Aalto-yliopisto
Perustieteiden
korkeakoulu

Impact of Risk Measures on Asset Allocation and Portfolio Performance (valmiin työn esittely)

Suvi Keränen

03.11.2026

Ohjaaja: *Ahti Salo*

Valvoja: *Ahti Salo*

Työn saa tallentaa ja julkistaa Aalto-yliopiston avoimilla verkkosivuilla. Muilta osin kaikki oikeudet pidätetään.

Aalto-yliopisto
Perustieteiden
korkeakoulu

Tausta

- **Portfolioteoria** = pääoman jakaminen eri sijoituskohteisiin tuotto-odotuksen ja riskin perusteella
  - Korkeamman odotetun tuoton tavoittelu tarkoittaa suurempaa riskiä
  - Hajauttaminen voi pienentää portfolion riskiä
- Sijoitusten tulevat tuotot ovat epävarmoja
- **Portfolion optimointi** = matemaattisten menetelmien hyödyntäminen optimaalisen portfolion valinnan tukena huomioiden päätöksentekijän preferenssit, rajoitteet ja epävarmuustekijät
- Päätöskriteerinä voi olla esim. portfolion riskin minimoiminen asetetulla tuotto-odotusvaatimuksella
- **Riskimitta** = reaaliarvoinen funktio, joka kuvaa päätösvaihtoehdon riskitasoa
  - Portfolion riskin arviointi ja vertailu
  - Eri riskimitat voivat johtaa erilaisiin optimaalisiin portfoliopainoihin

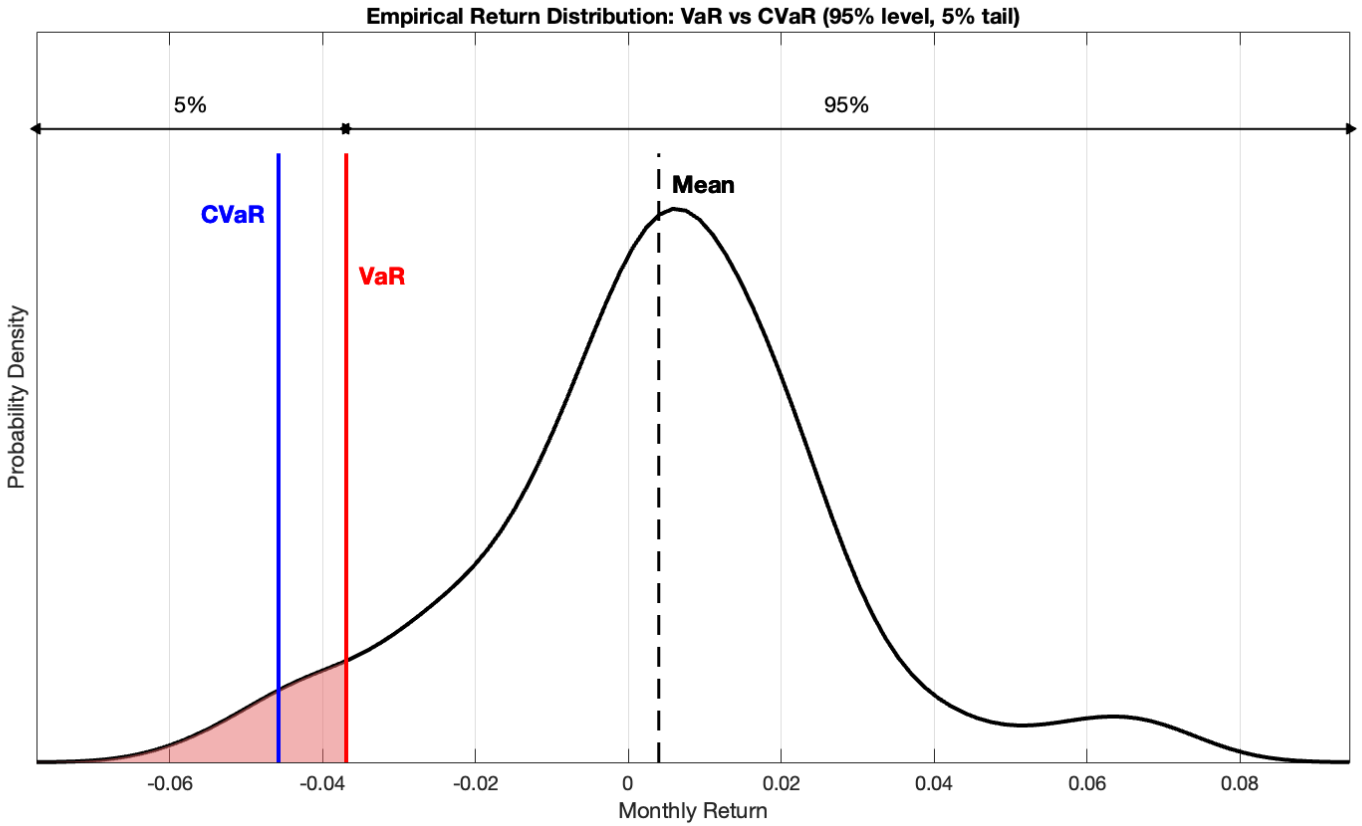
Tausta

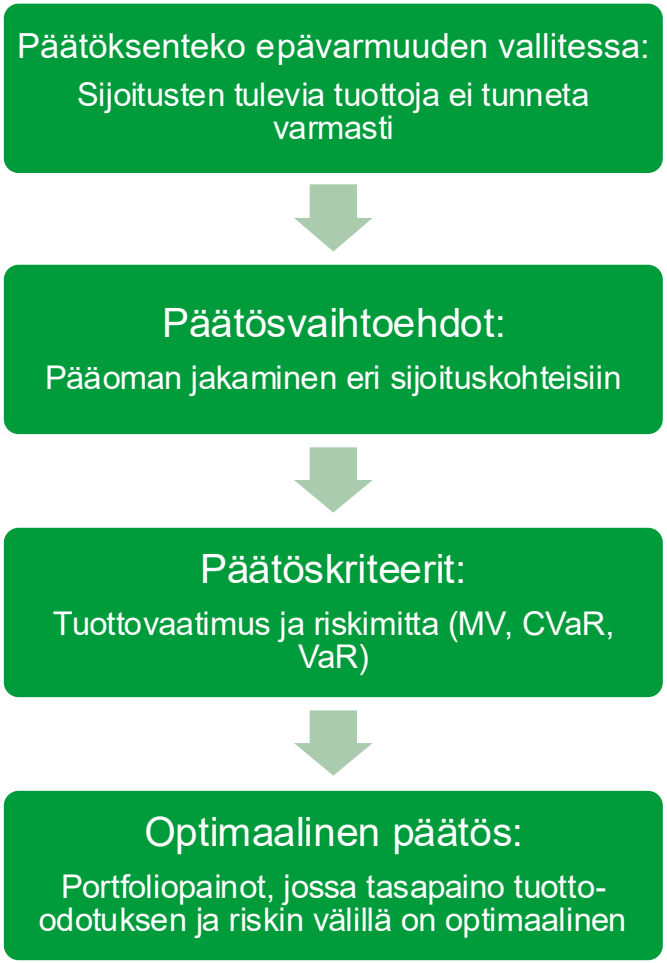
- Markowitzin keskiarvo-varianssi (MV) mallissa riskiä mitataan tuottojen varianssilla (keskihajonnalla)
- Keskihajonnan rajoitteet riskimittana:
  - Tuotot oletetaan normaalijakautuneiksi vaikka tuotoissa esiintyy vinoutta ja paksuja häntiä
  - Ei erottele positiivisia ja negatiivisia poikkeamia odotetusta tuotosta
  - Keskittyy jakauman keskikohtaan, vaikka erityisesti tuottojakauman ääripäät kiinnostavat

Nämä rajoitteet ovat motivoineet tappioriskimittojen kehittämistä:

- **Value-at-Risk** $\mathrm{VaR}_\alpha(\mathrm{X})$ tuotolle X on tappioraja, jonka ylittämisen todennäköisyys on enintään $1-\alpha$ (esim. 5%)
  - VaR ei ole koherentti riskimitta, sillä se ei täytä kaikkia Artzner et al. (1999) määrittelemiä aksioomia esim. subadditiivisuus, joka takaa ettei portfolion riski ylitä sen osien riskien summaa
  - VaR ei kuvaa rajaa ylittävien tappioiden suuruutta
- **Conditional-Value-at-Risk** $\mathrm{CVaR}_\alpha(\mathrm{X})$ tuotolle X on tappioiden odotusarvo jakauman ääripäässä $1-\alpha$, jossa tappio ylittää VaR-rajan
  - CVaR on koherentti riskimitta ja huomioi myös VaR-rajan ylittävien tappioiden suuruuden

CVaR vs VaR


Empirical Return Distribution: VaR vs CVaR (95% level, 5% tail)
5%
95%
CVaR
VaR
Mean
Probability Density
-0.06
-0.04
-0.02
0
0.02
0.04
0.06
0.08
Monthly Return


Päätöksenteko epävarmuuden vallitessa:
Sijoitusten tulevia tuottoja ei tunneta varmasti
Päätösvaihtoehdot:
Pääoman jakaminen eri sijoituskohteisiin
Päätöskriteerit:
Tuottovaatimus ja riskimitta (MV, CVaR, VaR)
Optimaalinen päätös:
Portfoliopainot, jossa tasapaino tuotto-odotuksen ja riskin välillä on optimaalinen

Huomioita kirjallisuudesta

- Markkinadatan sijaan on käytetty simuloituja tuottoja
  - Hyödyt: mahdollistaa suuremman havaintomäärän sekä skenaario- ja stressitestaukset
  - Haitat: tulokset riippuvat mallin oletuksista, jotka eivät välttämättä kuvaa realistisesti ääritappioita tai sijoituskohteiden riippuvuuksia kriisitilanteissa
- Tutkimukset vertailevat usein vain kahta riskimittaa kerrallaan
  - esim. Muñoz & Cifuentes (2025) tutkivat MV vs CVaR, Alexander & Baptista (2004) tutkivat CVaR vs VaR
- Tutkimukset ovat rajoittuneet tiettyyn markkinaan tai omaisuusluokkaan tai jaksoihin, joissa ei ole kriisejä
  - esim. Lim et al. (2011) tarkastelevat Sveitsin osakemarkkinoita vuoden 1999 aineistolla

Tutkimuskysymys

Tutkimuskysymys

Miten riskimitan valinta (keskihajonta, VaR vai CVaR) vaikuttaa omaisuusallokaatioon ja portfolion suorituskykyyn yksijaksoisessa mallissa?

Kontribuutioni

- Kolmen riskimitan empiirinen vertailu samoilla tuottovaatimuksilla ja sijoitusrajoitteilla
- Kahdeksan eri omaisuusluokkia edustavan ETF:n käyttö
- Pitkä tarkastelujakso, johon sisältyy finanssikriisi ja COVID-19 pandemia

Käytettävät aineistot

- 8 ETF-rahastoa neljästä omaisuusluokasta: osakkeet, joukkolainat, hyödykkeet ja kiinteistöt
- Lähde: Refinitiv
- Estimointiaineisto: kuukausituotot vuosilta 2007-2022
- Out-of-sample (OOS) testaus: vuodet 2012-2023



Tunnus	ETF-rahaston koko nimi	Omaisuusluokka
VNQ	Vanguard Real Estate ETF	Kiinteistöt
GLD	SPDR Gold Shares	Hyödykkeet
SPY	SPDR S&P 500 ETF Trust	Osakkeet
IWM	iShares Russell 2000 ETF	Osakkeet
EFA	iShares MSCI EAFE ETF	Osakkeet
LQD	iShares iBoxx $ Investment Grade Corporate Bond ETF	Joukkolainat
IEF	iShares 7–10 Year Treasury Bond ETF	Joukkolainat
EEM	iShares MSCI Emerging Markets ETF	Osakkeet

Menetelmät + Rajaukset

- Portfoliot optimoidaan edeltävän viiden vuoden kuukausituottojen perusteella
- Vertaillaan kolmea eri optimointimenetelmää, joissa riskimittoina keskihajonta, VaR ja CVaR
- Optimoidaan kolmella vuosittaisella tuottovaatimuksella 7%, 9% ja 11% (herkkyysanalyysi)
- Portfolion out-of-sample (OOS) suoriutuminen arvioidaan seuraavan vuoden toteutuneilla tuotoilla
- Buy and Hold strategy: portfoliot muodostetaan vuosittain ilman vuoden sisäistä uudelleenpainotusta
- Ei lyhyeksi myyntiä eikä transaktiokustannuksia

Optimointimallien toteutus – MV

- Kvadraattinen ohjelmointitehtävä (QP)
- Minimoidaan portfolion odotetun tuoton keskihajonta ehdoilla, että portfolion odotettu tuotto $E(r_p)$ on vähintään tuottovaatimus μ_0:

Tavoitefunktio

$$\min \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} w_i w_j \qquad \sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(r_i, r_j)$$

Rajoitteet

$$\sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i \geq \mu_0 \qquad \mu_i = E[r_i]$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

$$w_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots N$$

missä w_i, w_j ovat sijoituskohteiden i and j painot portfoliossa, μ_i on odotettu tuotto (historiallinen data), σ_{ij} on sijoituskohteiden tuottojen kovarianssi (historiallinen data) ja N on sijoituskohteiden lukumäärä

- Tuloksena tuottovaatimusta μ_0 vastaavat optimiportfoliopainot w* = $(w_1^*, w_2^*, \ldots, w_N^*)$
- Toistamalla optimointi eri μ_0 arvoilla saadaan tehokas rintama, jossa tuoton ja riskin yhdistelmä on optimaalinen

Optimointimallien toteutus – CVaR

- CVaR-minimointi voidaan esittää lineaarisena optimointitehtävänä (Rockafellar & Uryasev, 2000)
- Historiallisia kuukausituottoja käytetään skenaarioina s = 1,…,S
- Portfolion tappio skenaariossa s on $L_s(w) = -r_s^T w$
- Epälineaarinen maksimitermi CVaR-apufunktiossa $\tilde{F}_\alpha(w,\gamma)$ korvataan apumuuttujalla z_s

Alkuperäinen apufunktio

$$CVaR_\alpha(w) = min\ \tilde{F}_\alpha(w,\gamma) \text{ missä}$$

$$\tilde{F}_\alpha(w,\gamma) = \gamma + \frac{1}{(1-\alpha)}\sum_{s=1}^{S} p_s \max(L_s(w) - \gamma, 0)$$

Lineaarinen optimointimalli (LP)

$$\min\ \gamma + \frac{1}{(1-\alpha)}\sum_{s=1}^{S} p_s z_s$$

Rajoitteet

$$z_s \geq L_s(w) - \gamma$$

$$z_s \geq 0 \qquad s = 1, \dots, S$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i \geq \mu_0 \qquad \sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \qquad w_i \geq 0$$

Missä apumuuttujat γ on VaR-kynnys ja z_s on kynnyksen ylittävä tappio, p_s on skenaarion todennäköisyys ja α luottamustaso

- Tuloksena tuottovaatimusta μ_0 vastaavat optimiportfoliopainot w* sekä VaR-kynnys γ^*

Optimointimallien toteutus – VaR

- VaR on kvantiiliin perustuva, yleisesti epäkonveksi riskimitta, jonka suora minimointi on laskennallisesti haastavaa
- Historiallinen VaR-minimointi muotoillaan sekalukumuotoiseksi lineaariseksi optimointitehtäväksi (MILP) Big-M-menetelmällä
- Käytetään binäärimuuttujia $b_s \in \{0,1\}$
  - $b_s = 0$: skenaarion tappio ei saa ylittää VaR-kynnystä
  - $b_s = 1$: VaR-kynnyksen ylitys sallitaan skenaariossa s (Big-M menetelmä)
- Luottamustasolla $\alpha = 0.95$ enintään 5% historiallisista skenaarioista saa ylittää VaR-kynnyksen

Tavoitefunktio

$$\min_{w,\,\gamma,\,b} \gamma$$

Rajoitteet

$$L_s(w) - \gamma \leq M_s \cdot b_s \qquad s = 1, \ldots, S$$

$$\sum_{s=1}^{S} b_s \leq \lfloor (1-\alpha)\, S \rfloor \qquad b_s \in \{0,1\}$$

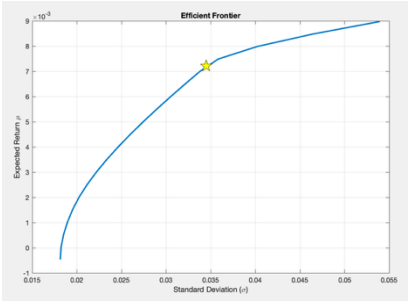
$$\sum_{i=1}^{N} w_i \mu_i \geq \mu_0 \qquad \sum_{i=1}^{N} w_i = 1 \qquad w_i \geq 0$$

Missä $L_s(w) = -r_s^T w$ on portfolion tappio skenaariossa s, γ on VaR-kynnys ja M_s on riittävän suuri skenaariokohtainen vakio (Big-M)

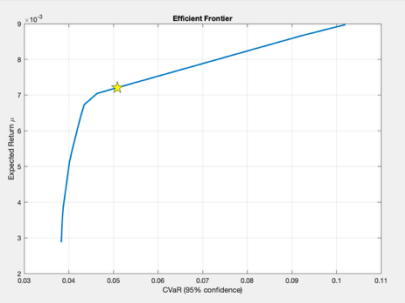
- Tuloksena tuottovaatimusta μ_0 vastaavat optimiportfoliopainot w* sekä optimaalinen VaR-kynnys γ^*

Tulokset – Tehokkaat rintamat

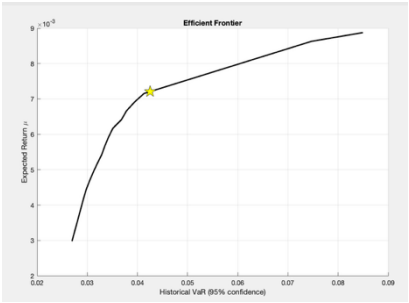
- MV: rintama muodostaa perinteisen kaaren, joka kuvaa tuoton ja keskihajonnan välistä suhdetta



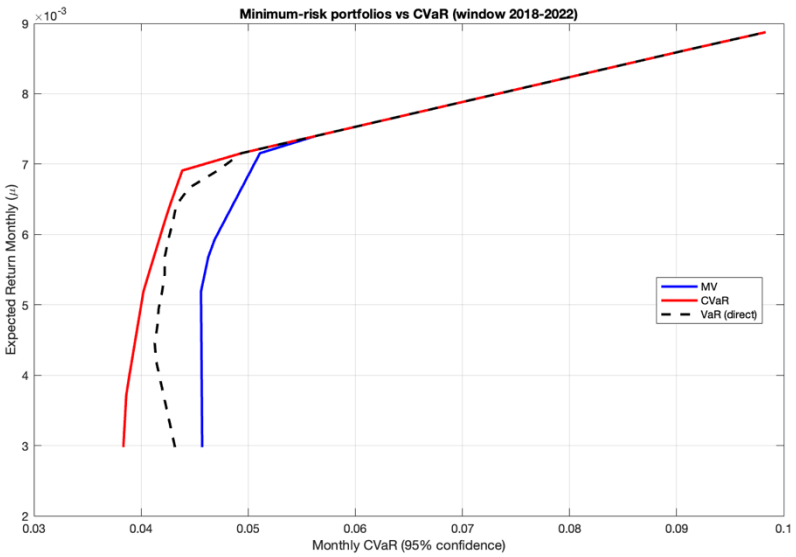
- CVaR: rintama on aluksi jyrkkä, jolloin odotettu tuotto kasvaa suhteellisen nopeasti häntäriskin kasvun nähden



- VaR: rintamassa esiintyy kulmakohtia, jotka voivat johtua historiallisen kvantiilin epäkonveksisuudesta ja optimaalisten portfoliopainojen vaihtumisesta



Tulokset – Yhdistetyt tehokkaat rintamat



- Vertailukelpoisuus: kaikkien kolmen optimoidut portfoliot arvioidaan samalla riskimitalla ($CVaR_{95\%}$)
- Matalammilla tuottotasoilla CVaR- ja VaR-pohjaiset mallit saavuttavat saman odotetun tuoton pienemmällä häntäriskillä kuin MV-malli
- Korkeammilla tuottotavoitteilla erot pienevät ja rintamat lähestyvät toisiaan:
  - tuottovaatimuksen kasvaessa mahdollisuudet vähentää riskiä hajauttamalla pienenevät

Tulokset – Optimipainot $\mu_0 = 7\%$



- Portfoliot painottuvat valtionlainoihin (IEF), Yhdysvaltain osakkeisiin (SPY + IWM) ja kultaan (GLD)
- Sijoituspainot jakautuvat useammalle sijoituskohteelle
- IEF paino on korkea useimpina vuosina mutta pienenee voimakkaasti vuonna 2019
- Riskimitan valinta vaikuttaa optimaalisiin painoihin: erityisesti VaR-optimointi tuottaa MV- ja CVaR malleista poikkeavia allokaatioita

Tulokset – Optimipainot $\mu_0 = 9\%$



- SPY paino kasvaa ja IEF pienenee verrattuna 7% tuottotavoitteeseen
- Portfoliot painottuvat aiempaa enemmän osakkeisiin, mikä lisää sijoitusten keskittymistä
- VaR-optimointi antaa ajoittain suuremman painon pienyhtiöosakkeille (IWM) ja kiinteistösijoituksille (VNQ) kuin MV- ja CVaR-optimointi

Tulokset – Optimipainot $\mu_0 = 11\%$



- SPY hallitsee portfolioita ja sen paino kasvaa verrattuna 7% ja 9% tuottotavoitteisiin
- IEF paino pienenee verrattuna ja sijoitukset keskittyvät entistä enemmän osakkeisiin
- VaR-optimointi painottaa ajoittain enemmän pienyhtiöosakkeita (IWM) ja kiinteistösijoituksia (VNQ) kuin MV- ja CVaR-optimointi
- Optimointimenetelmien välillä on edelleen eroja, vaikka SPY on kaikkein portfolioiden keskeinen sijoituskohde

Tulokset – Out-of-Sample (OOS) suoriutuminen

Table 3: Average annual out-of-sample performance 2012–2023, $\mu_0 = 7\%$.

Metric	σ (MV)	$\text{VaR}_{5\%}$	$\text{CVaR}_{5\%}$
Return	0.051	0.053	0.048
Standard deviation	0.078	0.080	0.080
$\text{CVaR}_{5\%}$	−0,046	−0,045	−0,046
Sharpe ratio	0.652	0.665	0.599
Sortino ratio	1.040	1.076	0.976

Table 4: Average annual out-of-sample performance 2012–2023, $\mu_0 = 9\%$.

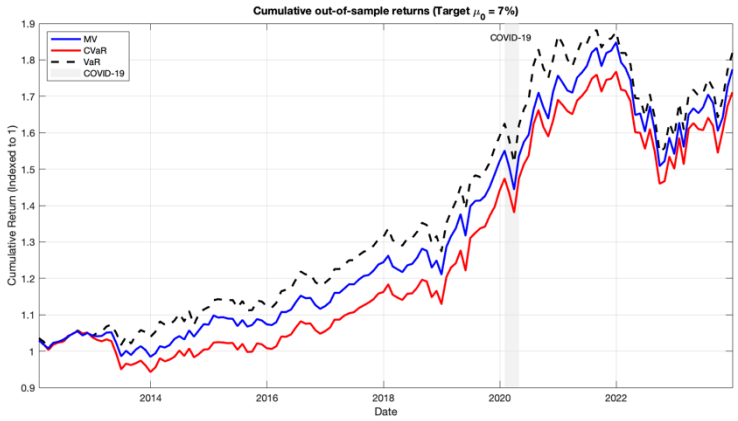
Metric	σ (MV)	$\text{VaR}_{5\%}$	$\text{CVaR}_{5\%}$
Return	0.063	0.072	0.059
Standard deviation	0.095	0.096	0.095
$\text{CVaR}_{5\%}$	−0.055	−0.052	−0.054
Sharpe ratio	0.667	0.749	0.618
Sortino ratio	1.075	1.256	1.004

Table 5: Average annual out-of-sample performance 2012–2023, $\mu_0 = 11\%$.

Metric	σ (MV)	$\text{VaR}_{5\%}$	$\text{CVaR}_{5\%}$
Return	0.074	0.077	0.071
Standard deviation	0.112	0.111	0.111
$\text{CVaR}_{5\%}$	−0.066	−0.063	−0.064
Sharpe ratio	0.658	0.695	0.642
Sortino ratio	1.067	1.147	1.050

- Tuotto-riskisuhde: tuottotavoitteiden kasvaessa sekä toteutuneet tuotot että riskitasot (keskihajonta ja $CVaR_{5\%}$) kasvavat
- VaR-optimointi saavuttaa korkeimmat toteutuneet tuotot ja Sharpe sekä Sortino luvut erityisesti 9% tuottotavoitteella
- MV-malli tuotti suurimmat häntäriskit
- Menetelmien väliset volatiliteettierot ovat pieniä
- Riskimitan valinta vaikuttaa portfolion suorituskykyyn mutta erot eri menetelmien välillä ovat pääosin maltilliset

Tulokset – Out-of-Sample (OOS) tuotot kriisiperiodilla



- VaR-portfolion kumulatiivinen tuotto on pääosin korkein vuosien aikana
- COVID-19 kriisin aikana MV- ja CVaR-portfolioiden kumulatiivisten tuottojen välinen ero kaventui
  - MV-portfolio kärsi suhteellisesti suurempia tappioita kriisin aikana
- Vuonna 2022 kaikkien portfolioiden arvot laskevat selvästi eikä mikään menetelmä täysin suojaa markkinoiden laskulta
- CVaR-portfolion kumulatiivinen tuotto jää muita alhaisemmaksi suurimman osan tarkastelujaksosta

Tulosten tarkastelu

Keskeiset havainnot

- Riskimitan valinta vaikuttaa portfolion optimaaliseen allokaatioon erityisesti osakkeiden ja joukkolainojen painotukseen
- Tuottovaatimuksen kasvaessa osakkeiden paino kasvaa ja portfoliot keskittyvät enemmän osakesijoituksiin
- VaR-optimointi saavutti pääosin korkeammat OOS-tuotot ja Sharpen ja Sortinon luvut
- Menetelmien väliset volatiliteettierot ovat pieniä
- CVaR- ja VaR-pohjaiset mallit tuottivat hieman pienemmän häntäriskin

Tutkimuksen rajoitteet

- Vähäinen havaintomäärä: 5 vuoden estimointi-ikkuna sisältää 60 kuukausihavaintoa, jolloin 5% häntäriski perustuu noin 3 havaintoon
- Estimointiepävarmuus: Historiallisten tuottojen perusteella optimoidut painot voivat olla herkkiä yksittäisille havainnoille
- Mallin rajaukset: yhden periodin optimointi, vuosittainen Buy and Hold –strategia sekä transaktiokustannusten poisjättäminen
- Yleistettävyys: tulokset riippuvat valituista ETF-rahastoista, estimointi-ikkunan pituudesta ja tuottovaatimuksesta

Jatkokehitys

- Laajempi aineisto esim. pidempi estimointi-ikkuna tai tiheämpi havaintoväli
- Moniperiodinen optimointi, jossa huomioidaan transaktiokustannukset ja portfolion uudelleenpainotukset
- Robusti optimointi, joka huomioi historialliseen aineistoon perustuvien estimaattien epävarmuudet (estimointisikin)
- Vertailun laajentaminen stokastisen dominanssin kriteereihin ja muihin koherentteihin riskimittoihin

Lähteet

Alexander, G. J., & Baptista, A. M. (2004). A Comparison of VaR and CVaR Constraints on Portfolio Selection with the Mean-Variance Model. *Management Science, 50(9)*, 1261–1273. http://www.jstor.org/stable/30046232

Jorion, P. (1992). Portfolio Optimization in Practice. *Financial Analysts Journal, 48(1),* 68–74. http://www.jstor.org/stable/4479507

Jorion, P. (1996). Risk2: Measuring the Risk in Value at Risk. *Financial Analysts Journal*, *52*(6), 47–56. http://www.jstor.org/stable/4479959

Lim, A. E., Shanthikumar, J. G., & Vahn, G. Y. (2011). Conditional Value-at-Risk in Portfolio Optimization: Coherent but Fragile. *Operations Research Letters, 39(3),* 163-171.

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance, 7(1),* 77–91. https://doi.org/10.2307/2975974

Markowitz, H. M. (1991). Foundations of Portfolio Theory. *The Journal of Finance*, *46(2),* 469–477. https://doi.org/10.2307/2328831

Markowitz, H. M. (2010). Portfolio Theory: As I Still See It. *Annual Review of Financial Economics*, *2*, 1–23. http://www.jstor.org/stable/42940208

Muñoz, I., & Cifuentes, A. (2026). Portfolio Optimization: Do Risk Metrics Matter?. *Finance Research Open,* 100098.

Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000). Optimization of Conditional Value-at-Risk. *Journal of Risk, 2*, 21-42.

Salo, A., Doumpos, M., Liesiö, J., & Zopounidis, C. (2024). Fifty years of Portfolio Optimization. *European Journal of Operational Research, 318(1),* 1-18.