

Cubature Integration Methods in Non-Linear Kalman Filtering and Smoothing

(valmiin työn esittely)

Arno Solin

Ohjaaja: TkT Simo Särkkä
Valvoja: Prof. Harri Ehtamo

13.9.2010



Esityksen rakenne

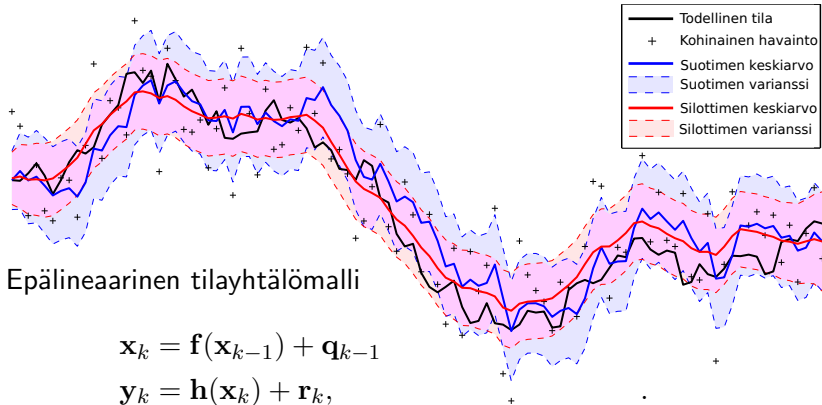
- ▶ Työn tavoitteet
- ▶ Työn rakenne
- ▶ Suodatuksesta integraaleihin
- ▶ Gaussisten integraalien ratkaiseminen kubatuurisäännöillä
- ▶ Kaksi kubatuurimenetelmää
- ▶ Gaussiset approksimaatiot suodatuksessa
- ▶ Kubatuuri-Kalman-suodatus
- ▶ Havainnollistava esimerkki
- ▶ Yhteenveto

Työ tehtiin Aalto-yliopiston Lääketieteellisen tekniikan ja laskennallisen tieteen laitoksen Laskennallisten kompleksisten systeemien tutkimuksen huippuyksikössä.

Työn tavoitteet

- i Toistaa alalla aiemmin saadut tulokset.
- ii Yhtenäistää erilaisten epälineaaristen suodatusmenetelmien esitystapa.
- iii Tarkastella kubatuuri-Kalman-suodinta (CKF) hajustamattoman Kalman-suotimen (UKF) erikoistapauksena.

Kalman-suodin pähkinäkuoressa



Epälineaarinen tilayhtälömalli

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) + \mathbf{q}_{k-1}$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{r}_k,$$

missä \mathbf{x}_k on tila ja \mathbf{y}_k on mittaus. $\mathbf{q}_{k-1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$ ja $\mathbf{r}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$ ovat gaussisia kohinatermejä.

Mihin niitä integrointimenetelmiä tarvitaan?

- ▶ Lineaarinen suodatusongelma voidaan ratkaista suljetussa muodossa.
- ▶ Epälineaarisen tila- tai mittausmallin tapauksessa joudutaan keksimään **aproksimatiivisia menetelmiä**.
- ▶ Tarkastellaan tässä niin sanottua **oletetun tiheyden (Assumed Density Form)** muotoon kirjoitettua yleistystä epälineaarista suodatuksesta.
- ▶ Käytännössä laskeminen kaatuu tällöin muutaman gaussisen integraalin ratkaisemiseen. Toisin sanoen:

$$\mathbf{m}_{k|k-1} = \int \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k-1}) \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{m}_{k-1|k-1}, \mathbf{P}_{k-1|k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}$$

Gaussisten integraalien ratkaiseminen

- ▶ Kubatuurisäännöt yleistävät yksiulotteiset kvadratuurisäännöt moniulotteisiksi kubatuurisäännöiksi:

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^m w_i \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$$

- ▶ **Tulopohjainen** kubatuurisääntö yksinkertaisesti monistaa pistehilan useaan ulottuvuuteen (**tyhmää, paljon pisteitä**).
- ▶ Toinen vaihtoehto on käyttää jotain **fiksuja menetelmiä** pisteiden määrän vähentämiseen.

Kaksi kubatuuri-integrointimenetelmää

Gauss–Hermite-kubatuurisääntö

- ▶ Perustuu Gauss–Hermite-kvadratuurisäännön yleistämiseen karteesisen tulon avulla.
- ▶ Vaatii p^n **evaluointipistettä**, missä p on approksimaation aste ja n ulottuvuuksien määrä.



$n=2$

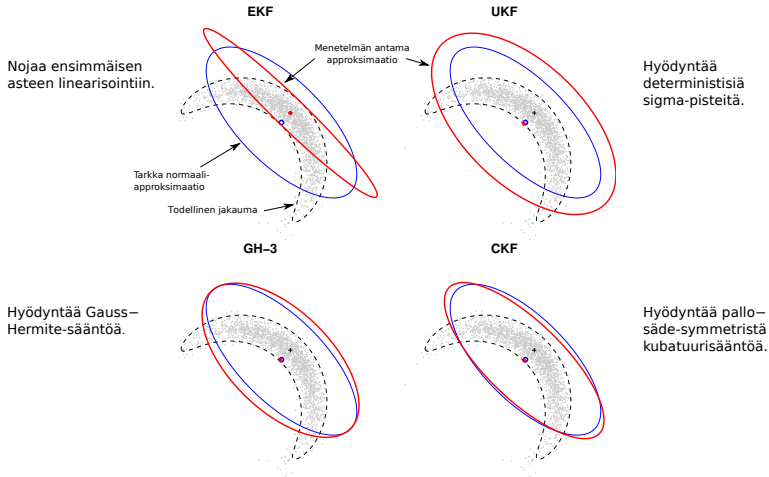
Pallo–säde-symmetrinen kubatuurisääntö

- ▶ Perustuu integraalin jakamiseen kahtia ja symmetrioiden hyödyntämiseen Sobolevin invarianssiteorian kautta.
- ▶ Vaatii $2n$ **evaluointipistettä**, missä n ulottuvuuksien määrä.

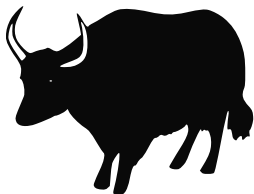


$n=2$

Gaussiset approksimaatiot suodatuksessa



Kubatuuri-Kalman-suodatus



Gauss–Hermite–Kalman-suodin (GHKF) ja **Gauss–Hermite–Rauch–Tung–Striebel-silotin** (GHRTS).

- ▶ Luotettava
- ▶ Hallittavissa
- ▶ Hidas



(Pallo–säde-symmetrinen)
Kubatuuri–Kalman-suodin (CKF)
ja **Kubatuuri–Rauch–Tung–Striebel-silotin** (CRTS).

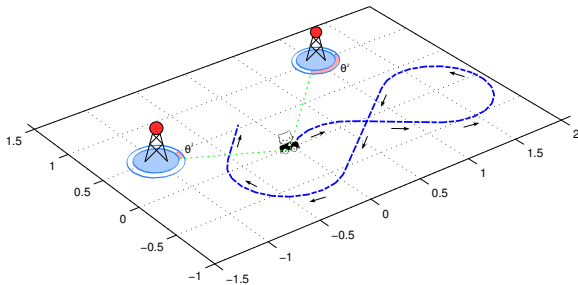
- ▶ Luotettava
- ▶ Nopea
- ▶ Naamion alta paljastui hajustamaton Kalman-suodin (UKF)

Systemianalyysin

Laboratorio

Aalto-yliopiston teknillinen korkeakoulu

Havainnollistava esimerkki



	Paikka		Nopeus		Kääntymiskulma		Funktio- evaluaatioita
	Suodin	Silotin	Suodin	Silotin	Suodin	Silotin	
EKF	0.0696	0.0237	0.5099	0.1262	42.0297	22.1552	6
UKF	0.0669	0.0233	0.4939	0.1234	41.8408	22.1308	11
GHKF	0.0669	0.0233	0.4939	0.1234	41.8330	22.1266	243
CKF	0.0669	0.0233	0.4943	0.1235	41.8406	22.1263	10

Yhteenveto tuloksista

- ▶ Kumpikaan työssä tarkasteltu menetelmä ei vaadi derivaattojen laskemista suljetussa muodossa tai aseta jatkuvuus- tai derivoituvuusvaatimuksia funktioille. **(Hyvä juttu!)**
- ▶ Gauss–Hermite-menetelmä kärsii **dimensionaalisuuden kirouksesta**; vaadittujen pisteiden määrä kasvaa eksponentiaalisesti ulottuvuuksien määrän mukaan.
- ▶ Pallo–säde-syymetrisessä kubatuurisäännössä (CKF) pisteiden määrä kasvaa lineaarisesti ulottuvuuksien määrän mukaan. **(Hyvä juttu!)**
- ▶ CKF palautuu aiemmin tunnetun – ja aivan toisin johdetun – UKF-menetelmän erikoistapaukseksi. **(Mielenkiintoista!)**

Kiitoksia.