Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu

Fundamental Theorems of Asset Pricing (FTAP) in Discrete Time (valmiin työn esittely)

Panu Salonen

15.9.2025

Ohjaaja: *Jonas Tölle*

Valvoja: *Jonas Tölle*

Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu

Rahoitusteoreettinen tausta työnaiheelle

- Yleisesti rahoitusteorialla on pyrkimys hinnoitella erilaisia omaisuuseriä, keskiössä erityisesti optioiden hinnoittelu.
- Optiot ovat johdannaissopimuksia, jotka antavat ennalta määrättynä ajankohtana haltijalleen oikeuden, mutta ei velvollisuutta, toteuttaa option määrittelemä transaktio.
- Ideaalitilanteessa kaikkien omaisuuserien hinnoittelu markkinoilla olisi yksiselitteistä, mutta epävarmuuksien huomioiminen hinnoittelussa on haastavaa, varsinkin jatkuvassa ajassa.

Rahoitusteoreettinen tausta työnaiheelle

- Diskreettiaikaiset mallit toimivat perustana matemaattisesti vaikeammille jatkuvan ajan markkinakuvauksille.
- Markkinamallien järkevyyden perusehtona pidetään arbitraasivapaan hinnoittelun periaatteen toteutumista.
- Tällaiset markkinamallit eivät salli markkinatoimijan tehdä voittoa markkinoilla nollaa suuremmalla todennäköisyydellä ilman alkupääomaa tai tappion mahdollisuutta.
- FTAP:t yhdistävät diskreeteille markkinamalleille arbitraasivapauden ja ekvivalentin martingaalimitan (EMM) olemassaolon (I) sekä markkinan täydellisyyden ja EMM ainutkertaisuuden (II).

Tavoitteet

- Työn tavoitteena oli määritellä matemaattista notaatiota hyödyntäen lauseiden kannalta keskeisiä käsitteitä kuten: itserahoittava portfolio, arbitraasi, EMM/riskineutraalimitta ja markkinoiden täydellisyys.
- Esitellä FTAP:t matemaattisesti ja selittää niiden merkitystä optioiden riskineutraalissa hinnoittelussa diskreettiaikaisissa malleissa.
- Esittää molemmille lauseille pääpiirteiset todistukset ja tulkita niiden seurauksia.
- Havainnollistaa lauseiden tuloksia yksinkertaisilla hinnoittelumalleilla.

Matemaattisia perusteita

- **Filtteröity todennäköisyysavaruus:** $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0}^{T}, P)$

=Todennäköisyysavaruuteen on liitetty sarja kasvavia σ-algebroja $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,\ldots,T}$, jotka mallintavat informaation kertymistä.

- **Mitallisuus:**

=Kuvaus T:X→X′ kahden mitallisen avaruuden (X,A) ja (X′,A′) välillä on A/A'-mitallinen, jos jokaisen mitallisen joukon alkukuva on myös mitallinen joukko. Matemaattisesti tämä tarkoittaa:

$$T^{-1}(A') \in \mathcal{A} \quad \forall A' \in \mathcal{A}'$$

Matemaattisia perusteita

- **Satunnaismuuttuja** on siis mitallinen kuvaus todennäköisyysavaruudesta mihin tahansa mitalliseen avaruuteen, yleensä reaalilukujen joukkoon, joka on varustettuna luonnollisella Borelin σ-algebralla.
- Työn mallin tarkoituksia varten satunnaismuuttuja X on mitallinen σ-algebra F:n suhteen, jos funktio ω→X(ω) on vakio jokaisessa σ-algebra F:ää vastaavassa osituksen osajoukossa [3]: $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} \in \mathcal{F}$.

Markkinamallin määrittäminen

- **Omaisuuserät:** Yksi riskitön omaisuuserä ja N riskillistä omaisuuserää.
- **Hinnat:** Mallinnettiin (filtraatioon) adaptoituina stokastisina prosesseina $(S_t^i)_{t=0}^T$ for $i = 1, \ldots, N.$ eli hinnat ovat $\mathcal{F}_t$ -mitallisia jokaiselle t.
- **Kaupankäyntistrategia** ϕ **:** Ennustettava prosessi, N+1 ulottuvuuden reaalivektori, jonka komponentit kuvaavat portfolion omistuksien määriä aikavälillä $(t-1, t]$.
- **Itserahoittava portfolio:** Portfolion arvon muutos johtuu vain omaisuuserien hintojen muutoksista, ei ulkoisesta rahoituksesta:

$$\phi_t S_t = \phi_{t+1} S_t$$

Tärkeimpien käsitteiden määritelmät

- **Johdannaisvaade (C):** Rahoitussopimus, jonka arvo määräytyy maailman tilan perusteella sovitulla hetkellä.

Määritelmä (Eurooppalainen johdannaisvaade): Johdannaisvaade, jonka maturiteetti on T, on satunnaismuuttuja avaruudella $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ [2]:

$$C : \Omega \to \mathbb{R}_+, \text{ missä C on } \mathcal{F}_T\text{-mitallinen.}$$

- Eurooppalaisen vaateen tuotto määräytyy viimeisellä ajan hetkellä T.
- Tapauksissa, joissa tuotto riippuu kohde-etuutena olevien arvopaperien hinnoista, vaadetta kutsutaan kohde-etuutena olevien arvopaperien johdannaiseksi.

Tärkeimpien käsitteiden määritelmät

- **Arbitraasi** diskreetissä markkinamallissa:

Arbitraasimahdollisuus on olemassa, kun on olemassa itseään rahoittava kaupankäyntistrategia ϕ, jonka arvoprosessi $V_t(\phi)$ toteuttaa seuraavat ehdot [2]:

1. $V_0(\phi) \leq 0$ (alkusijoitus on nolla tai negatiivinen).
2. $V_T(\phi) \geq 0$ P-m.v. (horisontissa ei ole riskiä rahan menettämisestä).
3. $P(V_T(\phi) > 0) > 0$ (positiiviselle voitolle on aidosti positiivinen todennäköisyys).

Markkinamallia, joka ei salli tällaisia arbitraasimahdollisuuksia, sanotaan arbitraasittomaksi [1].

Tärkeimpien käsitteiden määritelmät

- Rahoitusmarkkinamallia sanotaan **täydelliseksi**, jos jokainen johdannaisvaade (tässä työssä eurooppalainen) on replikoitavissa.
- Johdannaisvaadetta C kutsutaan saavutettavaksi tai **replikoitavaksi**, jos on olemassa itseään rahoittava kaupankäyntistrategia, siten että arvoprosessin loppuarvo on yhtä suuri kuin johdannaisvaateen arvo C lähes varmasti todennäköisyysmitan P suhteen:

$$V_T(\phi) = \bar{\phi}_T \bar{S}_T = V_0 + \sum_{k=1}^{T} \phi_k \cdot (S_k - S_{k-1}) = C \quad (P\text{-m.v.}) \ .$$

Ensimmäinen peruslause (FTAP I)

- **Lause:** Markkinamalli on arbitraasivapaa, jos ja vain jos on olemassa ekvivalentti martingaalimitta (EMM), Q.
- **Mikä on EMM?**

Määritelmä (Ekvivalentit mitat): Kaksi todennäköisyysmittaa Q ja P avaruudella $(\Omega, \mathcal{F})$ ovat **ekvivalentteja**(merkitään $Q \approx P$), jos niillä on samat nollajoukot: mille tahansa tapahtumalle $A \in \mathcal{F}$ pätee, että $Q(A) = 0$ jos ja vain jos $P(A) = 0$.

Oletetaan, että todennäköisyysmitat Q ja P ovat ekvivalentteja ($Q \approx P$) ja merkitään Radon-Nikodym-derivaattaa $Z = dQ/dP$. Voidaan osoittaa, että satunnaismuuttuja X on Q-integroituva ($E_Q[|X|] < \infty$) jos ja vain jos tulo XZ on P-integroituva. Tällöin odotusarvo mitan Q suhteen voidaan laskea seuraavasti [1]:

$$E_Q[X] = E_P[X \cdot Z]$$

  - **Martingaali:** Diskontatut omaisuuserien hinnat $\tilde{S}_t$ ovat martingaaleja mitan Q suhteen:

$$E_Q[\tilde{S}_{t+1} | \mathcal{F}_t] = \tilde{S}_t \quad \text{ja} \quad E_Q[\tilde{S}^i_{t+1} | \mathcal{F}_t] < \infty \text{ kaikilla } 0 \le t \le T, i = 0, \ldots N \;.$$

Riskineutraali hinnoittelu seurauksena peruslauseesta (FTAP I)

- Ensimmäinen peruslause oikeuttaa **riskineutraalin hinnoittelun**.
- Johdannaisvaateen C arbitraasivapaa hinta hetkellä t on sen odotettu diskontattu tuleva tuotto mitan Q suhteen:

$$\Pi_t(C) = E_Q\left[\frac{S_t^0}{S_T^0} C \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

- Epätäydellisillä markkinoilla kyseinen joukko saattaa sisältää useamman alkion.
- Vaateen hinta ei riipu fyysisistä todennäköisyyksistä (P) eikä sijoittajien riskinottohalukkuudesta.

Johdannaisvaateet ja markkinan täydellisyys

- Johdannaisvaateiden hinnoittelun keskeinen ongelma on määrittää tällaiselle vaateelle oikea hinta minä tahansa hetkenä ennen maturiteettia.
- Toinen ongelma on selvittää, onko olemassa hyväksyttävää kaupankäyntistrategiaa, jonka arvoprosessi päätyy samaan arvoon kuin johdannainen maturiteettihetkellä.

Toinen peruslause (FTAP II)

- **Lause:** Arbitraasivapaa markkina on täydellinen, jos ja vain jos ekvivalentti martingaalimitta (EMM) on yksikäsitteinen.
- **Tulkinta:** Kyky suojautua täydellisesti kaikilta (markkina)riskeiltä on matemaattisesti sama asia kuin se, että hinnoittelulle on olemassa vain yksi riskineutraalimitta.

Toisen peruslauseen seurauksia

- Täydellisillä ja arbitraasittomilla markkinoilla jokaisella johdannaisvaateella on yksikäsitteinen hinta, jonka määrittää riskineutraali hinnoittelukaava käyttäen yksikäsitteistä EMM Q:ta.
- Tämä johtuu siitä, että jokainen vaade on replikoitavissa, jolloin niiden hinta on oltava arbitraasittomuusargumentin perusteella replikointikustannus.
- Tällöin kaikki rahoitusriskit voidaan suojata täydellisesti käymällä dynaamisesti kauppaa kohde-etuuksilla.

Esimerkki 1: Binomimalli

- Yksinkertainen yhden periodin malli, jossa kaupankäynnin kohteena osake ja riskitön sijoitus. Osakkeen hinta voi nousta **(u)** tai laskea **(d)**. Markkinoilla riskitön tuotto **(r)** yhden periodin aikana.
- Riskineutraalitodennäköisyys **(q)** on matemaattisesti johdettu todennäköisyys hinnan nousulle tapauksessa, jolloin markkina on arbitraasiton.

Martingaaliehto on $E_Q[\tilde{S}_1] = \tilde{S}_0$, josta saadaan:

$$\frac{S_0}{S_0^0} = E_Q\left[\frac{S_1}{S_1^0}\right] \implies S_0 = \frac{1}{1+r}[q \cdot (S_0 u) + (1-q) \cdot (S_0 d)]$$

Ratkaisemalla q saadaan yksikäsitteinen ratkaisu:

$$q = \frac{(1+r) - d}{u - d}$$

- **Arbitraasivapauden ehto:** d<1+r<u.
- **Johtopäätös:** Koska EMM on olemassa ja se on yksikäsitteinen, binomimalli on **arbitraasivapaa ja täydellinen**.

Esimerkki 2: Trinomimalli

- Osakkeen hinta voi nousta (u), pysyä samana (m) tai laskea (d). (r) ja (q), kuten edellisessä.
- Nyt on kolme mahdollista tilaa, mutta edelleen vain kaksi sijoituskohdetta.
- Hintojen martingaaliehto johtaa yhtälöryhmään, jolla ei ole yksikäsitteistä ratkaisua riskineutraaleille todennäköisyyksille.

$$q_u u + q_m m + q_d d = 1 + r$$
$$q_u + q_m + q_d = 1$$

- **Johtopäätös:** Trinomimalli on **arbitraasivapaa, mutta epätäydellinen**. Kaikkia riskejä ei voi suojata.

Pohdinta ja rajoitukset

- Diskreettiaikainen malli on idealisaatio.
- Aidoilla markkinoilla on lisäksi muun muassa:
  - Jatkuva kaupankäynti
  - Transaktiokustannuksia
  - Markkinoiden kitkatekijöitä
- Nämä tekijät monimutkaistavat yksinkertaista arbitraasivapaata viitekehystä ja arbitraasin käsitettä täytyy vahventaa.
- Diskreetti malli tarjoaa kuitenkin välttämättömän peruslogiikan, jonka päälle monimutkaisemmat mallit rakentuvat.

Johtopäätökset

- Hinnoittelun peruslauseet paljastavat rationaalista hinnoittelua ohjaavan matemaattisen rakenteen.
- Martingaaliteoria tarjoaa yhtenäisen ja tehokkaan keinon hinnoittelun, suojautumisen ja riskienhallinnan käsittelyyn.
- Tämä työ esittelee teoreettisen perustan, jota laajentamalla realistisempia ja monimutkaisempia malleja voidaan rakentaa ja arvioida.

Yhteenveto tuloksista

- Työssä formalisoitiin äärellinen diskreetti markkinamalli ja arbitraasivapauden periaate tässä yhteydessä.
- Osoitettiin, että arbitraasivapaus on yhtäpitävää EMM:n olemassaolon kanssa (FTAP I), minkä myötä riskineutraalihinnoittelu on mahdollista.
- Osoitettiin, että markkinan täydellisyys on ekvivalenttia EMM:n yksikäsitteisyyden kanssa (FTAP II), mikä yhdistää suojautumisen ja yksikäsitteisen hinnoittelun.
- Esimerkit havainnollistivat, miten markkinan rakenne määrää sen täydellisyyden.

Tietolähteet

[1] Pascucci, A. (2011). PDE and Martingale Methods in Option Pricing.

[2] Föllmer, H., & Schied, A. (2016). Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time.

[3] Pliska, S. R. (1997). Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models.

[4] Harrison, J. M., & Pliska, S. R. (1981). Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading.

[5] Cox, J. C., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach.

[6] Shreve, S. E. (2004). Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model.