Teknillinen korkeakoulu

Mat-2.177 Operaatiotutkimuksen projektityöseminaari

Kevät 2006

Eläkelaitoksen optimointimallin Rakentaminen

Loppuraportti

21.4.2006

Michael Gylling	60309D
Matti Konttinen	61128F
Jarno Nousiainen	58524E
Johanna Pynnä	63906L
Timo Salminen	58100V

SISÄLLYSLUETTELO

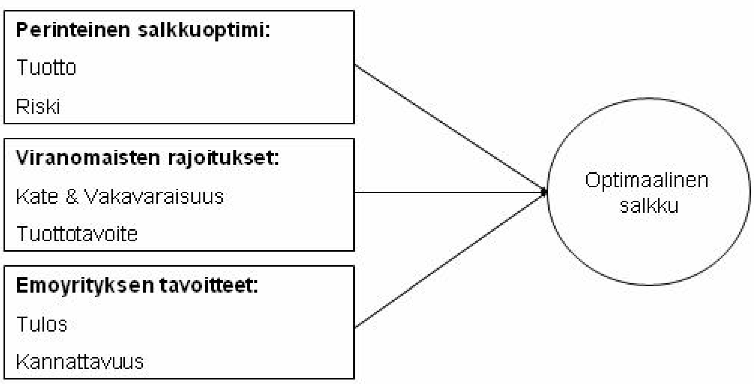
1 Johdanto

1.1 Tausta

Tutkimus on tehty osana Teknillisen korkeakoulun kurssia Mat-2.177 Operaatiotutkimuksen projektityöseminaari.

Projektin toimeksiantaja on Evli, joka on Suomen suurin partnereiden omistama investointipankki, jonka asiakkaita ovat koti- ja ulkomaiset instituutiot ja yritykset sekä varakkaat yksityishenkilöt. Eläkelaitoskentän ja eläkesijoittajien tarpeiden tunteminen ovat Evlin erikoisosaamista. Evlin instituutiovarainhoidon yksikkö tarjoaa palveluitaan lukuisille eläkelaitoksille ja tämän lisäksi Evlin konserniin kuuluu oma eläkesäätiö. Eläkelaitoksen sijoitustoiminta on voimakkaasti säädeltyä. Tällöin optimaalinen sijoitusportfolio ei koostu pelkästään portfolioteorian tarjoamasta ratkaisusta, vaan joudutaan huomiomaan maakohtaisen lainsäädännön ja viranomaisvalvonnan asettamat rajoitukset.

Perinteisesti eläkesijoittajan salkun optimoinnissa käytetään ainoastaan portfolioteoriaan perustuvia malleja, jotka eivät huomioi alalle ominaisia rajoituksia. Tästä johtuen saatu sijoitussuositus ei välttämättä ole optimaalinen ja portfolioteorian mukainen malli saattaa jopa johtaa sellaiseen salkkuun, johon kyseinen eläkelaitos ei saa sijoittaa. Tämän takia eläkelaitoksen sijoituspäätökset ovat monitavoitteisia, eikä pelkän portfolioteorian tuoton ja riskin tarkastelu riitä optimaalisen salkun rakentamisessa. Alla oleva kuva esittää nämä vaikuttavat tekijät.



1.2 Tavoitteet

Projektityön tavoitteena on kartoittaa eläkesäätiön salkkuvalinnan teoreettinen viitekehys, määritellä salkkuvalintaa kuvaava matemaattinen malli sekä rakentaa ja formuloida salkkuvalinta monitavoitteisena optimointiongelmana. Työn kannalta on oleellista saada ymmärrys siitä, mitkä parametrit ovat optimoinnin kannalta relevantteja ja mikä on sopiva optimointimalli. Työn tarkoituksena on myös selvittää löytyykö akateemista tai muuta tutkimusta aiheesta joko Suomesta tai muualta Euroopasta, jossa lainsäädäntö on lähimpänä Suomen lainsäädäntöä. Näitä tavoitteita vastaavat tutkimuskysymykset ovat esitetty alla.

Tutkimuskysymykset

- Mikä on eläkesäätiön salkunvalinnan teoreettinen viitekehys?
- Miten tätä voidaan kuvata matemaattisella mallilla?
- Miten malli rakennetaan ja formuloidaan optimointiongelmana?
- Löytyykö aiheesta aiempaa tutkimusta?

1.3 Rajaukset

Työssä ei tulla sen tarkemmin käsittelemään modernia portfolioteoriaa, joka on yhtenä osana eläkesäätiön optimaalisessa salkussa, vaan se oletetaan kuuluvan lukijan esitietoihin. Muutoinkaan emme pyri menemään kovin syvälle käyttämiemme matemaattisten menetelmien kuten monitavoitteinen optimointi, selostamisessa, vaan keskitymme suoraan aiheeseemme liittyviin asioihin.

Tämän lisäksi päätimme tehdä muutamia muitakin rajauksia, koska muuten tutkimuksesta olisi tullut liian laaja toteutettavaksi tämän kurssin puitteissa. Osa näistä rajauksista ja yksinkertaistuksista on ollut käytössä aiemmissakin aiheeseen liittyvissä tutkimuksissa.

1.4 Raportin sisältö

Raportissa esitellään aluksi eläkesäätiöitä koskevaa lainsäädäntöä ja rajoituksia sekä luodaan katsaus aiheesta aiemmin tehtyyn tutkimukseen. Kappaleessa 3 käsitellään luomaamme mallia, sen oletuksia, ominaisuuksia sekä käytettyjä kohdefunktioita ja sakkofunktioita. Tämän lisäksi kappaleessa käydään läpi tekemämme simulointimalli. Kappaleessa 4 esitellään simuloinnin tulokset, joita analysoidaan seuraavassa kappaleessa. Lopuksi tarkastellaan tutkimuksen merkittävyyttä ja aikaansaannoksia sekä annetaan suosituksia jatkotutkimuksille.

2 Kirjallisuuskatsaus

2.1 *Eläkesäätiö*

Katevaatimus

Eläkevastuulla (tai eläkelupauksilla) tarkoitetaan laskentahetkeen diskontattujen eläkkeiden pääoma-arvoa, eli varojen määrää, joka tarvittaisiin eläkesäätiön etuuksien ja korvauksien maksamiseen, jos säätiö purettaisiin tilinpäätöshetkellä. Eläkesäätiön on aina katettava eläkevastuu omaisuudellaan. Kateasetus määrää kuinka suuren osan eläkelupauksista saa kattaa mihinkin asetuksessa määritellyistä seitsemästä omaisuusluokasta kuuluvilla sijoituksilla. (Eläkesäätiöyhdistys, 2006)

Toimintapääomavaatimus

Toimintapääomalla tarkoitetaan niitä eläkesäätiön varoja, jotka ylittävät eläkevastuun. Toimintapääoma toimii vakavaraisuuspuskurina, jonka koolle asetettavaa vaatimus määräytyy sijoitusten jaon perusteella. Toimintapääoman vaadittu määrä eli vakavaraisuusraja saadaan varaisuusrajakertoimen (p-luku) määräämänä osuutena eläkevastuusta. P-luvun määrittäminen on kuvattu liitteessä A. Toimintapääoman tarkoituksena on varmistaa, että eläkesäätiön katteen riittävyys silloin, kun sijoitustoiminnan tuotto ei ole riittävä tai sijoitustoiminta tuottaa tappiota.

Vakavaraisuus

Eläkesäätiön vakavaraisuutta kuvataan vyöhykkeillä, jotka määräytyvät vakavaraisuusaseman (Z) perusteella. Z määritellään toimintapääoman suhteena vakavaraisuusrajaan. Vyöhykkeet ovat:

- Tavoitevyöhyke $2 < Z < 4$
- Rajoitusvyöhyke $1 < Z \leq 2$
- Kriisivyöhyke $1/3 < Z \leq 1$

Eläkesäätiö voi toimia kaikkein vapaimmin silloin, kun vakavaraisuusasema on tavoitevyöhykkeellä. Vakavaraisuusaseman poiketessa tavoitevyöhykkeeltä, säätiön on ryhdyttävä toimiin aseman palauttamiseksi tavoitevyöhykkeelle.

Jos säätiön vakavaraisuusasema alittaa purkurajan (1/3 vakavaraisuusrajasta), on eläkesäätiön toimitettava Vakuutusvalvontavirastolle lyhyen aikavälin rahoitussuunnitelma. Jos toimintapääoma ei ylitä purkurajaa kolmen kuukauden kuluessa, on eläkesäätiö purettava.

Lisätietoja eläkesäätiön vakavaraisuuden määrittämisestä ja toiminnasta eri vyöhykkeissä löytyy Eläkesäätiön käsikirjasta (Eläkesäätiöyhdistys, 2006).

Ryhmäjaot

Eläkesäätiön sijoituskohteet jaetaan vakavaraisuusasetuksessa seitsemään eri ryhmään sijoituskohteen riskipitoisuuden mukaan. Jako ryhmiin tapahtuu usean eri kriteerin perusteella. Näitä ovat muun muassa, onko sijoituskohde velkakirja vai osake, onko velan antaja yritys vai valtio, onko sijoitus euromääräinen vai ei, missä maassa sijoituskohde sijaitsee tai onko kyseessä kiinteistö. Ryhmäjaot on tarkasti määritelty Eläkesäätiön käsikirjassa (Eläkesäätiöyhdistys, 2006, luku 13), mutta tässä yhteydessä annamme vain esimerkkejä erilaisten sijoituskohteiden ryhmittelystä. Sijoituskohteet on saatu kohdeyrityksen valmiista jaottelusta.

Taulukko 1 Sijoituskohteiden jaottelu ryhmiin

Sijoituskohde	Omaisuusluokka	Salkku	Ryhmä	Lyhenne
1	Osakkeet	Maailma	6	world
2	Osakkeet	Eurooppa	6	europe
3	Osakkeet	USA	6	usa
4	Osakkeet	Japani	6	japan
5	Osakkeet	Aasia Ex Japani	7	pacific ex japan
6	Osakkeet	Kehittyvät osakemarkkinat	6	emf
7	Osakkeet	Suomi	6	finland
8	Korot	Rahamarkkinat	1	mm
9	Korot	Valtionlainat	2	gov
10	Korot	Yrityslainat - Investment Grade	3	corp
11	Korot	Yrityslainat - High Yield	3	hy
12	Korot	Kehittyvät korkomarkkinat	7	emd
13	Vaihtoehtoiset	Hajautetut Hedge-rahastot	4	hedge
14	Kiinteistöt	Kiinteistöt	5	kiinteistöt

Eläkesäätiöiden rajoitteet

Eläkesäätiöyhdistyksen laatimassa käsikirjassa mainitaan suuri joukko erilaisia rajoitteita koskien eläkesäätiöiden sijoitustoimintaa. Suurin osa säädöksistä rajoittaa sijoittamista sijoitusluokkien sisällä, eikä näin ollen koske suoranaisesti tätä projektia. Tämä johtuu siitä, että tässä projektissa on oletettu, että eri sijoitukset ovat hyvin hajautettu eri ryhmien sisällä.

Projektimme kannalta oleellisia rajoitteita ovat seuraavat:

- Osakkeilla ja sijoitusrahastoilla voidaan kattaa 50 % eläkevastuusta

- Velkasitoumuksilla voidaan kattaa 50 % eläkevastuusta

- Kiinteistöillä saa kattaa maksimissaan 40 % eläkevastuusta
- Johdannaisia saa käyttää ainoastaan suojaamistarkoituksessa
- Valuuttariskiltä suojaamattomilla ei-euromääräisillä sijoituksilla saa eläkevastuusta kattaa maksimissaan 20 %

Viimeisen näistä rajoituksista olemme katsoneet koskevan ensisijaisesti seuraavia luokkia: kaikki Euroopan ulkopuoliset osakkeet ja kehittyvät korkomarkkinat. Tämän lisäksi rajoite koskee myös osittain rahamarkkinoita, yrityslainoja, valtionlainoja, kiinteistöjä sekä hedge-rahastoja, mutta olemme mallissamme jättäneet nämä rajoitteen ulkopuolelle, koska näiden jakautumista euromääräisten ja ei-euromääräisten sijoitusten välillä emme tiedä.

2.2 Aikaisemmat tutkimukset

Tässä osiossa tarkastelemme tutkimuksia, jotka liittyvät suoraan omaan tutkimukseemme. Pyrimme tuomaan esiin tapoja, miten muut ovat käsitelleet eläkelaitosten ongelmaa sekä näiden tutkimusten havaintoja ja tuloksia.

Aihetta on tutkittu varsin laajasti. Aihe on myös varsin ajankohtainen ja suuri osa tutkimuksista on tehty tämän vuosituhannen puolella. Me keskityimme pääasiassa viiteen eri tutkimukseen, jotka ovat: Haberman & Co., 2003; John Board & Charles Sutcliffe, 2005; Matti Koivu, 2004; Tomas Lågland, 2003; Dupacova & Polivka, 2003.

Yhteistä kaikille tutkimuksille on se, että niissä aihetta on lähestytty stokastista optimointia käyttäen. Kunkin hetken sijoituspainot riippuvat senhetkisestä varojen ja maksusitoumusten suhteesta. Eri varallisuusluokkien painoja muutetaan kerran vuodessa, siten että päästään optimaaliseen lopputulemaan. Dupacova ja Polivka toteavatkin tämän olevan yleisesti käytössä oleva yksinkertaistus. Sijoituskohteiden tuoton ensimmäinen momentti (keskiarvo) perustuu tutkimuksissa asiantuntija-arvioihin, kun taas suuremmat momentit pohjautuvat historiadataan. Toinen yhdistävä tekijä on tavoitefunktion muoto. Yleisesti on käytetty periaatteetta, että pyritään maksimoimaan salkun tuottoa, ottaen sakkotermin avulla huomioon tapaukset, joissa toimintapääoma jää liian alhaiseksi, jolloin kannatusmaksuja joudutaan korottamaan. Erityisesti tutkimuksissa on painotettu, ettei varojen allokointia sijoituskohteiden välillä ja päätöstä kannatusmaksuista voi tehdä erikseen vaan nämä tulee sisällyttää samaan malliin. Dupacova ja

Polivka olivat myös olettaneet, että eläkesäätiön toiminta lopetetaan tarkastellun ajanjakson päätteksi.

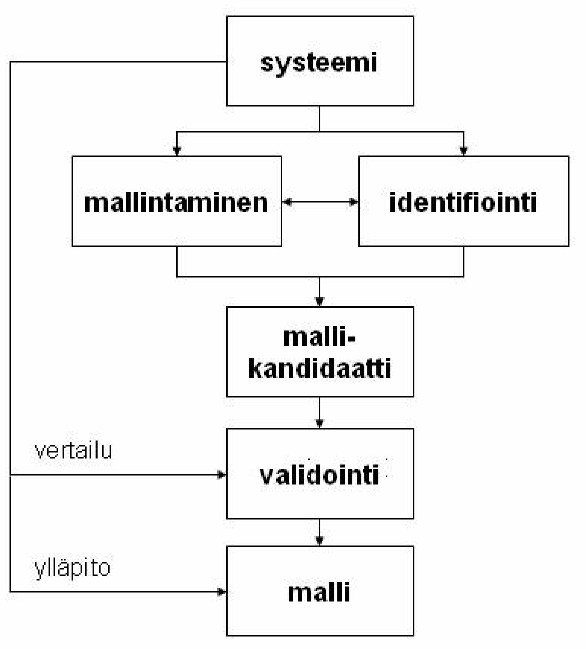
Mallin rakentamista vaikeuttaa se, tai ainakin tekee siitä melko pitkän, että huomioon otettavia asioita on paljon. Tällaisia ovat esimerkiksi transaktiokustannukset, verojen huomioiminen, kassavirran ja kirjanpidollisten voittojen erottaminen toisistaan, erilaiset eläkesäätiöiden maksamat etuudet.

Tutkimukset myös legitimoivat yhden käyttämistämme olettamuksista. Niissä on nimittäin tarkasteltu, antaako odotettujen vastuiden käyttö erilaisia tuloksia kuin satunnaiset. Tuloksena oli, ettei asialla ole juurikaan merkitystä ja tutkimuksissa todetaan, että on yleinen tapa käyttää juuri odotettuja vastuita. Toki on hyvä todeta, että tällöin päädytään eläkesäätiön kannalta hieman edullisempaan lopputulokseen kuin käyttämällä satunnaisia vastuita.

3 Malli

Matemaattisen mallin tarkoitus on kuvata todellisuutta mahdollisimman hyvin. Tätä on kuitenkin mahdotonta kuvata täydellisesti minkään mallin puitteissa, joten mallintamisella halutaan jäljitellä todellisuutta mahdollisimman yksinkertaisesti. Tämä tarkoittaa sitä, että hyvä malli on käyttötarkoitukseensa nähden yksinkertaisin mahdollinen. Erilaisten dynaamisten systeemien toimintaa kuvataan matemaattisella mallilla, koska tällöin voidaan vastata kysymyksiin systeemistä ilman että sen toimintaa täytyy kokeellisesti testata.

Matemaattisen mallin rakentaminen alkaa tutustumalla tutkittavaan systeemiin. Systeemin pohjalta pyritään identifioimaan systeemin merkittävimmät muuttujat yhdessä mallintamisen kanssa. Tässä vaiheessa tehdään joukko oletuksia, jotta voidaan rakentaa järkeviä mallikandidaatteja, jotka ovat riittävän yksinkertaisia, mutta ottavat samanaikaisesti huomioon kaiken oleellisen systeemin dynamiikasta. Kun on saatu rakennettua muutama erilainen mallikandidaatti, niin näiden toimivuus validoidaan vertailemalla alkuperäiseen systeemiin. Useammasta vaihtoehtojen joukosta valitaan se malli, joka jäljittelee todellisuutta mahdollisimman hyvin. (Ljung, 1994)



Kuva 1 Matemaattisen mallin konstruointi

3.1 Monitavoitteinen optimointi

Kuten projektin tavoitteista käy ilmi, on tehtävänä rakentaa optimointimalli, joka samanaikaisesti huomio kolmea eri tavoitetta. Lopullisen mallin on huomioitava perinteinen salkkuoptimointi, viranomaisten rajoitteet sekä emoyrityksen tavoitteet. Optimointimallimme pohjautuu Markowitzin moderniin portfolioteoriaan (Markowitz, 1952). Viranomaisten rajoitteet kuvattiin kirjallisuuskatsauksessa ja miten nämä huomioidaan käy ilmi optimointimallin kuvauksessa. Tämän lisäksi optimointimallimme huomioi emoyrityksen tavoitteet.

Emoyrityksen tavoitteet

Koska eläkelaitoksen toiminta vaikuttaa emoyhtiöön ja sen tulokseen, on luonnollista, että emoyhtiön tavoitteet vaikuttavat eläkelaitoksen sijoitusten allokointipäätöksiin. Jos esimerkiksi eläkelaitoksen hallinnoimat varat ovat suhteessa isoja emoyhtiöön, vaihtelut eläkelaitoksen tuloksessa vaikuttaisivat merkittävästi myös emoyhtiön tulokseen. Jos emoyhtiö haluaa tehdä tasaista tulosta ilman suurin vuosittaisia vaihteluja, se ei välttämättä toivo eläkesäätiön toimivan suurella riskillä, jolloin eläkesäätiön vaihteleva lisää myös emoyhtiön tuloksen vuosittaista vaihtelua.

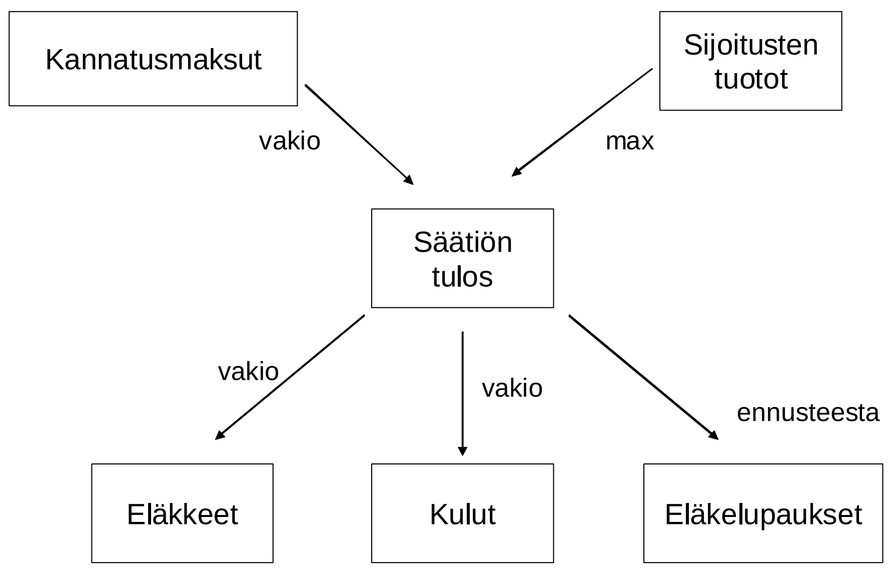
Emoyrityksen tavoitteet ovat pitkälle yhteneviä perinteisen salkkuoptimoinnin tavoitteiden kanssa. Mitä paremmin sijoitukset tuottavat, sitä vähemmän säätiön tarvitsee kerätä kannatusmaksuja. Sijoitusten varianssin pitäminen pienenä vähentää säätiön yhtiölle aiheuttamaa riskiä. Vaikka eläkesäätiöiden ohjeistus ohjaa mahdollisimman turvalliseen ja varmaan sijoitustapaan, voi hajonnan pitäminen pienenä saada korostuneen merkityksen, jos eläkesäätiö on suuri verrattuna itse yhtiöön. Tällöin suhteessa pienikin tappio eläkesäätiötoiminnassa vaikuttaa selvästi yhtiön tulokseen. Miten emoyrityksen tavoitteet tullaan ottamaan huomioon optimointimallissa, kuvataan myöhemmin tässä raportissa.

3.2 Mallin oletukset

3.2.1 Säätiön tulos

Eläkesäätiön tulos koostuu viidestä eri asiasta: kannatusmaksuista, säätiön maksamista eläkkeistä, eläkelupauksista työntekijöille, säätiön kuluista sekä sijoitustoiminnan tuotoista (kts. kuva alla). Todellisuudessa kaikki nämä tekijät muuttuvat jonkin verran vuosittain, mutta olemme tehneet yhdessä kohdeyrityksen kanssa sellaisen yksinkertaistuksen, että pidämme kaikkia muita tekijöitä vakiona paitsi sijoitustoiminnan tuottoja ja eläkelupausten kehittymistä. Tällöin mallissamme halutaan ainoastaan maksimoida tuottoja kymmenen vuoden päähän annetun eläkelupausennusteen perusteella. Kaikki muu eläkesäätiön toiminnassa pysyy oletuksen mukaisesti vakiona. Todellisuudessa eläkesäätiöt haluavat esimerkiksi vähentää työntekijöidensä kannatusmaksuja sijoitustoiminnan tuottojen kustannuksella.

Eläkelupausten kehittyminen saadaan eläkesäätiön omasta ennusteesta vuositasolla. Mallimme ottaa tämän huomioon deterministisenä muuttujana, koska kyseisille ennusteille ei ollut saatavilla niiden luottamustasoja.



Kuva 2 Säätiön tulos

3.2.2 Muita oletuksia

Sijoitusten oletetaan olevan hyvin hajautettuja omaisuusryhmien (14 kpl) sisällä. Viranomaisrajoituksia, jotka koskevat yksittäisen yrityksen osakkeiden omistusta, ei näin ole otettu mallissa huomioon. Eri omaisuusryhmien vuotuisten tuottojen oletetaan noudattavan multinormaalijakaumaa odotusarvovektorilla $\bar{r}$ ja kovarianssimatriisilla Σ.

3.3 Optimointimalli

Oikean optimointimallin määrittäminen alkoi miettimällä minkälainen malli kuvaa todellisuutta parhaalla mahdollisella tavalla. Tällöin keskeisimmät kysymykset olivat, onko malli stokastinen vai deterministinen, staattinen vai dynaaminen, mikä on diskretointiväli ja aikajänne sekä mikä on oikea kohdefunktio.

Mallimme valitsee optimaalisen portfolion seuraavaksi vuodeksi lähdettäessä jostakin tietystä lähtötilanteesta. Tämä tehdään kymmenen kertaa peräkkäin, jolloin saadaan selville mihin kyseinen sijoitusstrategia johtaa kymmenen vuoden tähtäimellä. Diskretointiväli on siis yksi vuosi ja aikajänne, joka kertoo kuinka pitkälle eteenpäin malliamme simuloidaan, on kymmenen vuotta.

3.3.1 Mallin ominaisuudet

Stokastisuus

Deterministisessä systeemissä kaikkien suureiden riippuvuussuhteet on mitattavissa eksaktisti. Stokastisessa systeemissä on sitä vastoin mukana todennäköisyyksiä ja epävarmuutta, jonka takia systeemin ulostulemasta ei voida yksiselitteisesti määrittää systeemin alkutilaa. Stokastista prosessia toistettaessa tarpeeksi monta kertaa voidaan kuitenkin antaa hyvä approksimaatio odotettavissa olevasta arvosta.

Optimointimallimme on stokastinen, koska eri sijoituskohteilla on seuraavalle kymmenelle vuodelle tietyt vuotuiset tuoton odotusarvot sekä volatiliteetit, jotka on saatu kohdeyrityksen omista estimoinneista.

Dynaamisuus

Dynaamisen systeemin tulevaisuus riippuu sen tämänhetkisestä tilasta sekä systeemin ohjauksesta. Staattisen systeemin tila on sitä vastoin aina vakio, eikä se muutu ajan kuluessa. Tämän perusteella mallimme on dynaaminen. Tarkasteltaessa pelkästään systeemin ohjausta, voidaan myös määrittää onko tämä dynaaminen vai staattinen. Dynaamisella ohjauksella tarkoitetaan ohjausta, jota voidaan muuttaa ajan funktiona. Mallimme tapauksessa tämä tarkoittaa sitä, että sijoitusten allokointipäätös voidaan tehdä kerran vuodessa. Käytettäessä staattista ohjausta olisivat sijoituspäätökset tehty ensimmäisen vuoden alussa ja katsottu mihin kyseinen sijoitusstrategia johtaa.

Ohjauksen dynaamisuus on käytännössä toteutettu siten, että ennen simuloinnin aloittamista valitaan parhaat sijoitusstrategiat kymmenelle eri tilanteelle, jotka määräytyvät toimintapääoman sekä maksettavien eläkelupausten suhteesta. Tämä suhde on perusteltu, sillä ko. suhde kuvaa yksikäsitteisesti eläkesäätiön sen hetkistä varallisuustilannetta. Mitä parempi säätiön varallisuustilanne on, sitä vapaammin säätiö voi valita tehokkaan sijoitusportfolion modernin portfolioteorian keinoin. Huonossa varallisuustilanteessa yhtiö joutuu sitä vastoin valitsemaan portfolion, jolla saavutetaan alhainen vakavaraisuusraja (ks. liite A), jolloin portfolion tehokkuudesta joudutaan karsimaan hiukan.

Tämän toteutuksen hyötynä on se, että ajettaessa simulointia, mallin ei tarvitse joka vuoden jälkeen ruveta optimoimaan sijoitusstrategiaa, vaan se voi ottaa valmiiksi optimoiduista vaihtoehdoista sen, joka sopii parhaiten vallitsevaan tilanteeseen. Tämä nopeuttaa huomattavasti itse simulointia. Optimaaliset kohdefunktion valitsemat sijoitusallokaatiot löytyvät kappaleesta 4.2.

Aikariippuvuus

Aikavariantissa mallissa systeemin parametrit muuttuvat ajassa. Rakentamassamme mallissa käytetään aina samaa vuotuista tuottovektoria sekä kovarianssimatriisia. Tämän perusteella mallin parametrit eivät muutu ajassa. Kysymyksessä on toisin sanoen aikainvariantti malli.

3.3.2 Kohdefunktio

Mallissamme on mahdollisuus valita kohdefunktio kolmesta eri vaihtoehdosta. Nämä ovat Sharpen indeksin maksimointi, varianssin minimointi sekä tuoton maksimointi. Alla on lähemmin selostettu kaikkia kolmea vaihtoehtoa ja kohdassa 4. Simuloinnin tulokset on esitetty lisää eri kohdefunktion valinnan merkityksestä. Kaikille eri kohdefunktioille on yhteistä se, että niihin lisätään sakkofunktio, jonka avulla huomioidaan eläkesäätiölle ominaisia rajoituksia ja tavoitteita.

Sharpen indeksin maksimointi

Mallissa on yhtenä vaihtoehtona maksimoida Sharpen indeksiä, joka kuvaa riskipreemion ja riskin suhdetta. Sharpen indeksin hyöty muihin kohdefunktioihin verrattuna on se, että sen avulla saadaan sekä tuotto että volatiliteetti samaan funktioon. Tällöin tuotto-odotusta tai varianssia ei tarvitse kiinnittää, kuten muissa kohdefunktioissa, vaan ne tulevat mukaan ainoastaan rajoitusehtona säätiön minimituottotavoitteen sekä riskinsietokyvyn muodossa. Sharpen indeksin kaava on alla (r_p on portfolion tuotto, r_f riskitön korko, σ keskihajonta, $\bar{r}$ tuotto-odotusvektori, w sijoituspainovektori ja Σ kovarianssimatriisi).

$$f(w) = \frac{r_p - r_f}{\sigma} = \frac{\bar{r}^T w - r_f}{\sqrt{w^T \Sigma w}} \tag{3.1}$$

Sharpen indeksistä vähennettävän sakkofunktioon paneudutaan syvällisemmin myöhemmin.

Kun käytimme Sharpen indeksiä maksimoitavana kohdefunktiona ja simuloimme salkun kehittymistä jollakin tietyllä realistisella minimituottotavoitteella (6 %), huomasimme, että tämä antaa tuloksia, joissa kaikissa tuotto-odotus on yhtä suuri kuin annettu minimituottotavoite. Tuottovektorista sekä eri sijoituskohteiden korrelaatiomatriisista johtuen Sharpen indeksin mukaan ei ole suotuisaa hakea minimituottotavoitetta suurempaa tuottoa. Toisin sanoen lisätuotto ei kasva tarpeeksi verrattuna suurentuneeseen riskiin.

Varianssin minimointi

Edellä kuvattiin miten Sharpen indeksi antaa näillä lähtödatoilla aina salkkuja, joiden odotettu tuotto on samansuuruinen kuin minimituottotavoite. Koska monet eläkesäätiöt haluavat kuitenkin suurempia tuottoja kuin minimituottotavoite, lisäsimme malliin yhdeksi vaihtoehtoehdoksi kohdefunktion, jossa minimoidaan varianssia, jollakin annetulla tuotto-odotuksella. Varianssia minimoitaessa kohdefunktio on:

$$f(w) = -w^T \Sigma w \tag{3.2}$$

Tuoton maksimointi

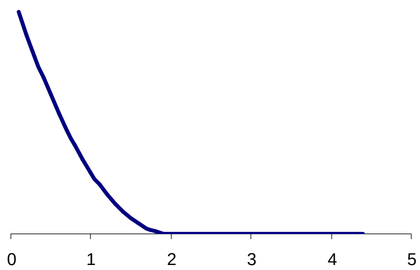
Tuottoa maksimoitaessa saavutetaan etuna se, että riskinottoa rajoittaa vain eläkesäätiölle asetetut rajoitukset sekä sakkofunktiot. Seuraavassa kappaleessa esitettävien sakkofunktioiden avulla voidaan tarkalleen määrätä sallittava riskin suuruus helposti ymmärrettävällä tavalla, jolloin kohdefunktioon ei välttämättä tarvitse sisällyttää mitään muuta riskimittaa. Tuottoa maksimoitaessa kohdefunktio on:

$$f(w) = \bar{r}^T w \tag{3.3}$$

3.3.3 Sakkofunktio

Yksi vaihtoehto kohdefunktion toteuttamiselle olisi ollut optimointitehtävä, jossa on suuri joukko erilaisia lineaarisia rajoituksia. Tällöin rajoitusten rikkominen on kiellettyä ja kohdefunktion käyttäytyminen käyvän alueen reunoilla saattaa olla epätoivottua. Me ratkaisimme ongelman käyttämällä sakkofunktioita, joiden tarkoitus on suurentaa minimoitavan kohdefunktion arvoa epäkäyvällä tai lähellä epäkäyvää aluetta. Tällä tavalla rajoitusehtojen määrä vähenee huomattavasti. Mallissa on kolme eri sakkofunktiota, joista ensimmäisen käyttö on perusteltua kaikille eläkesäätiöille. Kahden muun sakkofunktion käytön tarpeellisuus riippuu asiakkaasta.

Kuten edellä kohdassa 2.1 Eläkelaitoksia koskevat säädökset ja rajoitteet todettiin, kertoo Z-luku toimintapääoman ja vakavaraisuuden suhteen. Kun tämä suhdeluku on kahden ja neljän välissä, eläkesäätiön toiminta on mahdollisimman vapaata. Suhdeluvun ollessa kahden alapuolella eläkesäätiön sijoitustoiminnalle tulee huomattavasti enemmän rajoitteita. Tämän takia ensimmäisen sakkofunktion tarkoitus on suurentaa minimoitavan kohdefunktion arvoa, silloin kun eläkesäätiön sijoitustoimintaa rajoittavat tekijät tulee ottaa huomioon. Sakkofunktio sakottaa kun z:n luvun odotusarvo alittaa annetun arvon (normaalisti kaksi) jollakin annetulla luottamustasolla. Sakkofunktio on kvadraattinen. Sen muoto on esitetty alla olevassa kuvassa.



Kuva 3 Sakkofunktio

Sakko1:

$$SF_1 = (\max\{Z - \hat{\mu}_z, 0\})^2 \tag{3.4}$$

Yllä esitetyn sakkofunktion lisäksi mallissa on toinen sakkofunktio, jonka avulla otetaan huomioon emoyrityksen tavoitteet kohdassa 3.3 Emoyrityksen tavoitteet esitetyllä tavalla. Tämän sakkofunktion tarkoitus on sakottaa siitä, että jollakin annetulla todennäköisyydellä eläkesäätiön tuotto painuu negatiiviseksi. Kohdeyrityksen ohjeistuksen mukaan osalle heidän asiakkaistaan on erittäin tärkeätä, että vuosittainen tulos on aina positiivinen kun taas toiset ovat tässä asiassa riskisietoisempia. Tämä on yksi tapa ottaa huomioon emoyrityksen tavoitteet, koska näin voidaan tapauskohtaisesti valita sakkofunktion vaikutus tämän parametreja muuttamalla.

Sakko2:

$$SF_2 = (\max\{r - \hat{\mu}_r, 0\})^2 \qquad (3.5)$$

Kohdeyrityksen mukaan osa heidän asiakkaistaan pyrkii pitämään Z-lukua mahdollisimman samalla tasolla vuodesta toiseen. Z-luku voidaan pitää lähellä vakioarvoa lisäämällä sakko, joka sakottaa tämänhetkisen Z-luvun ja odotettavissa olevan Z-luvun erotuksen toisessa potenssissa.

Sakko3:

$$SF_3 = (Z - \hat{Z}_2)^2 \qquad (3.6)$$

3.3.4 Matemaattinen muotoilu

Käyttämämme optimointimalli on formuloitu alla. Siinä maksimoidaan kohdefunktiota, josta vähennetään sakkofunktioiden summa.

$$\max \quad f(w) - \sum_{i=1}^{3} \gamma_i SF_i(w) \qquad s.e. \qquad (3.7)$$

$$Aw \le \eta \frac{EV}{SO} + \omega \frac{TPO}{SO} \qquad (3.8)$$

$$\overline{0} \le w, \omega \le \overline{1} \qquad (3.9)$$

$$\sum_{i=1}^{14} w_i = 1 \qquad (3.10)$$

$$\sum_{i=1}^{4} \omega_i \le 1 \qquad (3.11)$$

Vektori **w** sisältää sijoituskohteiden painot portfoliossa, jonka kokonaisarvo on sijoitusomaisuuden (SO) suuruinen. Vektori **ω** määrittelee ylijäämämuuttujat, jotka kuvaavat kuinka paljon rajoiteluokkien kokonaispainot ylittävät asetuksessa määritellyt ylärajat eläkevastuun (EV) kattamiselle. Ylitysten summa saa olla korkeintaan toimintapääoman (TPO), jonka saa sijoittaa vapaasti, suuruinen. **A** on n kertaa 14 matriisi, jonka rivillä i rajoiteluokkaa i (yhteensä n) vastaavat alkiot ovat ykkösiä ja muut nollia. Vektori **η** sisältää rajoiteluokkien painojen ylärajat. Esimerkiksi luvun 2.1 merkinnöillä saadaan:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}4 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}$$

Simuloinneissa käytetyt hyötyfunktiot olivat portfolion tuotto ($f(w) = r_p$), negatiivinen varianssi ($f(w) = -\sigma$) ja Sharpen indeksi ($f(w) = (r_p - r_f)/\sigma$). Mallin sakkofunktiot, joita painotetaan vektorilla $\boldsymbol{\gamma}$, olivat:

$$SF_1 = (\max\{Z - \hat{\mu}_z, 0\})^2$$

$$SF_2 = (\max\{r - \hat{\mu}_r, 0\})^2$$

$$SF_3 = (Z - \hat{Z}_2)^2 \text{ ,}$$

missä

$$\hat{\mu}_z = \Phi^{-1}(1 - \alpha_1) \cdot \sigma_Z + \hat{Z}_1 \qquad (3.12)$$

$$\hat{\mu}_r = \Phi^{-1}(1 - \alpha_2) \cdot \sigma \text{ .} \qquad (3.13)$$

Parametrit α_1 ja α_2 ovat tekstissä aikaisemmin määritellyt rajatodennäköisyydet, σ_Z ja σ Z-luvun ja portfolion tuoton hajonnat, sekä hatulliset Z_1 ja Z_2 vakavaraisuus aseman tavoitetasot sakkofunktioissa 1 ja 3.

3.4 Simulointimalli

Eri sijoitusstrategioiden optimaalisuutta on tässä työssä tutkittu Monte Carlo – simuloinnin keinoin. Monte Carlo – simulaatioon päädyttiin, koska 14 sijoituskohteen 10 vuoden kehityksen huomiointi optimoinnissa esimerkiksi moniulotteisen binomihilan avulla olisi johtanut laskennallisesti mahdottomiin suuruusluokkiin.

Simuloitaessa tutkitaan eläkesäätiön menestymistä kymmenen vuoden ajanjaksolla käyttäen vuoden diskretointivälejä. Yhden vuoden aikaväli on luonteva, koska ennusteet eläkevastuun kehittymisestä tehdään yleensä juuri vuoden välein. Tämän lisäksi eläkesäätiöiden pakollinen sijoitussuunnitelma, joka ohjaa sijoitustoimintaa, täytyy tehdä vuosittain. Toisaalta sijoituskohteiden odotetut tuotot ja keskihajonnat ovat myös yhden vuoden ennusteita, mikä tekee simuloinnin käytännön toteutuksesta helpompaa.

Simuloitaessa kaikki muu paitsi sijoituskohteiden kehitys oletetaan deterministiseksi. Oikeastihan näin ei ole sillä esimerkiksi eläkevastuun kehittyminen on satunnaista, mutta sen jakauman approksimointi jätettiin tämän työn ulkopuolelle, joten sen oletetaan noudattavan erikseen annettua ennustetta. Työssämme tulemme kuitenkin tutkimaan jos erilaiset odotetut eläkevastuuennusteet vaikuttavat sijoitusten allokointipäätökseen. Yksi simulointikierros (vuosi) menee seuraavasti:

1. Simuloi tuottovektori r
2. Sijoitusomaisuus: $SO(t + 1) = [1 + r^T w(t)]SO(t) + K(t + 1)$
3. Toimintapääoma: $TPO(t + 1) = SO(t + 1) - EV(t + 1)$
4. Valitse seuraavan vuoden sijoitusstrategia $w(t + 1)$

Simuloinnin oleellisinta osaa, tuottovektorin simulointia, käsitellään seuraavassa kappaleessa tarkemmin. Sijoitusomaisuus (SO) kasvaa joka vuosi ko. vuodelle ominaisten sijoituskohteiden tuottojen ja vastaavien sijoituskohteiden painojen mukaisesti. Lisäksi sijoitusomaisuuteen vaikuttaa suoraan vuoden aikana syntynyt kassavirta (K), joka koostuu maksetuista eläkkeistä ja saaduista kannatusmaksuista. Sekä maksetut eläkkeet että kannatusmaksut on annettu ulkoisesti. Toimintapääoma (TPO) lasketaan jokaiselle vuodelle sijoitusomaisuuden ja eläkevastuun (EV) erotuksena. Eläkevastuun vuotuinen kehitys oletettiin ulkoisesti annetuksi, joten sen päivittymistä ei huomioida simuloinnissa.

3.4.1 Tuottovektorin simulointi

Simulointi toteutetaan olettamalla, että sijoituskohteiden tuotot noudattavat multinormaalijakaumaa annetuilla odotusarvoilla, keskihajonnoilla ja variansseilla. Yhden sijoituskohteen tapauksessa käytettäisiin normaalijakaumasta simulointiin seuraavaa yhtälöä:

$$r(t) = \bar{r} + \sigma\varepsilon(t)\,, \qquad (3.14)$$

missä $\bar{r}$ on sijoituskohteen vuotuisen tuoton odotusarvo, σ vastaava keskihajonta ja $\varepsilon(t)$ normaalisti (0,1) jakautunut satunnaismuuttuja. Menetelmän perustelu on pitkähkö, joten se on esitelty erikseen liitteessä C. Koska tässä tapauksessa on 14 simuloitavaa tuottoa, jotka korreloivat keskenään, on simuloinnissa otettava huomioon myös muuttujien väliset kovarianssit. Yksi tapa ottaa kovarianssit huomioon on laskea niiden Cholsekyn hajotelma

$$\Sigma = CC^T\,, \qquad (3.15)$$

missä Σ on kovarianssimatriisi ja C sopiva alakolmiomatriisi. Tuotot simuloidaan seuraavan rekursion mukaisesti (Law & Kelton, 2000)

1. Generoidaan (0,1) normaalijakaumasta $\varepsilon_1, \varepsilon_{2,\ldots,} \varepsilon_{14}$

2. Kaikille i = 1,2,…,14, $r_i = \bar{r}_i + \sum_{j=1}^{i} c_{ij}\varepsilon_j$,

3. missä c_{ij} on matriisin C alkio (i, j).

3.4.2 Simulointialgoritmin validointi

Vaikka simulointialgoritmi on teoriassa pätevä, on syytä vielä tarkastaa sen tuottamien satunnaismuuttujien tilastolliset tunnusluvut ja todeta, että ne täsmäävät lähtöarvojen kanssa. Yhden vuoden simuloinnin pätevyys voidaan tarkistaa generoimalla N tuottovektoria (N on suuri luku) ja laskemalla havainnoista keskiarvot ja kovarianssit. Havaitaan, että tuottojen keskiarvot ja kovarianssit yhtyvät lähes täydellisesti lähtöarvoihin, kun N = 100 000. Yhden vuoden simulointiaskelta voidaan siis pitää pätevänä.

Koska jokainen yksittäinen askel on pätevä ja riippumaton toisista askelista, voidaan päätellä, että kymmenen askelta sisältävän simulaatio on myös pätevä. Pätevyys voidaan myös tarkistaa vastaavasti kuin yhdelle vuodelle tehty tarkistus. Sijoituskohteen tuoton odotusarvo hetkellä t = 10 on (Liite C, C6):

$$\mathrm{E}\{S(10)/S(0)\} = e^{10\mu} = (e^{\mu})^{10} = (1+\bar{r})^{10} \qquad (3.16)$$

Kymmenen vuoden odotettu tuotto saadaan siis suoraan laskettua yhden vuoden tuoton avulla. Tehtäessä jälleen suuri määrä 10 vuoden simulointeja havaitaan, että kunkin sijoituskohteen tuoton keskiarvo yhtyy täydellisesti laskettuun odotusarvoon.

4 Simuloinnin tulokset

4.1 Eläkevastuu

Jotta voimme simuloida eläkesäätiötä kymmenen vuotta eteenpäin, tarvitsemme vastaavalle ajalle ennusteen eläkevastuun kehittymisestä. Normaalitilanteessa eläkevastuu kasvaa likimain vakioprosenttimäärän vuosittain. Näin ei kuitenkaan aina ole. Saimme Evli-pankilta kahden eläkesäätiön 10 vuoden eläkevastuun kehittymisennusteet, joissa eläkevastuiden kasvut poikkeavat merkittävästi toisistaan.

Taulukoissa eläkevastuu kuvaa kunkin vuoden lopun tilannetta ja muut luvut ovat ko. vuoden aikana tapahtuvia muutoksia. Nettokassavirta lasketaan kaavalla:

Nettokassavirta = kannatusmaksut – eläkkeet – hoitokulut

Taulukko 2 Eläkevastuuennuste 1

Vuosi	TEL-eläkevastuu 1 000 €	TEL-eläkevastuun muutos 1 000 €	TEL-eläkevastuun muutos %	Maksettavat TEL-eläkkeet 1 000 €	Kannatusmaksut 1 000 €	hoitokulut = 0,5%*EV 1 000 €	Netto-kassavirta 1 000 €
2006	557 695	7 018		35 761	33 301	2 788	-5 248
2007	580 946	7 401	1.33 %	38 579	36 065	2 905	-5 418
2008	601 913	6 674	1.15 %	38 164	31 887	3 010	-9 286
2009	621 595	6 265	1.04 %	42 389	33 671	3 108	-11 827
2010	640 397	5 984	0.96 %	45 993	35 467	3 202	-13 728
2011	658 132	5 645	0.88 %	50 344	36 721	3 291	-16 914
2012	674 845	5 320	0.81 %	54 827	38 542	3 374	-19 660
2013	690 069	4 846	0.72 %	59 473	40 376	3 450	-22 548
2014	703 421	4 250	0.62 %	64 195	42 223	3 517	-25 489
2015	715 277	3 774	0.54 %	68 970	44 083	3 576	-28 463

Taulukko 3 Eläkevastuuennuste 2

Vuosi	TEL-eläkevastuu 1 000 €	TEL-eläkevastuun muutos 1 000 €	TEL-eläkevastuun muutos %	Maksettavat TEL-eläkkeet 1 000 €	Kannatusmaksut 1 000 €	hoitokulut = 0,5%*EV 1 000 €	Netto-kassavirta 1 000 €
2006	1 019 700			184 305	278 973	5 099	89 570
2007	1 158 113	138 412	13.57 %	195 583	279 916	5 791	78 542
2008	1 286 594	128 482	11.09 %	218 353	285 885	6 433	61 099
2009	1 398 353	111 759	8.69 %	233 345	278 345	6 992	38 008
2010	1 500 785	102 432	7.33 %	248 142	278 345	7 504	22 699
2011	1 591 281	90 497	6.03 %	259 841	273 318	7 956	5 521
2012	1 678 828	87 547	5.50 %	272 206	278 345	8 394	-2 255
2013	1 761 398	82 570	4.92 %	283 312	280 230	8 807	-11 889
2014	1 839 684	78 285	4.44 %	294 367	282 743	9 198	-20 822
2015	1 912 666	72 982	3.97 %	305 045	284 314	9 563	-30 295

Ensi näkemältä voisi sanoa, että säätiöiden tulevaisuudet ovat hyvin erilaisia ja että molemmat vaativat eri asioita sijoitussalkulta. Tarkemmin katsoen luvuista huomaa kuitenkin, että vuosina, joilla eläkevastuun ennustetaan kasvavan nopeasti, myös kannatusmaksut ylittävät selvästi maksettavat eläkkeet. Tällöin kannatusmaksuista saadulla kassavirralla voidaan kuitata suuri osa eläkevastuun kasvusta ja sijoitustoiminnan tuotolta vaaditaan selvästi vähemmän kuin eläkevastuun vuotuinen kasvu. Vastaavasti vuosina, joina eläkevastuu kasvaa vain vähän, maksettavat eläkkeet ylittävät saadut kannatusmaksut, mikä tarkoittaa, että sijoitustoiminnan tuottojen on katettava sekä kasvanut eläkevastuu että negatiivinen kassavirta.

Vaadittava tuotto(t) = (Eläkevastuun muutos(t) – Nettokassavirta(t)) / Eläkevastuu(t-1)

Taulukko 4 Eläkesäätiön 1 vaatima tuotto

Vuosi	TEL-eläkevastuu 1 000 €	TEL-eläkevastuun muutos 1 000 €	Netto-kassavirta 1 000 €	eläkevastuun muutos - kassavirta 1 000 €	Vaadittava tuotto %
2006	557 695	22 048	-5 248	27 296	5.10 %
2007	580 946	23 251	-5 418	28 669	5.14 %
2008	601 913	20 967	-9 286	30 253	5.21 %
2009	621 595	19 682	-11 827	31 509	5.23 %
2010	640 397	18 799	-13 728	32 527	5.23 %
2011	658 132	17 734	-16 914	34 648	5.41 %
2012	674 845	16 713	-19 660	36 373	5.53 %
2013	690 069	15 224	-22 548	37 772	5.60 %
2014	703 421	13 352	-25 489	38 841	5.63 %
2015	715 277	11 856	-28 463	40 320	5.73 %

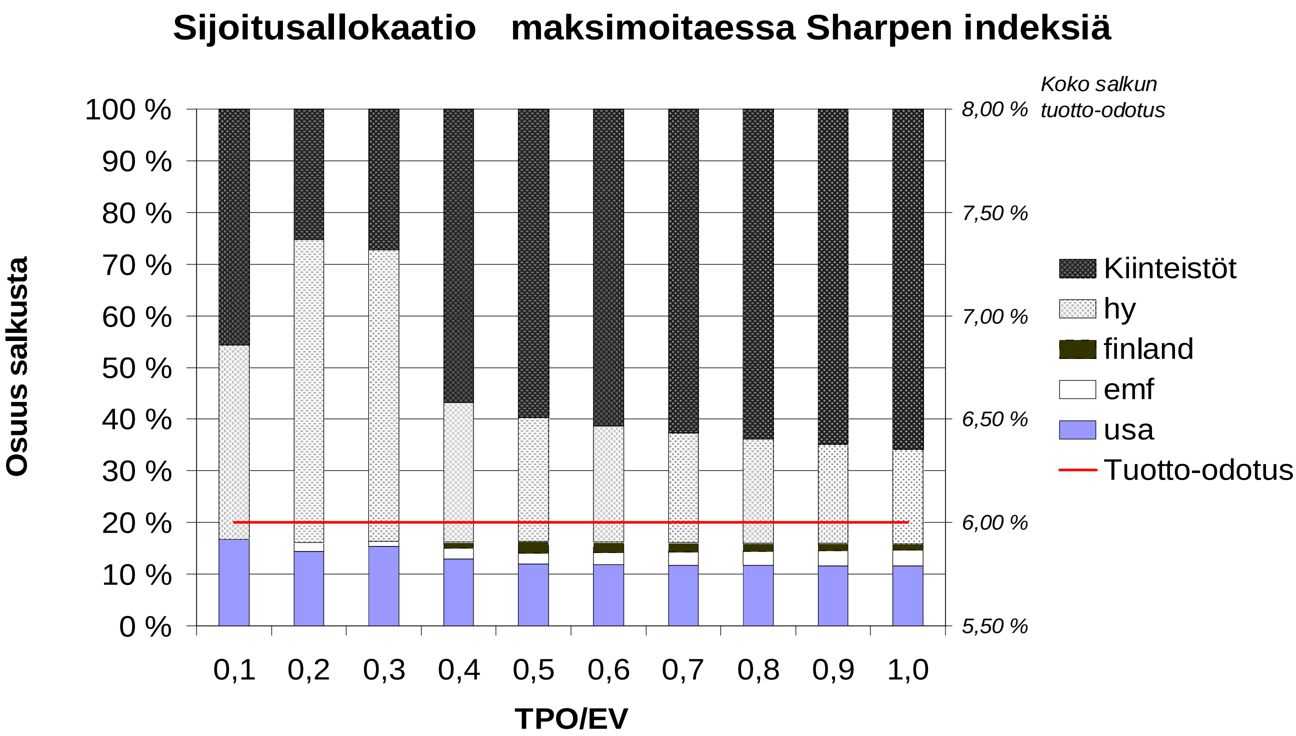
Taulukko 5 Eläkesäätiön 2 vaatima tuotto

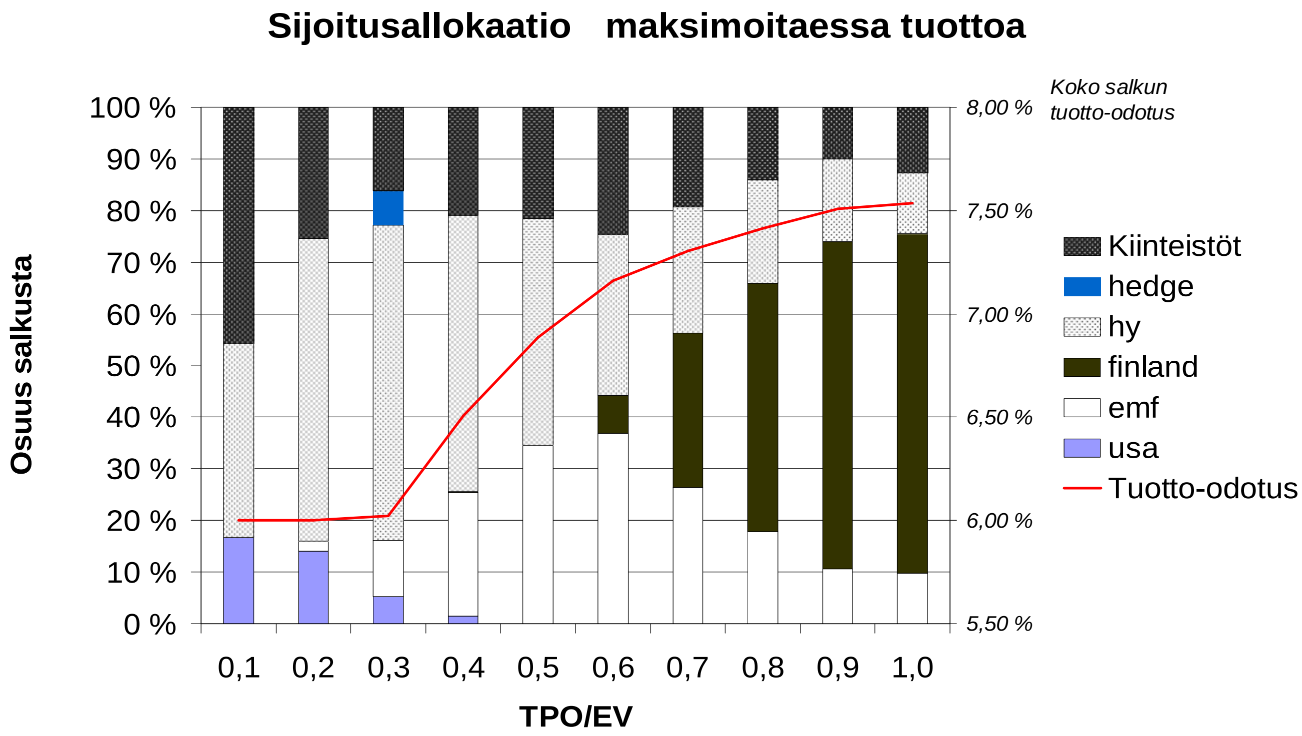
Vuosi	TEL-eläkevastuu 1 000 €	TEL-eläkevastuun muutos 1 000 €	Netto-kassavirta 1 000 €	eläkevastuun muutos - kassavirta 1 000 €	Vaadittava tuotto %
2006	1 019 700		89 570	-89 570	
2007	1 158 113	138 412	78 542	59 870	5.87 %
2008	1 286 594	128 482	61 099	67 383	5.82 %
2009	1 398 353	111 759	38 008	73 751	5.73 %
2010	1 500 785	102 432	22 699	79 732	5.70 %
2011	1 591 281	90 497	5 521	84 976	5.66 %
2012	1 678 828	87 547	-2 255	89 802	5.64 %
2013	1 761 398	82 570	-11 889	94 459	5.63 %
2014	1 839 684	78 285	-20 822	99 108	5.63 %
2015	1 912 666	72 982	-30 295	103 277	5.61 %

Taulukoista huomataan, että vaikka varsinainen eläkevastuun kasvu vaihtelee suuresti, kasvun kattamiseen vaadittava tuotto pysyy koko ajan likimain vakiona (noin 5.5 %). Käytämme kuitenkin tämän kappaleen simuloinneissa yksinkertaistuksena tapausta, jossa eläkevastuu kasvaa vuosittain 4.5 % ja nettokassavirta on koko ajan nolla. Alkuperäisten laskelmiemme (joissa mm. ei huomioitu eläkesäätiön hallintakuluja) 4.5 % oli hyvä estimaatti eläkevastuun kasvulle ja näin ollen käytimme sitä simuloinneissamme. Jälkeenpäin testasimme kuitenkin simuloimalla, että seuraavissa kappeleissa ilmenevät sijoitusstrategioiden paremmuussuhteet pätevät myös 5.5 % vuotuisella kasvulla. Nämä tulokset eivät kuitenkaan ehtineet tähän raporttiin.

4.2 Sijoitusallokaatiot

Simuloimme eläkesäätiön sijoitussalkun kehittymistä käyttämällä optimoinnissa rakentamiamme kohdefunktioita. Tässä kappaleessa tulemme käymään läpi, miten kohdefunktion valinta vaikuttaa lopputulokseen. Kuten kappaleessa 3.3.1 kerrotaan, ennen simulointia valitaan optimaaliset sijoitusten allokaatiot riippuen senhetkisestä toimintapääoman suhteesta eläkevastuuseen. Alla olevissa kuvissa näkyy kuinka paljoin eri sijoituskohteisiin sijoitetaan koko sijoitusomaisuudesta riippuen mitä kohdefunktiota käytetään. Sijoituskohteet ovat samat, jotka näkyvät taulukossa 1.





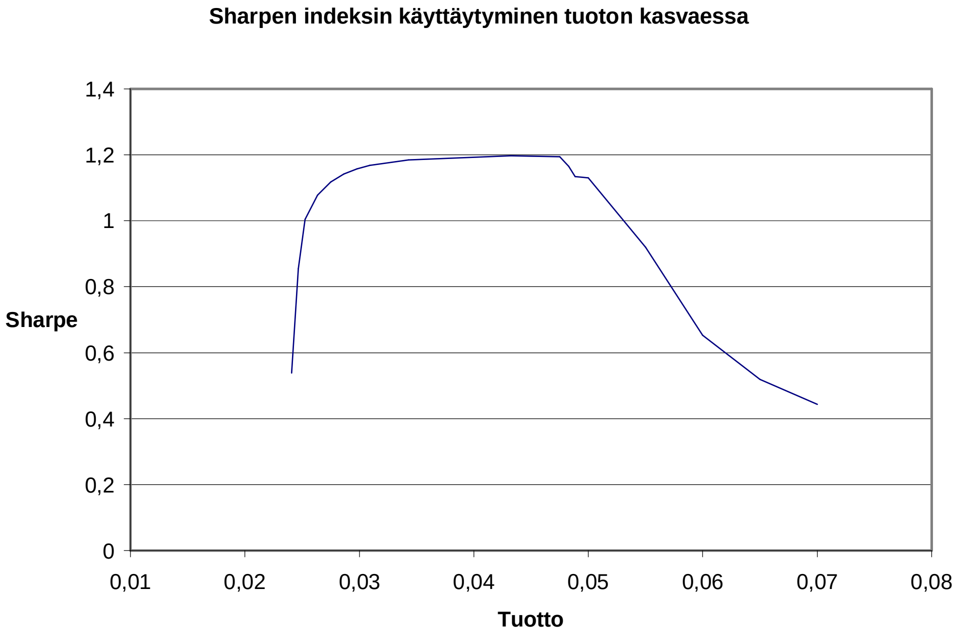
4.3 Kohdefunktiot

Olemme käyttäneet Z-luvun rajatodennäköisyytenä 5 %:a ja sakkofunktiolle olemme antaneet parametrin, joka pyrkii pitämään Z-luvun yli kahden. Rajatodennäköisyydellä tarkoitetaan sitä todennäköisyyttä, jolla Z-luku menee annetun arvon alle vuosittaisessa optimoinnissa.

Eri kohdefunktioiden paremmuutta vertaillaan toimintapääoman suhteella koko eläkevastuuseen sekä kuinka usein Z-luku menee alle kahden 10 000 simuloinnissa. Alla olevassa taulukossa on tuloksia kyseisistä simuloinneista, joissa keskiarvolla tarkoitetaan keskimääräistä toimintapääoman suhdetta eläkevastuuseen. Lähtötilanteessa kyseinen suhde on 30 %. Simulointien kuvat ovat liitteessä D.

Simulointikohde	**Sakotettava Z-luku**	**Raja tod.näk**	**keskiarvo**	**keskihajonta**	**Z alle 2**
Sharpe	2	0,05	0,4992	0,308	34 %
Varianssi	2	0,05	0.4968	0.3079	34 %
Tuotto	2	0,05	0,5747	0,6051	42 %
Varianssi ilman sakkoa	-	-	0,4999	0,2902	63 %

Yllä olevasta taulukosta sekä liitteen kuvista nähdään, että Sharpen indeksillä ja varianssin minimoinnilla saadaan käytännössä samanlaiset tulokset. Tämä johtuu siitä, että Sharpen indeksi pyrkii tässä tapauksessa käytännössä minimoimaan varianssia näillä annetuilla sijoituskohteilla ja niiden tuotto-odotuksilla, silloin kun minimituottovaatimuksena on 6 %. Tämä havaitaan varsin selvästi tarkastelemalla alla olevaa kuvaa. Sharpen indeksin arvo putoaa hyvin nopeasti tuoton suurentuessa 4,8 %:sta. Tämän takia jatkossa ei tulla tutkimaan varianssin minimointia sakkofunktioiden kanssa.



Kuva 4 Sharpen indeksi

Käytettäessä kohdefunktina tuoton maksimointia saadaan korkeampia keskiarvoja, mutta myös hajonta on suurempi ja Z-luku jää useammin alle kahden. Perinteinen varianssin minimointitehtävä tuotto-odotuksen ollessa 6 %, ilman sakkoja antaa yhtä hyvän keskiravon kuin Sharpe ja pienemmän hajonnan, mutta tällöin Z-luku alittaa 2:n lähes kaksi kertaa useammin.

4.4 Sakkofunktiot

Seuraavaksi tarkastellaan eri sakkofunktioiden vaikutusta. Kaikissa simuloinneissa käytetään ensimmäistä sakkofunktiota, mutta tämän lisäksi kokeillaan myös kahden muun sakkofunktion toimintaa. Aluksi testataan ensimmäisen sakkofunktion parametrien valinnan vaikutusta simulointeihin. Tulokset on esitetty alla olevassa taulukossa ja simulointien kuvat ovat liitteessä D.

Simulointikohde	Sakotettava Z-luku	Raja tod.näk	keskiarvo	keskihajonta	Z alle 2
Sharpe	2	0,05	0,4992	0,308	34 %
Tuotto	2	0,05	0,5747	0,6051	42 %

Sharpe	2	0,1	0,4986	0,3009	40 %
Tuotto	2	0,1	0,5797	0,6294	52 %
Sharpe	2,5	0,05	0,4997	0,3152	34 %
Tuotto	2,5	0,05	0,5365	0,5178	40 %

Kun suurennetaan rajatodennäköisyyttä, keskiarvo ja keskiarvon keskihajonta pysyvät käytännössä samoina, mutta tapauksia, jolloin Z-luku alittaa kahden on huomattavasti enemmän.

Kun taas annetaan sakon vaikuttaa jo 2.5 kohdalla, ei tapahdu minkäänlaisia muutoksia tuloksissa.

Seuraavaksi tutkimme kahden muun sakon toimintaa. Sakko2 kertoo millä todennäköisyydellä eläkesäätiön tulos ei saa mennä negatiiviseksi ja sakko3:lla annetaan tavoiteltu Z-luku. Simulointien tulokset ovat alla olevassa taulukossa ja liitteessä on simulointien kuvat.

Simulointikohde	**Sakotettava Z-luku**	**Raja tod.näk**	**sakko2**	**sakko3**	**keskiarvo**	**keskihajonta**	**Z alle 2**
Sharpe	2	0,05	-	-	0,4992	0,308	34 %
Tuotto	2	0,05	-	-	0,5747	0,6051	42 %
Sharpe	2	0,05	0,1	-	0,5007	0,3073	37 %
Sharpe	2	0,05	-	3	0,5019	0,3244	40 %
Tuotto	2	0,05	0,1	-	0,4969	0,3031	37 %
Tuotto	2	0,05	-	3	0,5054	0,3624	40 %

Tulosten perusteella sakko2:lla ei ole vaikutusta, kun kohdefunktio on Sharpen indeksi. Sitä vastoin, kun kohdefunktiona on tuoton maksimointi, niin sakko2:n avulla saadaan keskiarvon hajontaa pienennettyä, mutta tällöin myös keskiarvo pienenee.

Sakko3:n avulla saadaan Z-luku halutulle tasolla, eikä tämä vahingoita muita tuloksia merkittävästi.

4.5 Lähtötilanteen vaikutus

Edellä olevissa simuloinneissa toimintapääoman suhde eläkevastuuseen oli 30 %. Tässä kappaleessa tutkitaan, miten lähtötilanteen muuttuminen muuttaa tuloksia.

Tulokset ovat alla olevassa taulukossa sekä kuvat liitteessä D.

Simulointikohde	**Sakotettava Z-luku**	**Raja tod.näk**	**keskiarvo**	**keskihajonta**	**Z alle 2**
TPO/EV=25%, Sharpe	2	0,05	0,4448	0,2958	48 %
TPO/EV=30%, Sharpe	2	0,05	0,4992	0,308	34 %
TPO/EV=35%, Sharpe	2	0,05	0,5563	0,3046	33 %
TPO/EV=25%, Tuotto	2	0,05	0,492	0,5376	56 %
TPO/EV=30%, Tuotto	2	0,05	0,5747	0,6051	42 %

TPO/EV=35%, Tuotto	2	0,05	0,6442	0,6576	42 %

Tulosten mukaan lähtötilanteella on suuri merkitys. Alkutilanteen suhteen ollessa suurempi myös keskiarvo on suurempi ja Z-luku alittaa kahden harvemmin.

4.6 Eläkevastuun kasvuodotuksen vaikutus

Mikäli käy toisin kuin kappaleessa 4.1 kuvatulla tavalla, jolloin kannatusmaksut kasvavat samaa tahtia eläkevastuun kanssa, olemme myös tarkastelleet tilannetta, jossa eläkevastuun kasvunopeus on eri kuin alkuperäisissä simuloinneissa. Alla olevassa taulukossa sekä liitteen D kuvissa on tarkasteltu eläkevastuun kasvuodotuksen vaikutusta.

Simulointikohde	Sakotettava Z-luku	Raja tod.näk	keskiarvo	keskihajonta	Z alle 2
EV-kasvu = 4%, Sharpe	2	0,05	0,5732	0,3182	30 %
EV-kasvu = 4,5%, Sharpe	2	0,05	0,4992	0,308	34 %
EV-kasvu = 5%, Sharpe	2	0,05	0,4266	0,2951	40 %
EV-kasvu = 4%, Tuotto	2	0,05	0,6674	0,6705	40 %
EV-kasvu = 4,5%, Tuotto	2	0,05	0,5747	0,6051	42 %
EV-kasvu = 5%, Tuotto	2	0,05	0,4844	0,5493	48 %

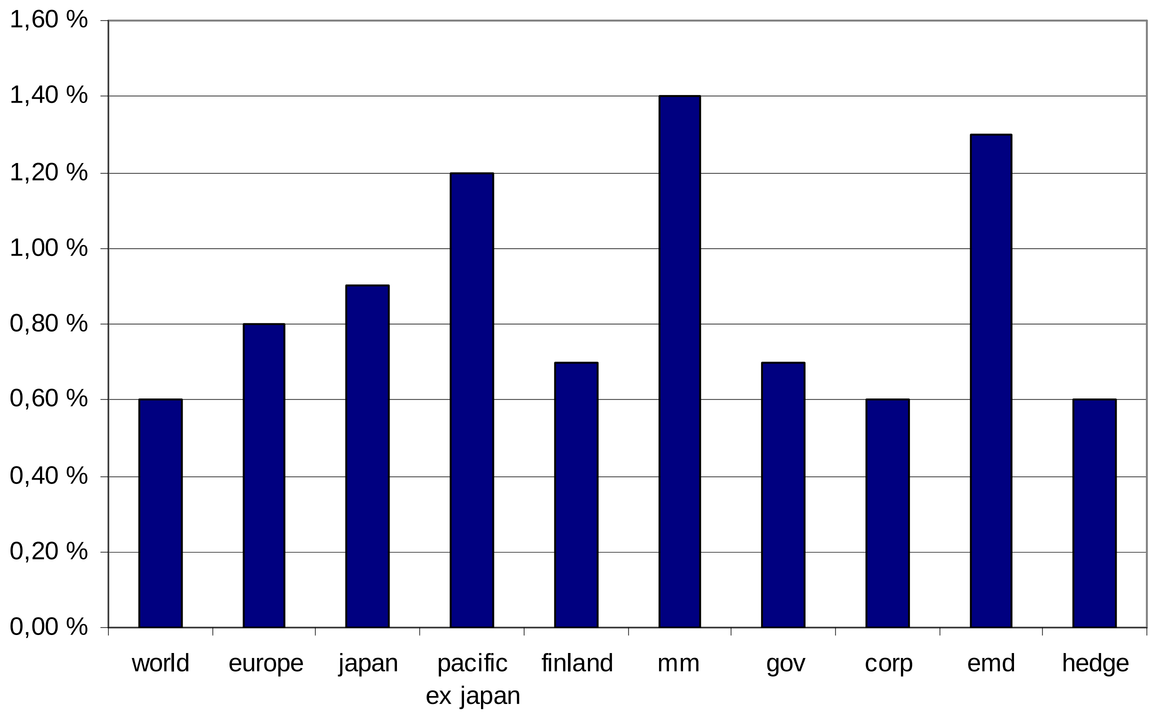
Edellistä tapausta vastaavasti huomaamme, että eläkevastuun kasvunopeuden muutoksella, kannatusmaksujen pysyessä vakiona, on suuri merkitys keskiarvoon, sen hajontaan sekä Z-luvun kahden alituksiin.

4.7 Tuottovektorin vaikutus

Tässä kohdassa tulemme tutkimaan kuinka paljon eri sijoituskohteiden tuotto-odotusten tulee muuttua, jotta kyseinen kohde otetaan mukaan salkkuun tai vastaavasti jätetään sen ulkopuolelle. Alkuperäisellä salkulla viitataan kappaleessa 4.2 olevaan salkkuun, jossa salkku on optimoitu käyttäen Sharpen indeksiä ja toimintapääoman suhde eläkevastuuseen on 30 %.

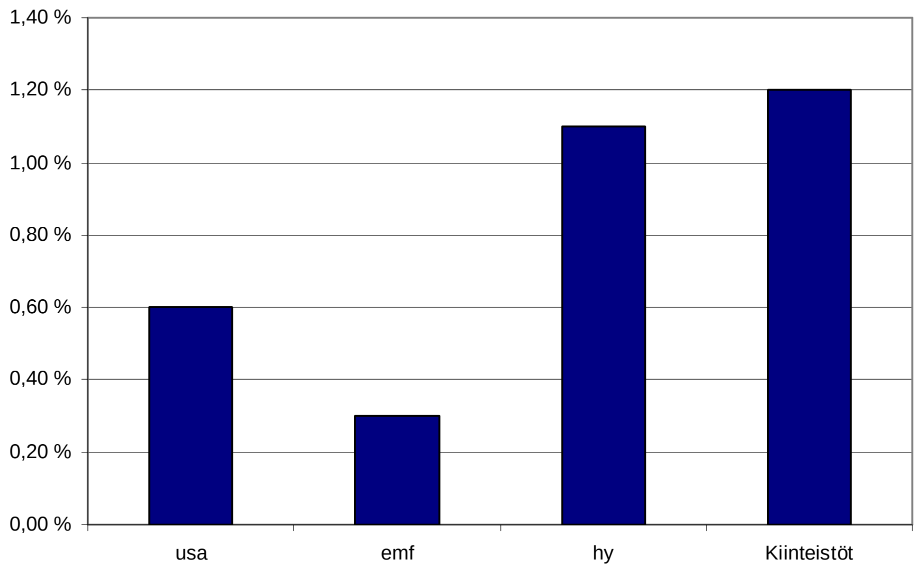
Alla olevassa taulukossa on kuvattu kuinka monta prosenttiyksikköä eri sijoituskohteiden tuoton on noustava, jotta ne pääsisivät mukaan alkuperäiseen salkkuun. Sijoituskohteet ovat samat kuin taulukossa 1.

Taulukko 6 Kuinka monta prosenttiyksikköä eri sijoituskohteiden tuoton on noustava



Alla olevassa taulukossa on kuvattu kuinka monta prosenttiyksikköä alkuperäisen salkun sijoituskohteiden tuotto-odotuksen on laskettava, ennen kuin ne putoavat pois salkusta. Toimintapääoman suhde eläkevastuuseen on 30 %.

Taulukko 7 Kuinka monta prosenttiyksikköä eri sijoituskohteiden tuoton on laskettava



5 Analyysi

5.1 Kohdefunktiot

Kappaleessa 4.2 esitettyjen simulointitulosten pohjalta voimme todeta, että pelkästään varianssin minimointi ilman minkäänlaisia sakkoja ei ole optimaalinen tapa tarkastella eläkesäätiön sijoitusten allokointia. Tämä sen takia, että esimerkiksi Sharpen indeksin käyttö antaa keskiarvon sekä keskihajonnan osalta käytännössä samat tulokset, mutta todennäköisyys Z-luvun pieniin arvoihin on huomattavasti suurempi varianssin minimoinnilla. Sen sijaan tuoton maksimoinnin ja Sharpen indeksin keskinäisestä paremmuudesta ei voida sanoa mitään täysin tarkkaa. On tosin huomattava, että tuoton maksimoinnin antama suuri keskihajonta johtuu suurelta osin juuri positiivisista tapauksista, eikä tästä näin ollen pidä tehdä liian pitkälle vietyjä johtopäätöksiä. Tuoton osalta Sharpen indeksi antaa jonkin verran huonompia tuloksia, mutta Z-luku pysyy useammin päälle kahden. Toisin sanoen valittaessa näiden kahden kohdefunktion välillä, joudutaan tekemään valinta, kumpaa ominaisuutta halutaan painottaa enemmän. Tässä päätöksessä emoyhtiön tilanteella on suuri merkitys.

5.2 Sakkofunktiot

Kappaleessa 4.3 tarkastelimme erilaisten sakkofunktioden vaikutuksia. Molemmilla kohdefunktioilla rajatodennäköisyyden muuttaminen 0,05:stä 0,1:een kasvatti Z-luvun käyntikertoja kahden alla, mutta ei muuttanut merkittävästi keskiarvoa tai keskihajontaa. Tästä voimme päätellä, että ensinnäkin sakko toimii halutulla tavalla ja toiseksi se vaikuttaa toimivan varsin tehokkaasti. Sen sijaan sakotettavan Z-luvun muutos 2:sta 2,5:een ei tuo käytönnässä minkäänlaisia muutoksia, joten voidaan sanoa, ettei sakko toimi halutulla tavalla. Sakot 2 ja 3 vaikuttavat toimivan halutulla tavalla. Näiden sakkojen tai vastaavien sakkojen käyttö riippuu vahvasti emoyhtiön tilanteesta.

5.3 Lähtötilanteen vaikutus

Kappaleessa 4.4 esitettyjen tulosten valossa on selvää, että lähtötilanteella on todella suuri merkitys tuloksiin. Tämä pätee molemmille kohdefunktioille.

5.4 Eläkevastuun kasvuodotuksen vaikutus

Kappaleessa 4.5 tarkastelimme eläkevastuun kasvuodotuksen vaihtelun merkitystä. Kuten odottaa saattoi, tällä on huomattava vaikutus tuloksiin ja nimenomaan kasvuvauhdin kiihtyessä tulokset heikkenevät.

5.5 Tuottovektorin vaikutus

Kappaleessa 4.6 tarkasteltiin sijoitusten allokointipäätösten herkkyyttä käytetylle tuottovektorille. Tämän perusteella voidaan sanoa, että malli ei ole erityisen herkkä tuotto-odotusten muutoksille. Jotta esimerkiksi alkutilanteeseen otettaisiin mukaan jokin uusi sijoituskohde, tulisi kyseisen kohteen tuoton kasvaa vähintään 0,6 prosenttiyksikköä. Vastaavasti vaadittavat muutokset tuotto-odotuksiin, jotta sijoituskohde ei kuuluisikaan alkuperäiseen salkkuun, ovat vähintään samaa luokkaa kuin edellä lukuun ottamatta yhtä sijoituskohdetta.

6 Yhteenveto ja johtopäätökset

Projektissa onnistuttiin muotoilemaan eläkesäätiölle salkunvalintakriteerit, joilla saavutetaan eläkesäätiön näkökulmasta selvästi parempi tulos kuin perinteisellä minimivarianssiportfoliolla.

Minimivarianssiportfolion voittaminen vakavaraisuusmielessä voidaan selittää ensinnäkin sillä, että vakavaraisuusraja vaihtelee huomattavasti sen mukaan, mihin on sijoitettu, vaikka eri sijoitusvaihtoehdot olisivat melkein identtisiä tuotto-keskihajonta mielessä. Optimointimallimme ottaa tämän huomioon sakottamalla kohdefunktiota, jos vakavaraisuusrajan rikkominen käy liian todennäköiseksi.

Osaltaan hyvät tulokset selittyvät myös mallin dynaamisuudella, joka mahdollistaa optimaalisen riskinoton ottaen huomioon eläkesäätiön varallisuustilanteen. Kunkin hetken varallisuustilannetta voidaan mitata toimintapääoman ja eläkevastuun suhteen avulla.

Työmme tärkeimmät tulokset ovat siis:

1. Riskinottokyky tulee mitata sen mukaan, kuinka todennäköistä on säilyä vakavaraisena

2. Riskinottokykyä tulee arvioida uudelleen jatkuvasti

3. Sijoitusportfolio tulee pitää aina riskinottokykyyn nähden sopivana

Ehdotuksia lisätutkimusten aiheeksi

Tässä projektissa eläkesäätiön kannatusmaksut oletettiin vakioksi, mikä oli huomattava yksinkertaistus, sillä todellisuudessa juuri kannatusmaksuista eläkesäätiön omistava yritys on kiinnostunut. Rakentamaamme mallia tulisi muokata vielä niin, että se laskisi asiakasyritykselle ko. yrityksen preferenssit huomioon ottaen optimaalisen kannatusmaksujen suuruuden.

Mallissamme optimoinnin kohteena olivat vain joko tuotto tai Sharpen indeksi. Molemmilla vaihtoehdoilla saatiin parempia tuloksia kuin perinteisellä minivarianssiportfoliolla, mutta on hyvin mahdollista, että voidaan löytää vielä parempi optimointikriteeri, joka paremmin tasapainottaa tuoton ja riskin.

Lähdeluettelo

Board J., Sutcliffe C.: Joined-up Pension Policy in the UK: An Asset-Liability Model for Simultaneously Determining the Asset Allocation and Contribution Rate, 2005 http://www.icmacentre.rdg.ac.uk/pdf/discussion/DP2005-11.pdf

Dupacova & Polivka: Asset-liability management for Czech pension funds using stochastic programming

Eläkesäätiöyhdistys-ESY ry: Eläkesäätiön käsikirja, 2006

S. Haberman, C. Day, D. Fogarty, M. Z. Khorasanee, M. McWhirter, N. Nash, B. Ngwira, I. D. Wright and Y. Yakoubov: A stochastic approach to risk management and decision making in defined benefit pension schemes, 2003, http://www.actuaries.org.uk/files/pdf/sessional/sm0301.pdf

Koivu M.: A stochastic optimization approach to financial decision making, 2004 http://helecon3.hkkk.fi/pdf/diss/a234.pdf

Law A.M. & W.D. Kelton: Simulation modeling and analysis, 2000, s. 480

Ljung L. & Glad T.: Modeling of Dynamic Systems, 1994.

Luenberger D.G.: Investment science, 1998, s. 309-311

Lågland T.: Stochastic optimization in dynamic asset and liability management, 2003, Master Thesis, HUT

Markovitz, Portfolio Selection, *Journal of Finance* 1952.

Liite A Eläkesäätiön vakavaraisuuden määrittäminen

Vakavaraisuusrajakerroin eli p-luku lasketaan seuraavalla kaavalla:

$$p = c\left(-b\beta^T m + a\sqrt{\beta^T \Sigma^p \beta}\right)/100\,, \tag{A1}$$

missä p on vakavaraisuuskerroin, **β** on sijoitusten painovektori asetuksen mukaisissa ryhmissä, **m** on vektori, joka sisältää asetuksen mukaiset riskipreemiot ja $\sum^p$ on asetuksessa annetuista hajonnoista (**s**) ja korrelaatioista (**R**) seuraavalla kaavalla laskettu kovarianssimatriisi.

$$\Sigma_{ij}^p = s_i s_j R_{ij} \tag{A2}$$

Kaavassa esiintyvien vakioiden a, b ja c arvot ovat:

$a = 1{,}98 \quad b = 1{,}08 \quad c = 0{,}90$

ja muut asetuksen määräämät arvot:

$$m = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}6 \\ 0{,}6 \\ 3{,}7 \\ 3{,}7 \\ 6{,}2 \\ 6{,}2 \end{bmatrix}, \quad s = \begin{bmatrix} 1{,}0 \\ 3{,}5 \\ 4{,}4 \\ 8{,}2 \\ 15{,}0 \\ 21{,}4 \\ 29{,}9 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1{,}0 & -0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}0 & 0{,}0 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 1{,}0 & 0{,}4 & -0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}4 & 1{,}0 & -0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}0 & -0{,}1 & -0{,}1 & 1{,}0 & 0{,}7 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}0 & -0{,}1 & -0{,}1 & 0{,}7 & 1{,}0 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ -0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}3 & 1{,}0 & 0{,}7 \\ -0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}7 & 1{,}0 \end{bmatrix}$$

Eläkesäätiön vakavaraisuusraja (VVR) lasketaan vakavaraisuusasetuksen 3 § perusteella määräytyvänä osuutena (p-luku) eläkesäätiön eläkevastuusta, jonka jälkeen eläkesäätiön vakavaraisuusasema voidaan määrittää seuraavalla kaavalla:

$$Z = \frac{TPO}{VVR} = \frac{TPO}{p \cdot EV}\,, \tag{A3}$$

missä Z on vakavaraisuusasema, TPO on toimintapääoma, VVR on vakavaraisuusraja, EV on eläkevastuu ja p kuten yllä.

Liite B Choleskyn hajotelma

Symmetrinen ja positiividefiniitti matriisi A voidaan hajottaa alakolmiomatriisin C ja sen transpoosin tuloksi.

$$A = CC^T \tag{B1}$$

$$c_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik}^2} \tag{B2}$$

$$c_{ij} = \frac{1}{c_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} c_{ik} c_{jk} \right), \quad i > j \tag{B3}$$

Liite C Simulointiyhtälön johtaminen

Sijoituskohteiden hintoja voidaan yleisesti pitää lognormaalisti jakautuneina, jolloin ne noudattavat prosessia:

$$\mathrm{d}\ln[S(t)] = \upsilon\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}z, \qquad \text{(C1)}$$

missä $S(t)$ on sijoituskohteen hinta hetkellä t, z on standardi Wiener prosessi, υ on tuoton logaritmin odotusarvo ja σ on vastaava tuoton logaritmin keskihajonta:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\{\ln[S(t)/S(0)]\} &= \upsilon t \\ \sqrt{\mathrm{Var}\{\ln[S(t)/S(0)]\}} &= \sigma\sqrt{t} \end{aligned} \qquad \text{(C2)}$$

Normaalien laskusääntöjen mukaan pätee:

$$\ln[S(t)] = \frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)} \qquad \text{(C3)}$$

Olisi kuitenkin virheellistä kirjoittaa prosessi C1 muodossa $\mathrm{d}S(t)/S(t) = \upsilon\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}z$, sillä Wiener prosessit eivät ole tavallisia funktioita, eivätkä niille myöskään päde tavanomaiset laskusäännöt. Oikea prosessi saadaan lisäämällä lognormaalin jakauman epäsymmetrisyydestä aiheutuva termi, jolloin tarkasteltava prosessi saa muodon (Luenberger, 1998):

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)} = \left(\upsilon + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}z, \qquad \text{(C4)}$$

Vastaavasti tuoton odotusarvo on tällöin:

$$\mathrm{E}\{S(t)/S(0)\} = e^{(\upsilon+\frac{1}{2}\sigma^2)t} \qquad \text{(C5)}$$

Tekemällä muuttujanvaihdos $\mu = \upsilon + \frac{1}{2}\sigma^2$ voidaan odotusarvo kirjoittaa

$$\mathrm{E}\{S(t)/S(0)\} = e^{\mu t} \qquad \text{(C6)}$$

Muuttujanvaihdos on luonteva, koska saimme lähtödatana nimenomaan sijoituskohteiden vuotuisten tuottojen odotusarvot. Vastaavasti yhtälö C4 on tällöin

$$\frac{\mathrm{d}\,S(t)}{S(t)} = \mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{dz}, \qquad \text{(C7)}$$

Saatu yhtälö on diskretoitava simulointia varten. Wiener prosessille z pätee $\mathrm{d}z = \varepsilon(t)\sqrt{\mathrm{d}t}$, missä $\varepsilon(t)$ on (0,1) normaalisti jakautunut satunnaismuuttuja. Diskretoinnissa tehdään muunnokset $\mathrm{d}\,S(t) = S(t_{k+1}) - S(t_k)$ ja $\mathrm{d}\,t = \Delta t$, minkä seurauksena saadaan seuraava yhtälö:

$$S(t_{k+1}) - S(t_k) = \mu S(t_k)\Delta t + \sigma S(t_k)\varepsilon(t_k)\sqrt{\Delta t} \qquad \text{(C8)}$$

Käytämme työssä diskretointivälinä yhtä vuotta, joten Δt=1. Normaalisti simuloitaessa käytetään huomattavasti lyhyempiä diskretointivälejä, jolloin pätee $1 + \mu\Delta t \approx e^{\mu\Delta t}$. Vuoden aikavälillä ero kasvaa kuitenkin niin suureksi, että on syytä korvata μ simulointiyhtälössä vuotuisen tuoton odotusarvolla $\bar{r} = e^{\mu} - 1$.

Simuloinnissa olemme kiinnostuneita sijoituskohteiden vuotuisista tuotoista r, emme niinkään niiden hinnoista. Tehdään siis vielä muunnos $S(t_{k+1}) = [1 + r(t_k)]S(t_k)$, jolloin C8 voidaan kirjoittaa muodossa:

$$[1 + r(t_k)]S(t_k) = [1 + \bar{r} + \sigma\varepsilon(t_k)]S(t_k)\,, \qquad \text{(C9)}$$

jota supistamalla saadaan

$$r(t_k) = \bar{r} + \sigma\varepsilon(t_k)\,. \qquad \text{(C10)}$$

Huomataan vielä, että saatu simulointiyhtälö tuotolle ei riipu ajanhetkestä, sillä $\varepsilon(t)$:t ovat samoin jakautuneita kaikilla ajanhetkillä. Yhden sijoituskohteen tapauksessa tuottoa voidaan siis simuloida suoraan normaalijakaumasta:

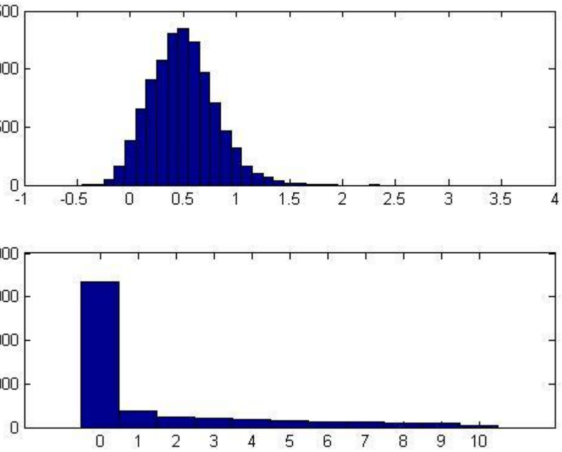
$$r(t) = \bar{r} + \sigma\varepsilon(t) \qquad \text{(C11)}$$

Liite D Simulointien kuvat

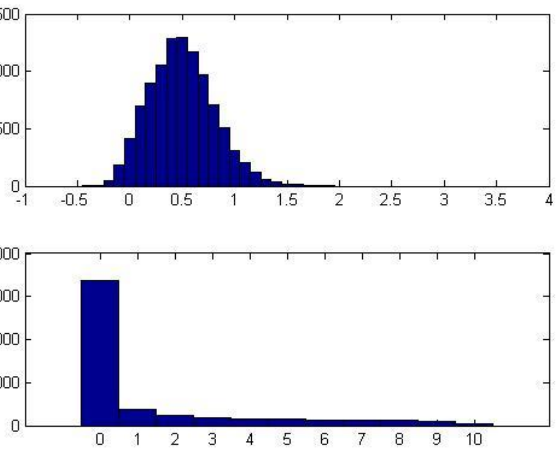
Alla olevissa kuvissa on simulointien tuloksia. Ylemmässä kuvassa on 10 000 simultaation histogrammi toimintapääoman suhteesta eläkevastuuseen simulaation päättyessä. Kyseinen suhde on simulaation alussa 0.3, jos toisin ei mainita. Alemmassa kuvassa näkyy histogrammi siitä kuinka monena vuotena Z-luku alittaa arvon kaksi kymmenen vuoden simulaation aikana.

Kuvien otsikoissa on käytetty kohdefunktio, Z-luku josta aloitetaan sakottaminen ja kyseisen arvon rajatodennäköisyys α1. Toinen rajatodennäköisyys α2 viittaa sakko2:een, eli millä todennäköisyydellä sallitaan säätiön tuloksen painuvan negatiiviseksi. Tavoiteltavalla z:lla viitataan sakko3:n vaikutukseen, joka pakottaa Z-luvun halutuksi. Eläkevastuun kasvun oletetaan olevan 4.5 % jos muuta ei mainita

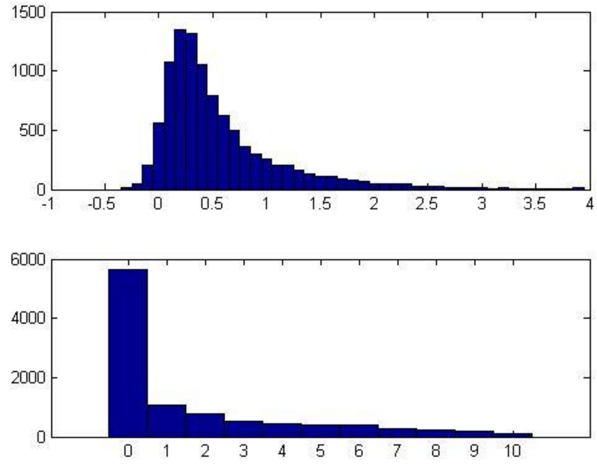
Kohdefunktiot



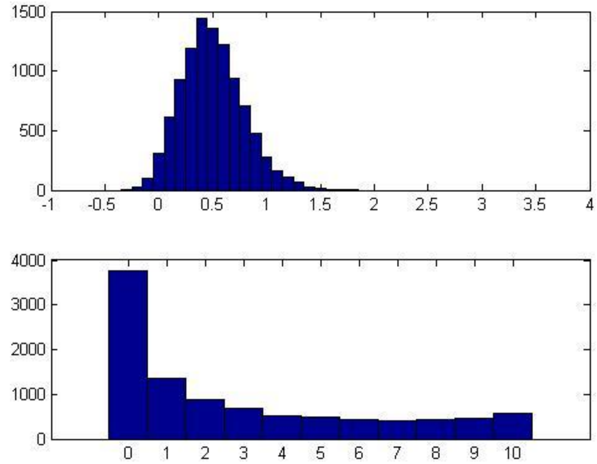
Kuva 5 Sharpe, Z-luku 2, α1= 0.05



Kuva 6 Varianssi, Z-luku 2, α1= 0.05

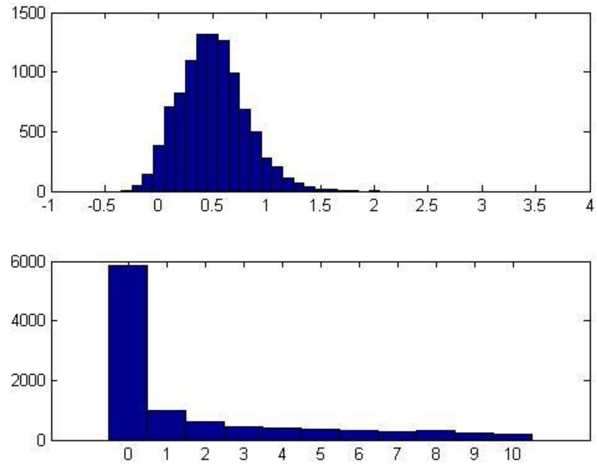


Kuva 7 Tuotto, Z-luku 2, α1 = 0.05

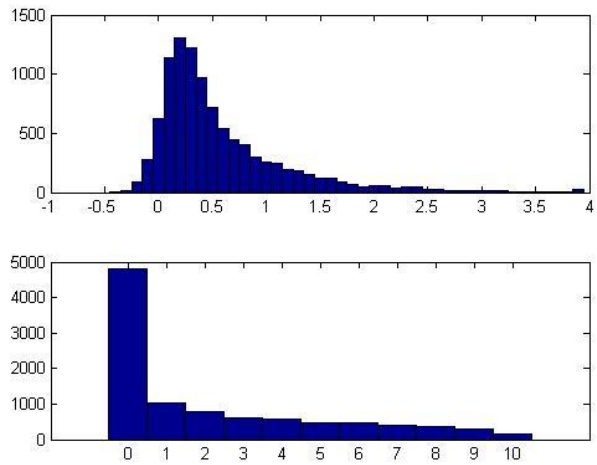


Kuva 8 Perinteinen varianssin minimointi ilman sakkoja

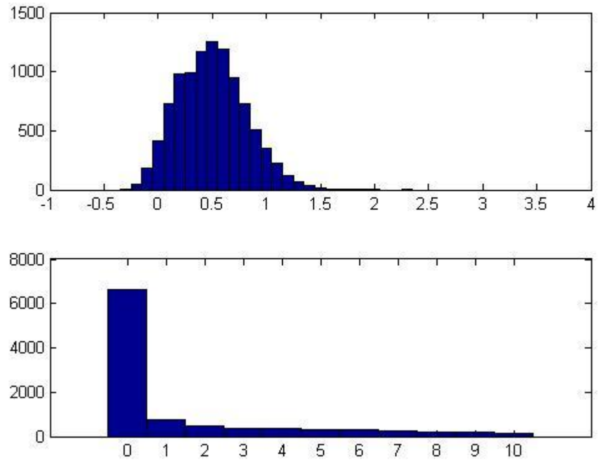
Sakko1:n parametrien muutokset



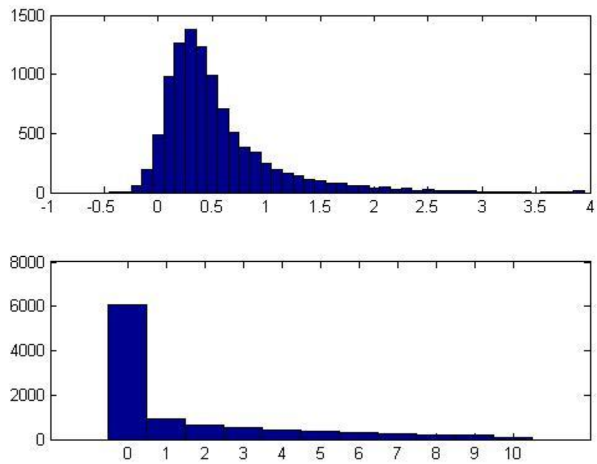
Kuva 9 Sharpe, Z-luku 2, α1 = 0.1



Kuva 10 Tuotto, Z-luku 2, α1 = 0.1

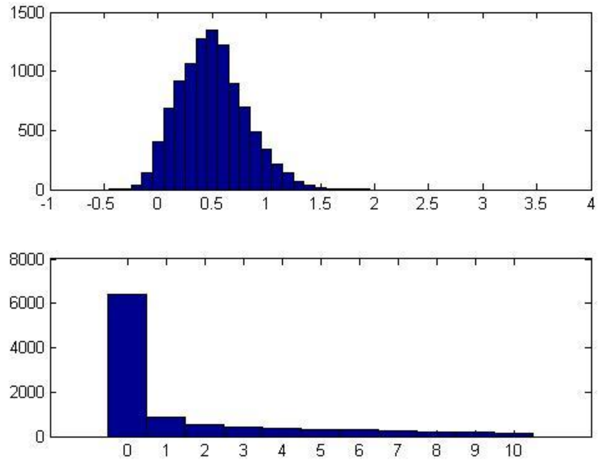


Kuva 11 Sharpe, Z-luku 2.5, α1 = 0.1

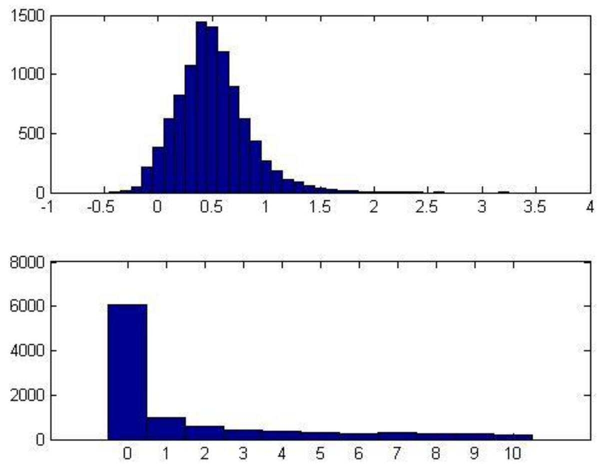


Kuva 12 Tuotto, Z-luku 2.5, α1 = 0.1

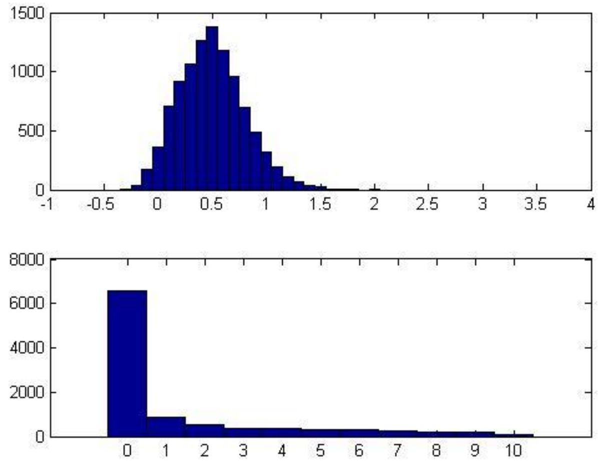
Muiden sakkofunktioiden vaikutus



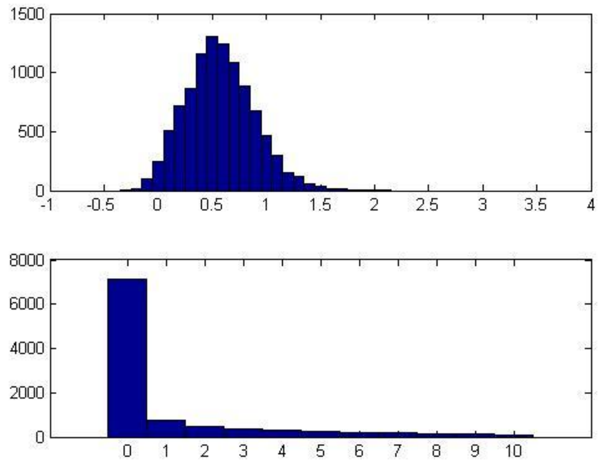
Kuva 13 Sharpe, Z-luku 2, α1 = 0.05, α2 = 0.1



Kuva 14 Sharpe, Z-luku 2, α1 = 0.05, tavoiteltava z = 3

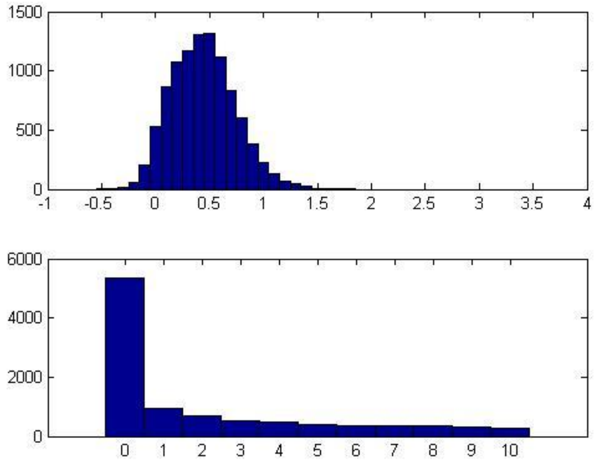


Kuva 15 Tuotto, Z-luku 2, α1 = 0.05, α2 = 0.1

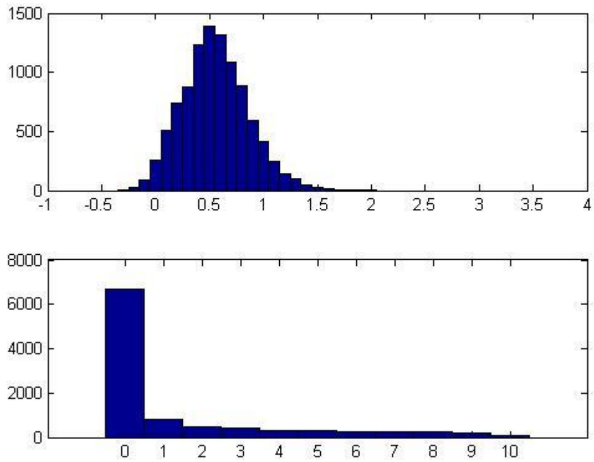


Kuva 16 Tuotto, Z-luku 2, α1 = 0.05, tavoiteltava z = 3

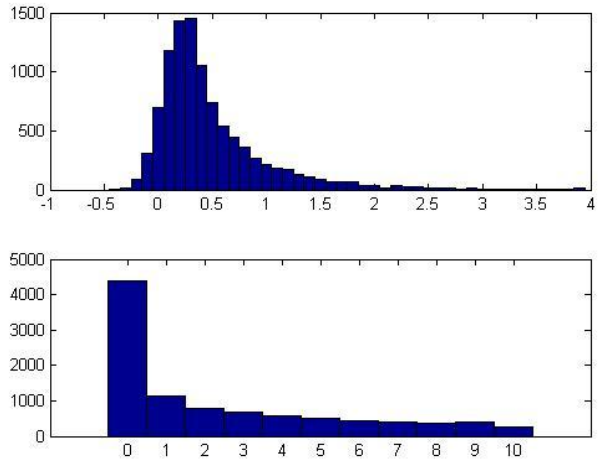
Lähtötilanteen vaikutus



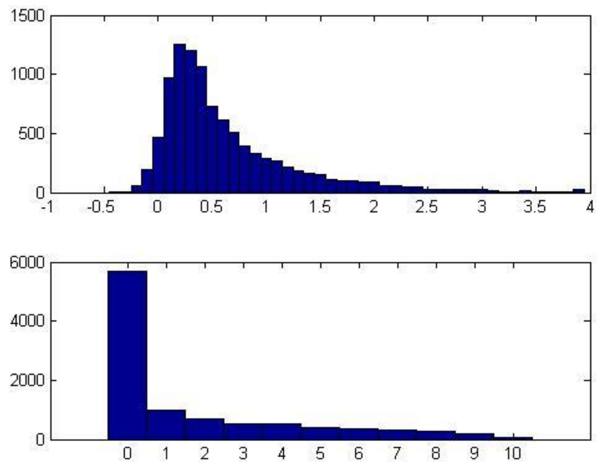
Kuva 17 Sharpe, Z-luku 2, α1 = 0.05 TPO/EV = 25 %



Kuva 18 Sharpe, Z-luku 2, α1 = 0.05 TPO/EV = 35 %

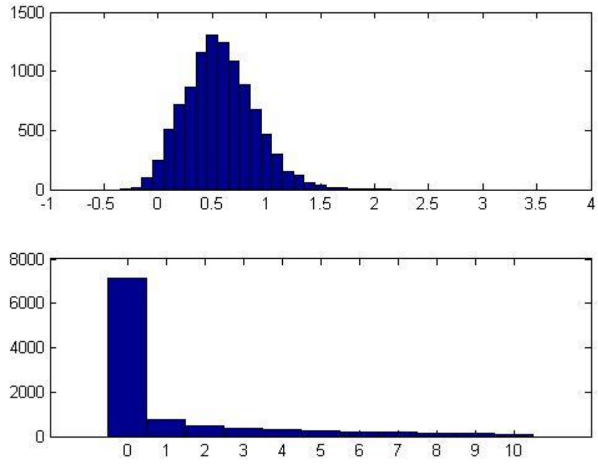


Kuva 19 Tuotto, Z-luku 2, α1 = 0.05 TPO/EV = 25 %

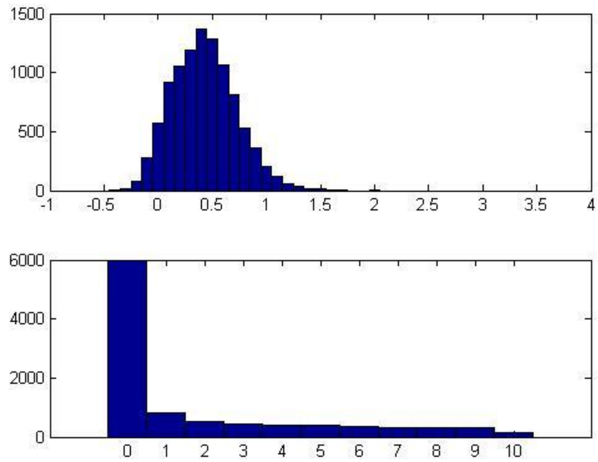


Kuva 20 Tuotto, Z-luku 2, α1 = 0.05 TPO/EV = 35 %

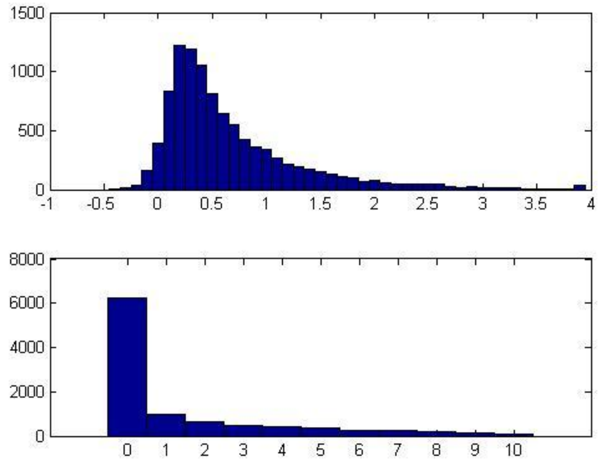
Eläkevastuun kasvuodotuksen vaikutus



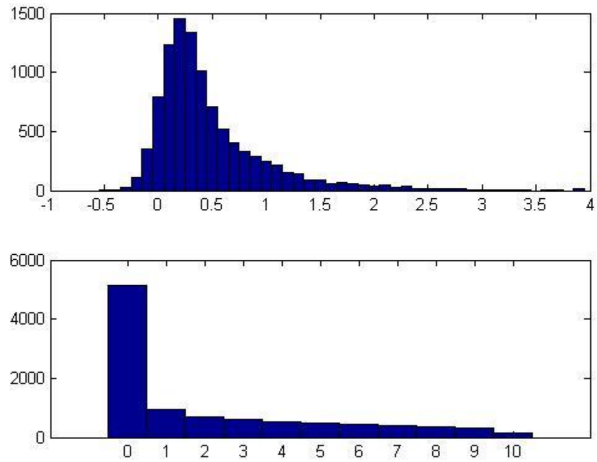
Kuva 21 Sharpe, Z-luku 2, α1 = 0.05, EV-kasvu 4%



Kuva 22 Sharpe, Z-luku 2, α1 = 0.05, EV-kasvu 5%



Kuva 23 Tuotto, Z-luku 2, α1 = 0.05, EV-kasvu 4%



Kuva 24 Tuotto, Z-luku 2, α1 = 0.05, EV-kasvu 5%

Liite E Mallin muuttujat

Päätösmuuttujat:

w_i	kohteen i paino salkussa ($\mathbf{w} = [w_1\ w_2\ \ldots\ w_{14}]^T$)
ω_i	rajoiteluokkien painojen ylärajan ylittävien sijoitusten painot ($\boldsymbol{\omega} = [\omega_1\ \omega_2\ \ldots\ \omega_4]^T$)

Päätösmuuttujista riippuvat muuttujat:

p	vakavaraisuusrajakerroin (p-luku, ks. liite A)
Z	vakavaraisuusasema (Z-luku, ks. liite A)
VVR	vakavaraisuusraja (ks. liite A)
r_p	portfolion vuosituotto
σ	portfolion varianssi

Muut muuttujat:

TPO	toimintapääoma
EV	eläkevastuu
SO	sijoitusomaisuus (SO = EV + TPO)
K	kassavirta
r_i	kohteen i vuosituotto (simuloitu) ($\mathbf{r} = [r_1\ r_2\ \ldots\ r_{14}]^T$)
$\bar{r}_i$	kohteen i tuoton odotusarvo
Σ	sijoituskohteiden tuottojen kovarianssimatriisi
C	kovarianssimatriisin Σ Choleskyn hajotelman alakolmiomatriisi
ε_i	(0, 1)-normaalijakautunut satunnaismuuttuja
r_f	riskitön tuotto

Sakkofunktioiden merkintöjä:

SF_i	sakkofunktio i
γ_i	sakkofunktion i painokerroin
$\hat{\mu}_Z$	vakavaraisuusaseman alin sakoton taso (sakkofunktio 1)
$\hat{\mu}_r$	tuoton alin sakoton taso (sakkofunktio 2)
Φ^{-1}	(0, 1)-normaalijakauman kertymäfunktion käänteisfunktio
α_1	rajatodennäköisyys, jolla Z saa jäädä alle tavoitetason
α_2	rajatodennäköisyys, jolla tuotto saa jäädä negatiiviseksi
σ	portfolion tuoton keskihajonta
σ_Z	portfolion Z-luvun keskihajonta
$\hat{Z}_1$	tavoitellun vakavaraisuusvyöhykkeen alaraja sakkofunktiossa 1.
$\hat{Z}_2$	vakavaraisuusaseman tavoitetaso sakkofunktiossa 3.