



Aalto-yliopisto
Perustieteiden
korkeakoulu

Osakkeiden tuottojakaumia koskevien markkina- ja asiantuntijanäkemysten yhdistely copula- funktioilla (**valmiin työn esittely**)

Henri Tuovila

13.01.2014

Ohjaaja: *VTM Ville Hemmilä*

Valvoja: *Prof. Ahti Salo*

Sisältö

- Tausta ja tavoitteet
- Historiaa
- COP-malli
- Copula-funktiot
- Tulokset
 - Paras copula-funktio
 - Empiirinen esimerkki
- Yhteenveto ja johtopäätökset
- Viitteet

Tavoitteet

- Työn tarkoituksena esitellä COP-malli
 - Copula Opinion Pooling
 - Sijoittajanäkemyksen ja markkinajakauman yhdistely copula-funktioita hyödyntäen
- Motivaationa paremman portfolioanalyysityökalun käyttöönotto
 - Ei-normaaliset markkinajakaumat
 - Sijoittajanäkemyksen huomioiminen
- Aineistona CAC 40- ja DAX-indeksit
 - Alkuperäinen suunnitelma korkokäyrän mallintamisesta COP-mallin avulla osoittautui liian haastavaksi

Historiaa

- Markowitz 1952 (moderni portfolioteoria)
 - Tuotto-varianssi –optimointi
 - Normaalisuus, lineaarinen korrelaatio
- Black-Litterman –malli 1992
 - Subjektiiiset sijoittajanäkemykset
 - Normaalisuus, lineaarinen korrelaatio
- Meucci: COP-malli (Copula Opinion Pooling) 2006
 - Subjektiiiset sijoittajanäkemykset
 - Copula-funktiot korrelaation sijaan
 - Ei normaaliusoletusta

COP-malli

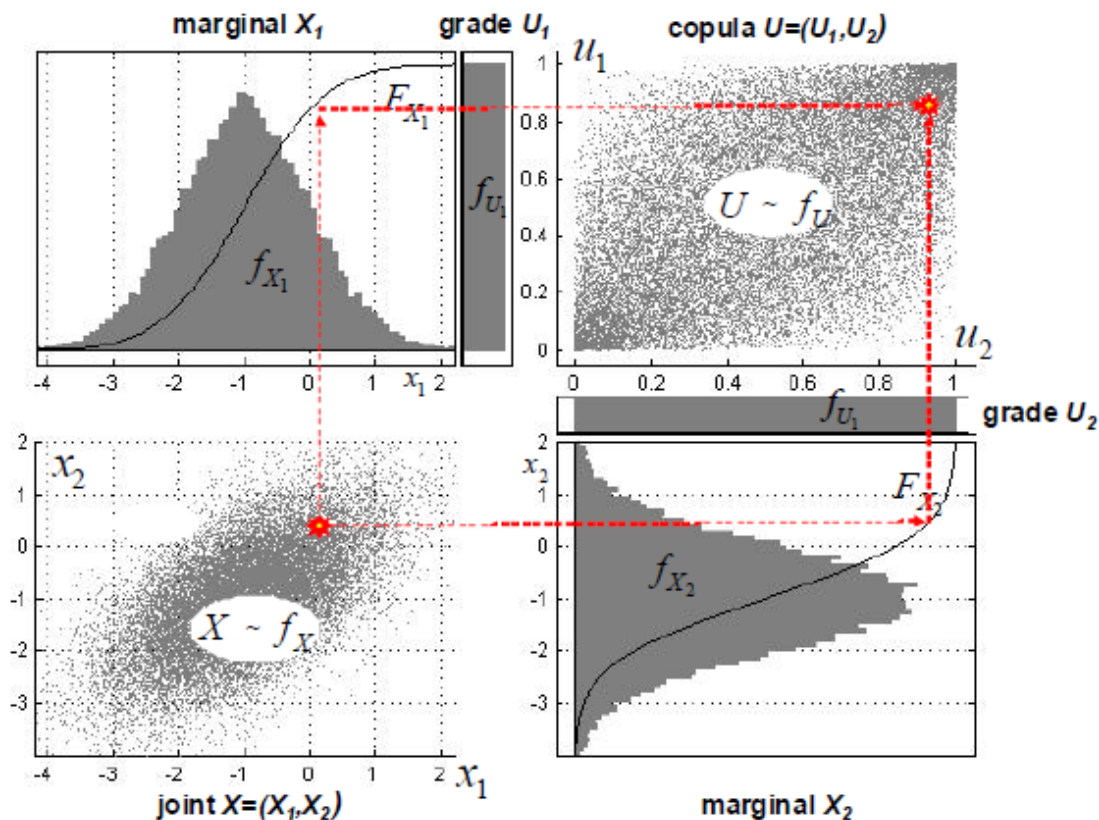
- $M \sim f_M$ Markkinajakauma
- $\bar{P} = \begin{pmatrix} P \\ P^\perp \end{pmatrix}$ Sijoittajanäkemykset P , täydennys P^\perp
- $V_{Prior} = M_{Prior} \bar{P}'$ Kannanvaihto
- $\tilde{F}_k = c_k \hat{F}_k + (1 - c_k) F_k, k = 1, 2, \dots, K$ (tässä $k = 1, 2$)
 - Näkemysten lisääminen markkinajakaumaan
 - Luottamustaso $c_k \in [0, 1]$
- $F_k \equiv V_{Prior}$
- $V_{Post} \approx \text{interp}(C; \tilde{F}_k, V_{Prior})$, Copula ei muutu
- $M_{Post} = V_{Post} \bar{P}'$ Painotettu markkinajakauma

Copula-funktiot: kaavoina

- Satunnaismuuttujat (X_1, X_2)
 - Marginaalijakaumien kertymäfunktiot
 - $F_i(x) = P(X_i \leq x)$
 - Muunnos $(U_1, U_2) = (F_1(x_1), F_2(x_2))$
 - Copula: $C(u_1, u_2) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2)$
 - Sklar'n teoreema
 - $F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$
 - Esimerkki: Gaussin Copula
 - $C_{\Sigma}(u_1, u_2) = \Phi_{\Sigma}(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2))$
 - T-copula, Arkimeediset copulat (Gumbel, Clayton...)
-

Copula-funktiot: kuvina

- A. Meucci. *A Short, Comprehensive, Practical Guide to Copulas*. 2011. saatavissa: <http://symmys.com/node/351> (viitattu 6.1.2014)



Tulokset – geneerinen esimerkki osaketuottojakaumilla

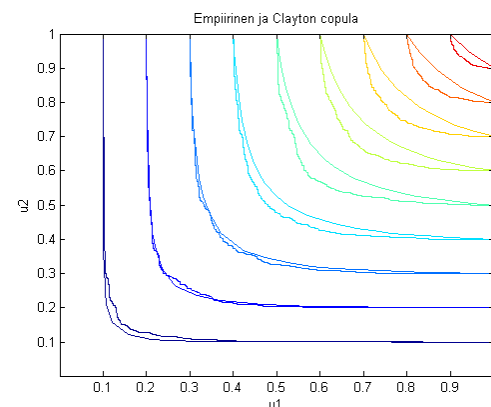
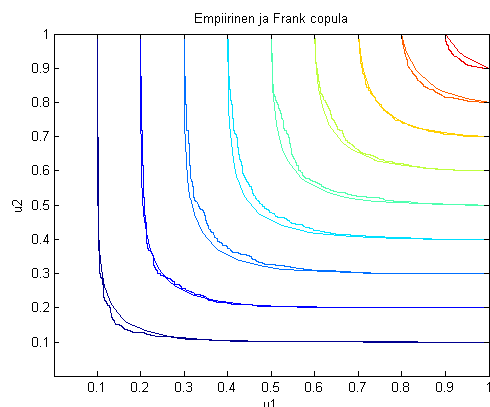
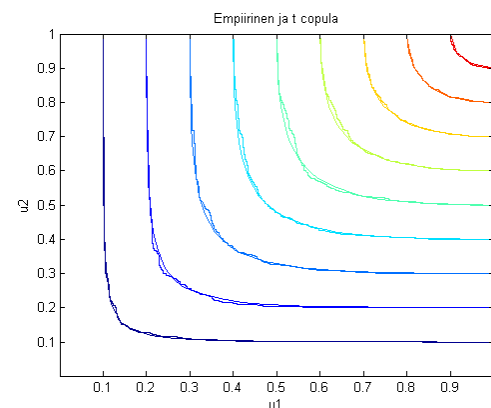
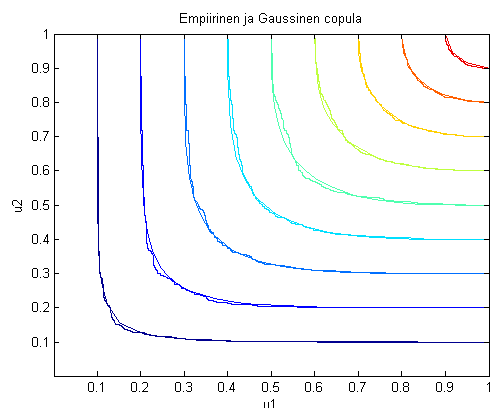
- CAC 40-indeksi ja DAX-indeksi
- Indeksien tuottojakaumien normalisuus?
 - Eivät ole normaalisia
 - Marginaalijakaumien mallinnus ydinestimaatein
- Minkälaiset jakaumat olisivat perusteltuja asiantuntijanäkemyksinä?
 - Yksinkertaisuuden vuoksi tasajakauma vain toiselle tuottoindeksille
 - P matriisiksi valitaan triviaali yksikkömatriisi

Tulokset – riippuvuutta parhaiten kuvaava copula-funktio

- Estimoitiin SU-menetelmällä erilaisten copula-funktioiden parametrit
- Verrattiin mikä sovitteista vastaa parhaiten empiiristä dataa nk. L^2 -normilla
 - $d_2(C_E, C) = \|C_E - C\|_{L^2}$
- Parhaat sovitteet: t-copula, Gaussinen copula
- Huonoimmat: synteettiset Clayton, Frank ja Gumbel

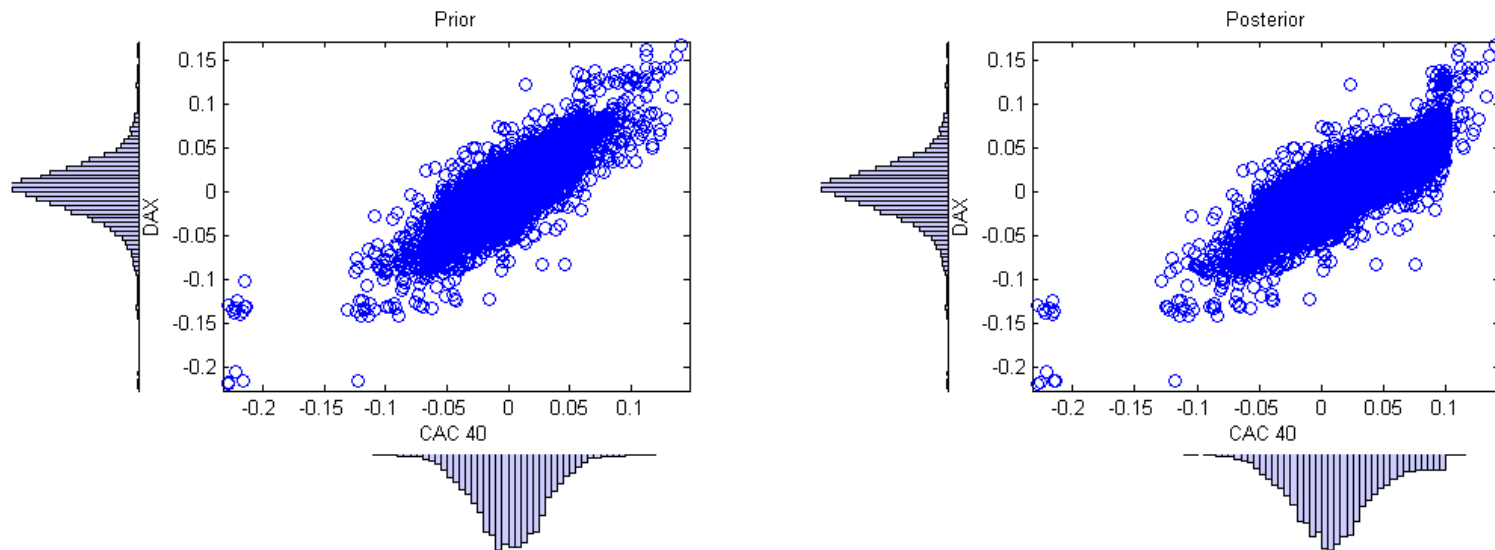
Copula	T (v, ρ)	Gauss (ρ)	Clayton (θ)	Frank (θ)	Gumbel (θ)
Parametri	(4.94,0.85)	0.84	2.37	9.27	2.71
L^2 -normi	2.90	3.25	17.57	7.28	6.58

Tulokset – riippuvuutta parhaiten kuvaava copula-funktio



Tulokset – näkemyksien mukaan muokatut jakaumat

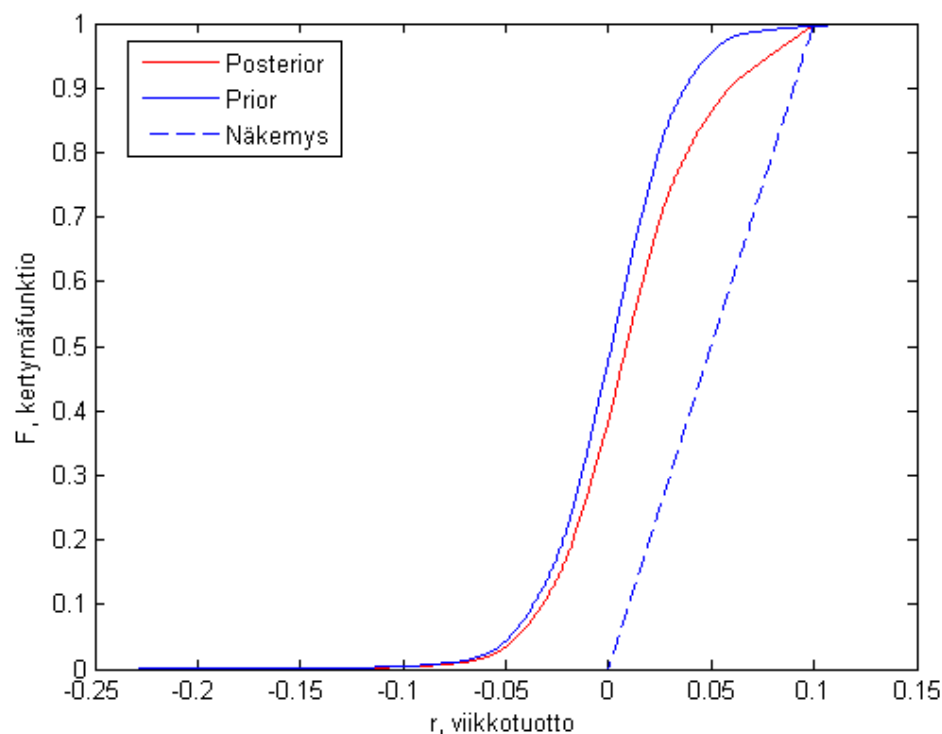
- Lopputulos: näkemyksien mukaan painotetut jakaumat, joita voisi käyttää lähtökohtana esimerkiksi portfolion optimointiin



Tulokset – Prior-, näkemys- ja posterior- jakaumat

- CAC 40-indeksin Prior, näkemys ja posterior samaan kuvaan piirrettynä
 - Luottamustaso $c = 0.2$

Jakauma	Prior	Posterior
Ka.	0.0009	0.0107
Hajonta	0.0312	0.0365
Vinous	-0.4935	-0.0829
Huipuk.	7.3805	4.9609



Huomioita

- Simuloidusta copula-funktiosta yhteisjakaumaan marginaalifunktioiden ydineestimaateilla
 - Voitaisiin myös sovittaa jokin jakauma, esim normaali- tai t-jakauma
 - Ydineestimaatti: ei tarvitse tehdä jakaumaoletusta
- Normaalijakaumaoletus ja normaaliset näkemykset: yhtenevyys Black-Litterman -mallin kanssa

Yhteenveto ja kritiikki

- COP-menetelmällä voidaan yhdistää sijoittajan subjektiiviset näkemykset neutraaliin markkinajakaumaan
- Osaketuottojakaumat eivät ole normaalisia
 - Hienostuneempien mallien (vrt. Markowitz) tutkiminen perusteltua
- Copula-funktiot eivät ole dynaamisia
- Jatkotutkimuskohteita
 - Markkinanäkemyksen muodostaminen
 - Portfolion optimointi posterior-jakaumien perusteella
 - Copula-funktion valinta

Lähteet

- F. Black ja R. Litterman. Global Portfolio Optimization. Financial Analysts Journal, 28-43, 1992.
- V. Durrleman, A. Nikeghbali ja T. Roncalli. *Which Copula is the right one*. 2000
- H. Markowitz. Portfolio Selection. The Journal of Finance, 7(1):77-91, 1952.
- A. Meucci. *Beyond Black-Litterman: Views on non-normal markets*. Risk Magazine, 2005
- M. Stein, R. Fuss ja W. Drobetz. *Fixed-income portfolio allocation including hedge fund strategies: A copula opinion pooling approach*. The Journal of Fixed Income, 2009