Aalto-yliopisto
Perustieteiden
korkeakoulu

Korkokaton arvonmääritys Black-Derman-Toy -korkomallilla (valmiin työn esittely)

Paavo Vesterinen

07.05.2024

Ohjaaja: *DI Leevi Olander*
Valvoja: *Prof. Ahti Salo*

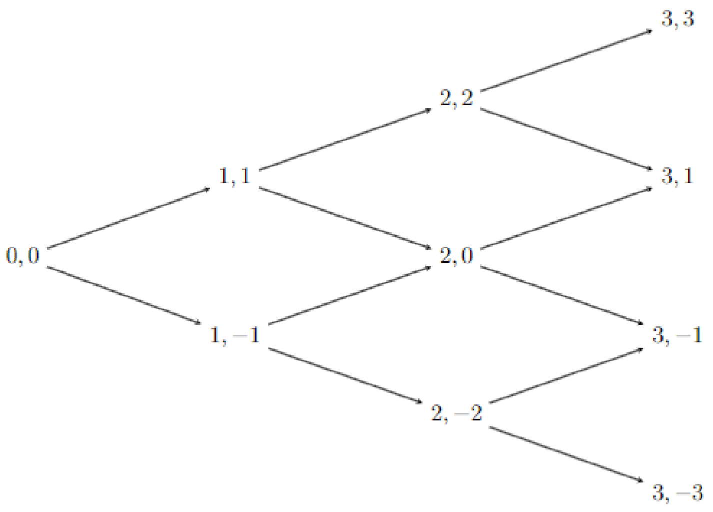
Systeemianalyysin laboratorio

Taustaa

- Vertaillaan korkokattotarjouksia Black-Derman-Toy -korkoennusteen perusteella (Black et al., 1990)
- Luodaan korkoennuste käyttämällä markkinaperusteisia velkakirjojen hintoja ja volatiliteettiestimaattia historiallisista koroista
- Lasketaan korkokattovaihtoehtojen nykyarvot skenaarioittain ja kootaan tulokset histogrammeihin
- Esitetään korkokattosuositukset

Black-Derman-Toy

- Korot mallinnetaan binomihilana
- Solmu (0,0) kuvaa nykykorkoa
- Jokaisella solmulla kaksi seuraavaa korkorealisaatiota todennäköisyydellä 50%



Kuva 2: BDT-hilan indeksöinti visualisoituna.

Black-Derman-Toy

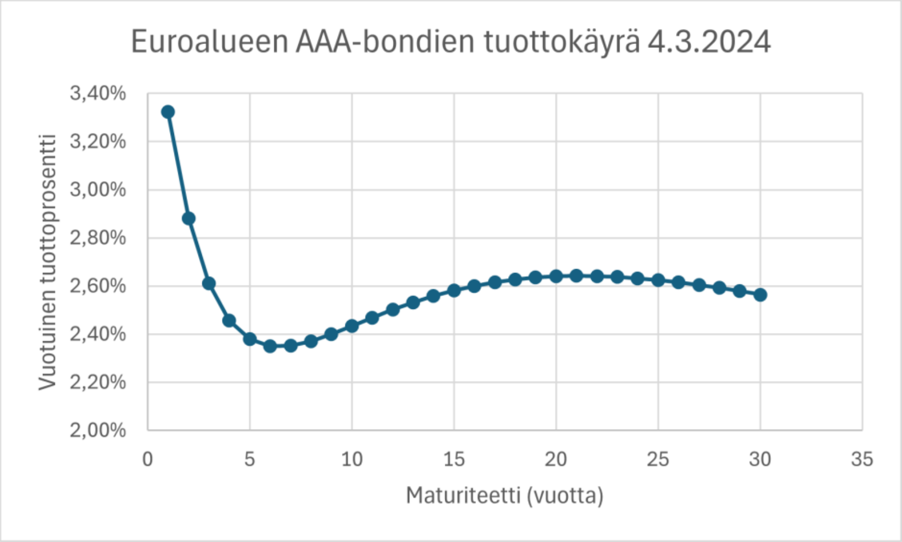
- Oletetaan korot lognormaalijakautuneiksi
- Solmua (i, j) vastaava korko on

$$r_{ij} = U(i)e^{\sigma(i)j}$$ (Jamshidian, 1991),

missä $U(i)$ on korkojakauman mediaani ja $\sigma(i)$ volatiliteettiparametri periodissa i

Black-Derman-Toy

- $U(i)$ määritetään jokaiselle periodille siten, että hilassa diskontatun velkakirjan nykyarvo on yhtä suuri markkinakorkokäyrän mukaisen velkakirjan kanssa
- Aineistona Euroopan keskuspankin korkokäyrä



Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu

Systeemianalyysin laboratorio

Black-Derman-Toy

- $U(i)$ saadaan ratkaisemalla yhtälö

$$\frac{1}{(1+R_{i+1})^{i+1}} = \sum_j Q_{ij}^0 \frac{1}{1+U(i)e^{\sigma(i)j}},$$

missä R_{i+1} on markkinakorkokäyrän mukainen vuotuinen tuottoprosentti maturiteetin $i+1$ velkakirjalle ja Q_{ij}^0 on nk. Arrow-Debreu -velkakirjan nykyarvo (Arrow ja Debreu, 1954)

Volatiliteetti

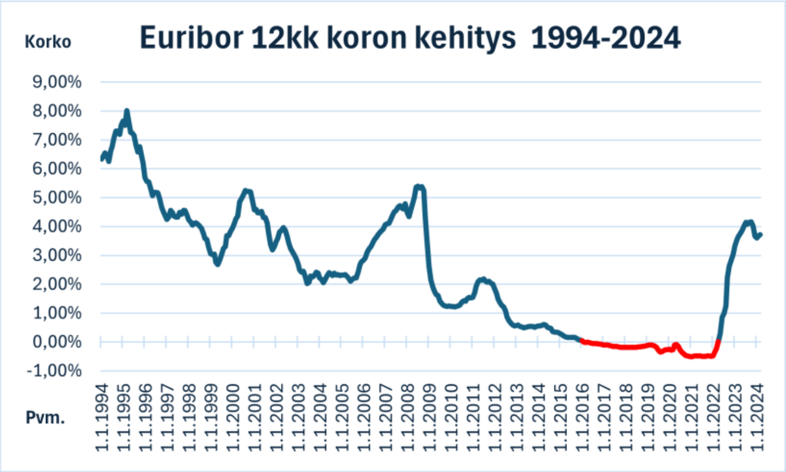
- Lasketaan liukuva 12 kuukauden volatiliteettiestimaatti (Luenberger, 1998) ja määritetään 90%:n luottamusväli sekä mediaani
- Volatiliteettiestimaatti $\hat{\sigma}_r$ lasketaan kaavasta

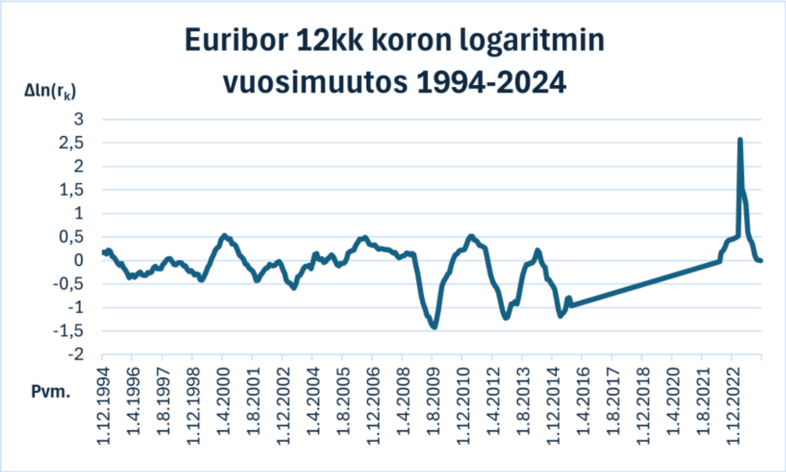
$$\hat{\sigma}_r = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}(\Delta \ln r_k - E[\Delta \ln r_k])^2}$$

missä N on otoksen koko, $\Delta \ln r_k$ on koron logaritmin muutos vuodessa

Volatiliteetti

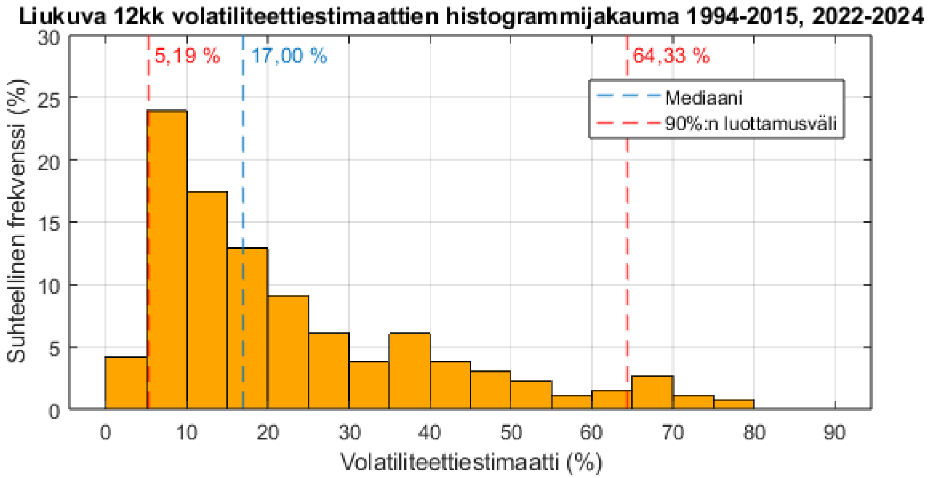
- Käytetään vuoden Euribor korkojen kehitystä ilman negatiivisia arvoja
- Lasketaan $\Delta \ln r_k$ ja määritetään volatiliteettiestimaatti kaikille 12 kuukauden aikaväleille





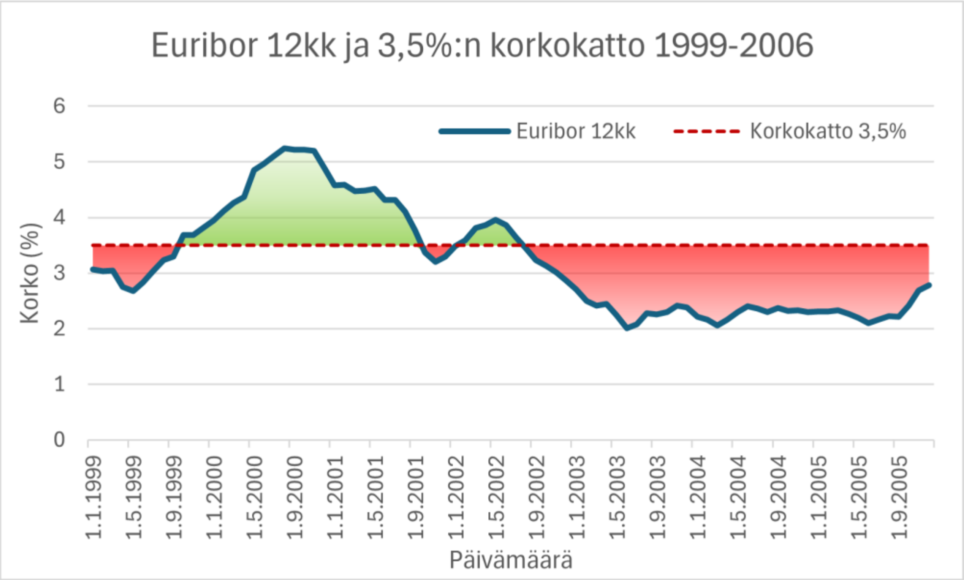
Volatiliteetti

- Kootaan 12 kuukauden volatiliteettiestimaatit histogrammiin
- Määritetään mediaani sekä 90%:n luottamusväli
- Nimetään 3 tapausta seuraavasti:
  - Vakaa: 5,19%
  - Mediaani: 17,00%
  - Volatiili: 64,33%



Korkokatto

- Asettaa lainan viitekorolle katon
  - Voidaan suojautua koronnousuja vastaan
- Hinnoitellaan suurempana marginaalina



Korkokatto

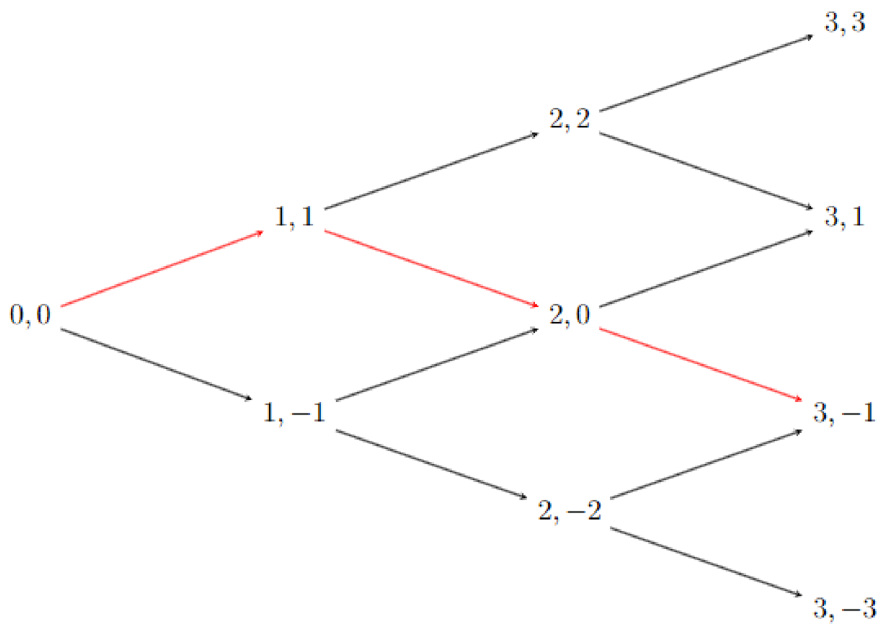
- Korkokaton suojaama viitekorko lasketaan kaavalla

$$r^{CAP} = \min(r, r_c) + \gamma \ ,$$

  missä r on viitekorko ilman suojausta, r_c korkokaton taso ja γ korkokaton marginaali
- Vertaillaan neljää:
  - Katto 5%, kesto 14 vuotta, marginaali 0,58%
  - Katto 5%, kesto 7 vuotta, marginaali 0,49%
  - Katto 4%, kesto 14 vuotta, marginaali 0,73%
  - Katto 4%, kesto 7 vuotta, marginaali 0,60%

Arvonmääritys

- N periodisessa binomihilassa 2^N eri polkua
- Määritetään korkokaton arvo näistä jokaisessa



Arvonmääritys

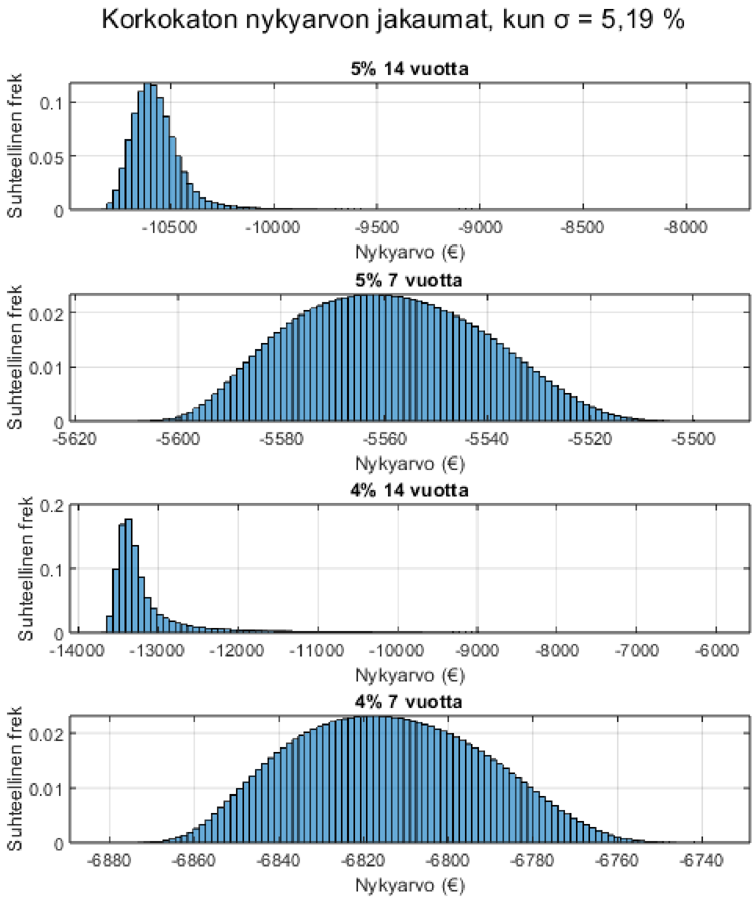
- Korkokaton arvo saadaan korkosuojaamattoman ja korkosuojatun lainanlyhennyksen erotuksena
- Korkokaton nettonykyarvo polussa π saadaan kaavasta

$$NPV_{\pi} = \sum_i D_{i,\pi(i)}\left(C_{i,\pi(i)} - C_{i,\pi(i)}^{CAP}\right) ,$$

missä $D_{i,\pi(i)}$ on diskonttauskerroin solmussa $\big(i,\pi(i)\big)$, $C_{i,\pi(i)}$ ja $C_{i,\pi(i)}^{CAP}$ ovat korkosuojaamaton ja korkosuojattu lainanlyhennys solmussa $\big(i,\pi(i)\big)$

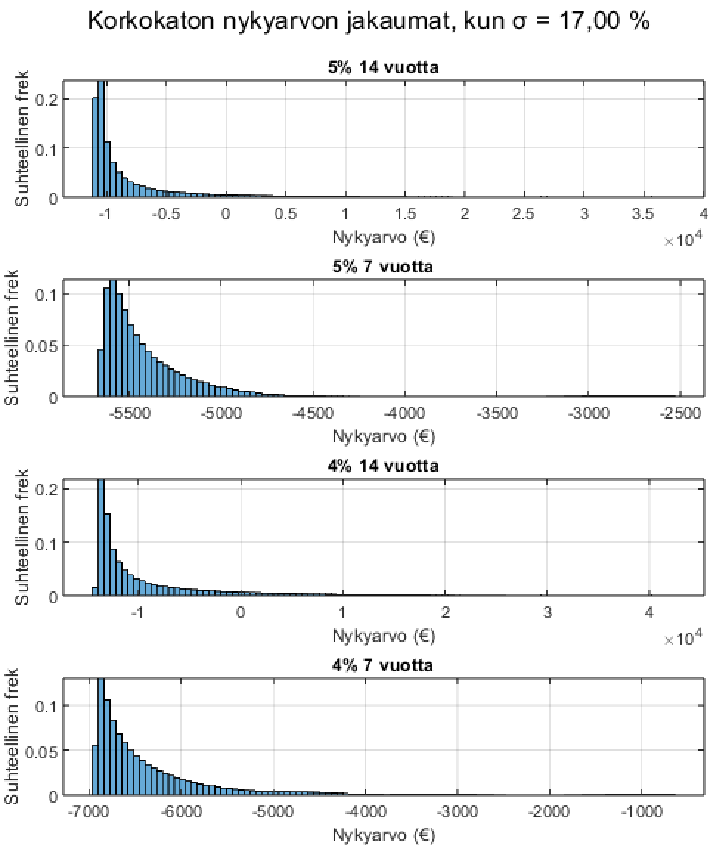
Tulokset, vakaa tapaus

- Vertailtavat korkokatot eivät kannata



Tulokset, mediaanitapaus

- 7 vuoden korkokatot eivät kannata
- 14 vuoden 5%:n korkokatto
  - Odotusarvo -7916 €
  - Kannattava 7,38%:ssa poluista
- 14 vuoden 4%:n korkokatto
  - Odotusarvo -8903 €
  - Kannattava 10,69%:ssa poluista

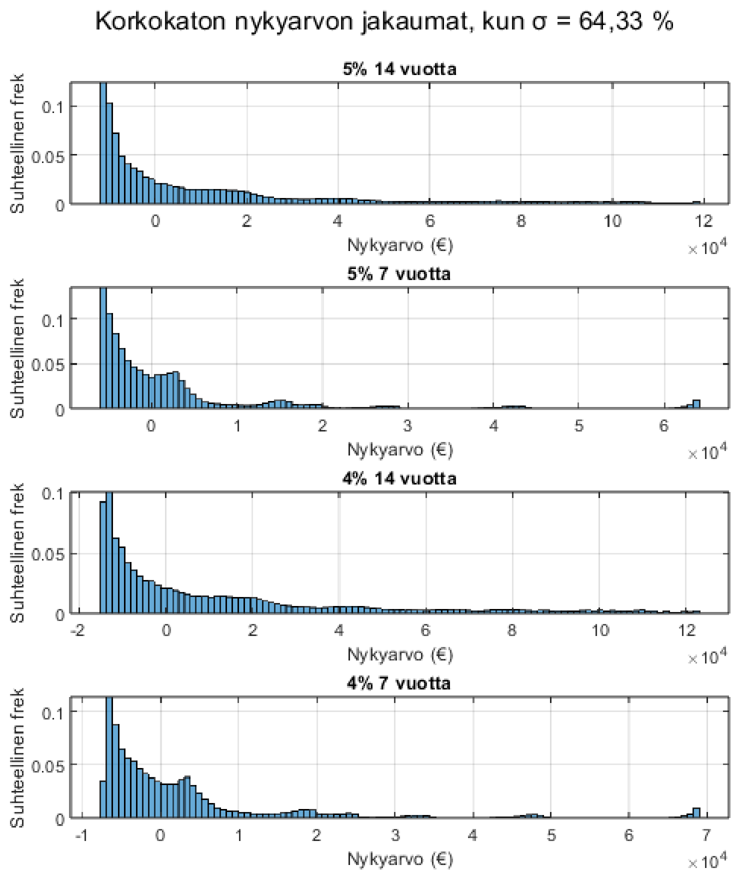


Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu

Systeemianalyysin laboratorio

Tulokset, volatiili tapaus

- Volatiilissa tapauksessa kaikki korkokatot kannattavat
- Voidaan ajatella sijoituskohteina
- Suositellaan 4% 14 vuoden korkokattoa, sillä sen odotusarvo on suurin
  - Odotusarvo 12 174 €
  - Kannattava 48,73 %:ssa poluista



Lähteet

- Kenneth J. Arrow ja Gerard Debreu. Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy. *Econometrica: Journal of Economic Society*, 22(3):265-290, 1954.
- Fischer Black, Emanuel Derman, ja William Toy. A One-Factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options. *Financial Analysts Journal*, 46(1):33–39, 1990.
- Farshid Jamshidian. Forward Induction and Construction of Yield Curve Diffusion Models. *Journal of Fixed Income*, 1(1):62–74, 1991.
- David G. Luenberger. *Investment Science*. Oxford University Press, 1998.