

# Additiivinen lukuteoria: Additiivisten 3-kantojen maksimikattavuudet (aihe-esittely)

*Ville Karhunen*

*31.10.2025*

Ohjaaja ja Valvoja: *Jukka Kohonen*

Työn saa tallentaa ja julkistaa Aalto-yliopiston avoimilla verkkosivuilla. Muilta osin kaikki oikeudet pidätetään.

# Tausta

- Additiivinen lukuteoria käsittelee kokonaislukujen summaamisista syntyviä rakenteita
- Additiivisten kantojen maksimikattavuuksia on tutkittu 1950-luvulta lähtien
- Tietokoneiden ja laskentakapasiteetin kehityksen seurauksena yhä isompien kantajoukkojen maksimikattavuuksia pystytään laskemaan

# Määritelmiä

Kanta  $A_k$

$$\forall a \in A_k : a \in \mathbb{N}_0 \quad , \quad |A_k| = k$$

Summajoukko  $S$

$$S = \{a + b \mid a, b \in A_k\}$$

$$A_k = \{0, 1, 3, 6\}$$



$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12\}$$



# Määritelmiä

Kattavuus  $n(A_k)$

$$\forall p \in \{0, 1, \dots, n(A_k)\} : p \in S, (n(A_k) + 1) \notin S$$

Maksimikattavuus  $n(k)$

$$n(k) = \max_{A_k} (n(A_k))$$

$$A_k = \{0, 1, 3, 6\}$$



$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 12\}$$



$$n(A_k) = 4$$

# Maksimikattavuuksien laskenta

- Epätehokas perusalgoritmi
  - Keino rakentaa suuri joukko  $k$ -kokoisia kantoja, joiden joukossa maksimikattavuuteen yltävä kanta
  - Algoritmi todella raskas laskennallisesti
  - Parannuksia vuosien varrella vain vähän

| $k$ | Läpikäytävien kantojen määrä |
|-----|------------------------------|
| 2   | 1                            |
| 3   | 2                            |
| 4   | 5                            |
| 5   | 17                           |
| 6   | 65                           |
| 7   | 292                          |
| 8   | 1434                         |
| 9   | 7875                         |
| 10  | 47098                        |
| 11  | 305226                       |

Naiivin algoritmin perusteella läpikäytävien kantojen määrä tapauksessa  $h=2$  (Challis, 1993)

# Rajaukset

- Työssä tutkitaan 3-kantoja ( $h=3$ )
  - $S = \{a + b + c \mid a, b, c \in A_k\}$
- Työssä keskitytään maksimikattavuuden laskenta-algoritmin tehostamiseen sekä maksimikattavuuksien ylä- ja alarajojen empiiriseen arviointiin

# Tavoitteet

1. Kehittää ja pohtia kombinatorisia poissulkumetodeja, joilla algoritmia voi tehostaa
2. Varmistaa riippumattomasti jo tunnettuja tuloksia
3. Mahdollisesti edetä laskennassa

| k  | Maksimikattavuus | Maksimikattavuuden tuottava 3-kanta                                   |
|----|------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| 5  | 24               | $\{0, 1, 4, 7, 8\}$                                                   |
| 8  | 70               | $\{0, 1, 4, 5, 15, 18, 27, 34\}$                                      |
| 16 | 385              | $\{0, 1, 3, 8, 12, 19, 25, 34, 36, 57, 98, 118, 128, 168, 178, 198\}$ |

Taulukossa eräitä esimerkkejä maksimikattavuuden tuottavista 3-kannoista (Challis, 2010)

# Menetelmät

- Kombinatoristen rajaustestien kehittäminen ja implementointi
- Julia-ohjelmointikieli
- Raskasta laskentaa
  - Viikkoja tai kuukausia prosessoriaikaa
- Puhti-supertietokone
  - Rinnakkaislaskentaa

```
159 function recursiveBuilder(A::BitSet, P::BitSet, PA::BitSet)
180
181     for newElement in (maxA + 1):(nk + 1)
182         newA = copy(A)
183         push!(newA, newElement)
184
185         Pdiff = BitSet()
186         for p in newA
187             push!(Pdiff, p + newElement)
188         end
189
190         newP = copy(P)
191         union!(newP, Pdiff)
192
193         PAdiff = BitSet()
194         for pd in Pdiff, na in newA
195             push!(PAdiff, pd + na)
196         end
197     end
198 end
```

Esimerkki Julia-ohjelmointikielen syntaksista

# Aineistot

- Challis, M.F. *Some External Postage Stamp Bases*, J. Integer seq. 13 (2010), Artikkel 10.6.1.47.
- Challis, M.F. *Two New Techniques for Computing External  $h$ -Bases  $A_k$* , J. Integer seq. 13 (1993) no 2.

# Aikataulu

- Aihe-esittely 31.10.2025
- Tutkimusta ja kirjoitusta 10/2025 – 5/2026
- Valmiin työn esittely 4-5/2026
- Valmis työ 5/2026