityksen huomioiminen yhdistettynä smile-efektin kuvaamiskykyyn, SABR-malli voisi olla erittäin varteenotettava vaihtoehto korko-optioiden todellisten markkinahintojen laskemiseen.

8.2 Δ - ja Λ -riskit SABR-mallissa

Tämä kappale käsittelee SABR-mallin käyttöä delta- ja vega-riskien arvioinnissa. Delta ja vega - riskit kuvaavat option hinnan herkkyyttä α -parametrin ja forward-koron vaihteluille. Option arvo V on SABR-mallissa funktio kohde-etuudesta f , toteutushinnasta K , implisiittisestä volatilitetista σ ja maturiteetista T

$$V = B(f, K, \sigma(K, f, \alpha, T), T), \quad (31)$$

jossa B tarkoittaa Blackin kaavaa eurooppalaisen osto-option hinnoitteluksi. Tutkitaan seuraavissa kappaleissa, miten herkkä option arvo on muutoksille kohde-etuuden arvossa ja SABR-parametrin α arvossa. Tarkastellaan aluksi option hinnan herkkyyttä forward-koron suhteen laskemalla osittaisderivaatta $\frac{\partial V}{\partial f}$. Ketjusääntöä käyttämällä saadaan

$$\frac{\partial V}{\partial f} = \frac{\partial}{\partial f} [B(f, K, \sigma(K, f, \alpha, T), T)] = \frac{\partial B}{\partial f} + \frac{\partial B}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial f}. \quad (32)$$

Koska α ja f ovat korreloituneita kaavan 9 mukaisesti, f :n muuttuessa myös α muuttuu keskimäärin korrelaatiokertoimen ρ mukaisesti. Kaavat 7, 8 ja 9 voidaan kirjoittaa toisessa muodossa

$$dF = \alpha F^\beta dW_1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{dF}{F^\beta dW_1} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} d\alpha &= v\alpha(\rho dW_1 + \sqrt{1-\rho^2} dW_2) = \rho v\alpha * dW_1 + v\alpha\sqrt{1-\rho^2} * dW_2 \\ &= \frac{\rho v}{F^\beta} dF + v\alpha\sqrt{1-\rho^2} * dW_2. \end{aligned} \quad (34)$$

Tarkastellaan nyt uudelleen yhtälöä 32. Koska α riippuu forward-korosta f kaavan 34 mukaisesti, yhtälö 32 saadaan muotoon

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial f} &= \frac{\partial B}{\partial f} + \frac{\partial B}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial f} = \frac{\partial B}{\partial f} + \frac{\partial B}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial f} + \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial f} \right) \\ &= \frac{\partial B}{\partial f} + \frac{\partial B}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial f} + \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} \frac{\rho v}{F^\beta} \right), \end{aligned} \quad (35)$$

jossa termi $\frac{\partial \alpha}{\partial f}$ on korvattu termillä $\frac{\rho v}{F^\beta}$. Tämä voidaan hyväksyä relaation 34 perusteella: kun $dW_2 = 0$ eli W_2 pysyy vakiona, niin differentiaalinen muutos dF kohde-etuuden F arvossa aikaansaa muutoksen $d\alpha = \frac{\rho v}{F^\beta} dF \Leftrightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial f} = \frac{\rho v}{F^\beta}$ α :n arvossa.

Edelleen saadaan approksimatiivinen relaatio option hinnan herkkyydelle forward-koron muutosten suhteen

$$\Delta V = \left[\frac{\partial B}{\partial f} + \frac{\partial B}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial f} + \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} \frac{\rho v}{F^\beta} \right) \right] \Delta f, \quad (36)$$

jossa siis termi $\frac{\partial B}{\partial f} + \frac{\partial B}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial f} + \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} \frac{\rho v}{F^\beta} \right)$ on option delta. Tutkitaan sitten option arvon herkkyyttä implisiittisen volatilitteen σ suhteen. Osittaisderivoimalla kaava 31 α :n suhteen saadaan

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \frac{\partial B}{\partial \alpha} = \frac{\partial B}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} = \frac{\partial B}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} + \frac{\partial \sigma}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right), \quad (37)$$

jossa $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ voidaan korvata termillä $\frac{\rho F^\beta}{v}$ (Hagan et al. 2006.). Siten kaavasta 37 saadaan

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \frac{\partial B}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} + \frac{\partial \sigma}{\partial f} \frac{\rho F^\beta}{v} \right). \quad (38)$$

Tällöin option hinnan herkkyys parametrin α suhteen voidaan esittää muodossa

$$\Delta V = \left[\frac{\partial B}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} + \frac{\partial \sigma}{\partial f} \frac{\rho F^\beta}{v} \right) \right] \Delta \alpha, \quad (39)$$

jossa termi $\frac{\partial B}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} + \frac{\partial \sigma}{\partial f} \frac{\rho F^\beta}{v} \right)$ on option vega (Hagan et al. 2006).

9 Yhteenveto

Työn tavoitteena oli luoda asiakkaallemme valitsemallamme volatiliteettipinnan konstruointimallilla referenssipinta vertailtavaksi heidän korko-optioiden hinnoitteluun käyttämäänsä valmiiseen volatiliteettipintaan. Tämä rakentamamme pinta oli tarkoitus kalibroida annetulla korko-optioiden markkinahintahistorialla. Lisäksi volatiliteetin volatiliteetti haluttiin määrittää pankin riskienhallinnan tarpeisiin. Kirjallisuuskatsauksen ja mallin implementoinnin keskeiset tulokset tuli koota raporttiin tiiviiseen muotoon, jotta asiakas pystyy nopeasti ymmärtämään ja ottamaan käyttöön valitsemamme mallin omassa riskienhallinnassaan.

Teimme laajan kirjallisuuskatsauksen korkokäyrän dynamiikkaa kuvaavien mallien maailmaan, joita soveltamalla pystyisimme rakentamaan mallin mukaisen korko-option volatiliteettipinnan. Näistä malleista tehtävänannon vaatimuksia parhaiten vastaavaksi malliksi nousi SABR-malli, jonka etuihin lukeutuivat volatiliteettipinnan analyttinen ratkaisu, volatiliteetin volatiliteetin oleminen osa ratkaisua, smile-efektin kuvaaminen ja markkinadataan perustuvan kalibroinnin suoraviivainen implementointi.

Implementoimme SABR-mallin Matlabilla kirjallisuuskatsauksen lähteisiin perustuen ja tarkistimme koodimme toimivuuden soveltamalla sitä löytämiimme esimerkitapauksiin.

Seuraavaksi valitsemamme malli tuli kalibroida asiakkaaltamme saamamme korko-optioiden hintoja kuvaavan markkinadatan perusteella. Korko-optiot tuli purkaa malliamme varten capleteiksi. Päätimme tehdä kalibroinnin kullekin päivälle erikseen, jotta voisimme tarkastella parametrien kehitystä ajan suhteen sekä arvioida parametrien arvojen järkevyyttä. Käytimme mallin sovittamiseen kullekin päivälle PNS-menetelmää, jossa muutimme parametrien arvoja vapaasti minimoiden mallimme antamien volatiliteettien virheiden neliösummaa kullakin päivällä erikseen.

Tulosten tarkasteluvaiheessa huomasimme mallin kuvaavan smile-efektin asiakkaan haluamalla tavalla, kuten teoria-osuuden perusteella oli syytä odottaa. Verratessamme mallimme muodostamaa volatiliteettipintaa asiakkaan hinnoittelussa käyttämään pintaan huomasimme, että mallimme kuvasi hyvin vertailupintaa niiltä osin, joilta meillä oli markkinadataa olemassa. Korkokattoja myydään kuitenkin vain hyvin rajallisella strike-hintojen ja maturiteettien yhdistelmillä, joka johtaa mallimme huonoon selityskykyyn siinä alueessa, josta meillä ei ole markkinadataa saatavilla. Verratessamme markkinadatasta määrittämiämme parametreja ρ , ν ja α kirjallisuuskatsauksessamme löytämiimme muiden mallin soveltajien määrittämiin lukuihin havaitsimme arvojen olevan oikeassa suuruusluokassa.

SABR-malli sopii mielestämme erittäin hyvin korko-optioiden volatiliteettipinnan rakentamiseen. Sillä pystytään muodostamaan tasainen ja jatkuva analyttinen pinta hyvin laskentatehokkaasti sovittamalla havaittuihin markkinahintoihin. Kuitenkin sen antama volatiliteettipinta tulee ottaa yhtenä ratkaisuna muiden joukossa. Mallimme muodostaa havaittuun markkinadataan mahdollisimman hyvin sopivan soviteen, joten se ei millään tavalla pyrikään muodostamaan markkinahinnoista riippumatonta näkemystä korko-optioiden hinnoista. Hyvän arvion muodostamiseen korko-option oikeasta hinnasta tulisi käyttää useiden hinnoittelumenetelmien yhdistelmää, johon lukeutuisi markkinaperusteisten hinnoittelumenetelmien lisäksi korko-optioiden markkinahinnoista riippumattomia hinnoittelumenetelmiä, jotka perustuisivat esimerkiksi oletuksiin perustana olevan koron hintadynamiikasta.

Muodostamamme SABR-malli soveltuu hyvin pankin riskienhallinnan työkaluksi muun muassa sen vuoksi, että muodostamalla SABR:n sovite havaittuihin markkina-arvoihin saamme arviot parametreille ρ , ν ja α .

Näitä parametreja analysoimalla ja simuloimalla parametrien kehitystä tulevaisuudessa pankin riskienhallinta voi saada hyödyllistä tietoa korko-optioiden mahdollisesta hinta-kehityksestä sekä niihin liittyvistä riskeistä.

Onnistuimme työssämme täyttämään tehtävänannon kriteerit ja tuottamaan asiakkaallemme tiiviin tietopaketin SABR:n käytöstä volatilitteettipinnan rakentamisessa. Tämän ansiosta asiakkaamme pystyy lyhyessä ajassa arvioimaan SABR:n mahdollisuudet ja rajoitukset omassa toiminnassaan saaden tukea tulevaisuuden kehitysprojektien hyötyjen määrittämiseen.

Viitteet

Hull, John C. 2003. Options, Futures and Other Derivatives.

Hagan, Patrick S. 2002. Managing Smile Risk. Wilmott Magazine.

Hagan et al. 2006. Hedging under SABR Model. Wilmott Magazine.

Ladokhin, S. 2009. Volatility modeling in financial markets. Saatavilla osoitteessa:
<http://www.math.vu.nl/~sbhulai/theses/stageverslag-ladokhin.pdf>.

Benhamou, E. 2007. Global Derivatives: Products, Theory and Practice. World Scientific Publishing Co.

Liitteet

Arvio projektin toteutuksesta

Ryhmän toiminta

Kirjallisuuskatsauksen aikana pidimme ryhmäpalavereja, joissa pyrimme yhdessä muodostamaan kuvan ongelmastamme. Sen jälkeen kun kaikki olivat ymmärtäneet tehtävänannon ja valitsemamme lähestymistavan, jaoimme työtehtävät ja kaikki tutustuivat omalta osaltaan mahdollisiin implisiittisen volatiliteettipinnan mallinnusmenetelmiin. Tämän jälkeen esittelimme mallit toisillemme, jolloin kaikille piirtyi hyvä kuva volatiliteettipinnan mallinnukseen liittyvän tieteen kentästä. Kyseinen esimerkki kuvaa hyvin ryhmämme mentaliteettia koko projektityön osalta – yksi toimi ladun avaajana ja muut tulivat perästä. Näin kaikille tuli kokonaisvaltainen käsitys projektityön aiheesta.

Riskien hallinta

Työhömmme sisältyi koko projektin elämänkaaren ajan suuria riskejä johtuen tehtävänannon haastavuudesta, mahdollisten mallien paljoudesta ja työtehtävien moninaisuudesta. Riskien toteutuminen näihin seikkoihin liittyen olisi voinut aiheuttaa jäämisen jälkeen projektin aikataulusta, mutta osasimme välttää tämän lisäämällä samassa suhteessa oman työpanoksemme määrää. Suhteutettuna projektin laajuuteen pystyimme pitämään riskit hyvin hallussa ja pysyimme hienosti aikataulussa.

Todellinen työmäärä

Toteutunut työmäärä nousi aiheen haastavuuden vuoksi ennakoitua suuremmaksi. Erityisesti kirjallisuuskatsaus, saadun datan työstäminen mallimme vaatimaan muotoon sekä SABR:n Matlab-mallinnus veivät paljon aikaa. Toisaalta mallintaminen oli erittäin mielenkiintoista työtä, josta käteen jäi runsaasti optioihin ja mallintamiseen liittyvää tietoutta. Projektityö teetti paljon työtä, jonka tekeminen kuitenkin oli hyvin palkitsevaa.

Onnistumiset ja epäonnistumiset

Hyvä kommunikaatio ryhmän sisällä edesauttoi kunkin vaiheen edistymistä ja lisäsi koko ryhmän ymmärrystä. Suurimmat onnistumisemme liittyivät edistymiseen datan analysoinnissa sekä mallin implementoinnissa. Datan analysoinnin osoittauduttua projektin pullonkaulaksi, oli tärkeää että kaikki työskentelevät johdonmukaisesti yhteisen tavoitteen saavuttamiseksi. Projektin parissa vietetyt pitkät päivät tuottivat tulosta, kun mallia varten valmisteltu input-data saatiin oikeaan muotoon, pääosin Villen ja Tepon tiukan analyysin jälkeen. Tämän jälkeen projektin tavoitteet tulosten suhteen voitiin saavuttaa.

Projektin laajuuden hallinnassa voidaan nähdä suurin epäonnistumisemme. Aihealue olisi pitänyt rajata alussa tarkemmin, jotta meidän olisi ollut helpompi keskittyä tulosten saavuttamiseen. Tutkimusalue on matemaattisesti erittäin haastava, ja aiheeseen liittyviä tutkimuksia on tehty paljon. Projektiin olisi saanut upotettua vielä paljon työtunteja, mikäli aikarajat eivät olisi tulleet vastaan. Projektin tavoitteita olisikin jo alussa kannattanut realisoida, jotta olisimme tiedostaneet tehtävän vaativuuden.

Parannettavaa tulevaisuutta ajatellen

Kuten aiemmin mainittiin, suurimmat haasteemme liittyivät projektin laajuuden hallintaan. Näin ollen projektin tarkempi rajaus olisi tulevissa projekteissa paikallaan, vaikka projektin laajuuden venyttäminen olikin tietoinen ratkaisu perustuen sitä kohtaan heränneeseen kiinnostukseen.