



Aalto-yliopisto  
Perustieteiden  
korkeakoulu

# Menetelmä Markowitzin mallin parametrien estimointiin (valmiin työn esittely)

*Lauri Nyman*

*17.9.2015*

Ohjaaja: *Eeva Vilkkumaa*

Valvoja: *Harri Ehtamo*

Työn saa tallentaa ja julkistaa Aalto-yliopiston avoimilla verkkosivuilla. Muilta osin kaikki oikeudet pidätetään.

# Työn tavoitteet

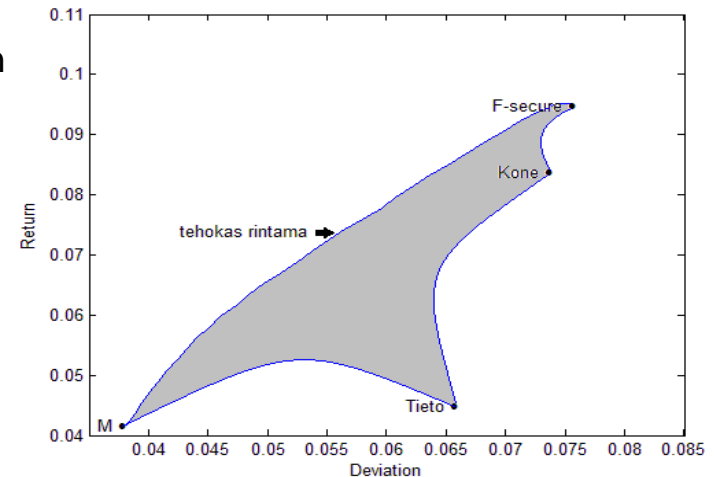
- Sijoittajat haluavat löytää tehokkaan joukon sijoitusinstrumentteja eli sijoitusportfolion, joka antaa mahdollisimman hyvän tuotto-odotuksen mahdollisimman pienellä riskillä
- Jos instrumenttien tuotto-odotukset ja tuottojen väliset kovarianssit tunnetaan, voidaan tehokkaat portfoliot löytää Markowitzin mallilla
- Etenkin tuotto-odotuksia on hankala estimoida luotettavasti

# Työn tavoitteet

- Työssä kehitetään menetelmä sijoitusinstrumenttien tuotto-odotusten ja tuottojen välisten kovarianssien estimointiin
  - Tuotto-odotuksia estimoidaan faktorimallilla
  - Kovarianssien estimoinnissa huomioidaan tuotto-odotusten epävarmuuden vaikutus uudella tavalla

# Markowitzin malli

- Instrumentit kuvataan tuotto-odotusten ja tuottojen keskihajontojen kautta
- Tavoitteena on rakentaa portfolio (painotettu keskiarvo instrumenteista), jolla on mahdollisimman suuri tuotto-odotus ja pieni keskihajonta
- **Käypien** portfolioiden joukko (harmaa alue) määräytyy
  - Instrumenttien tuotto-odotuksista
  - Tuottojen kovariansseista
- Tehokkaat portfoliot voidaan ratkaista etsimällä varianssin minimoiva portfolio eri tuotto-odotuksille:
  - $$\min \frac{1}{2} \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}$$
 (minimoidaan kokonaishajontaa)
  - $$\sum_i w_i = 1$$
 (painokertoimet summautuvat lukuun 1)
  - $$\sum_i w_i r_i = R$$
 (tuotto-odotus on valittu)
  - $$w_i \geq 0 \quad \forall i$$
 (Ei lyhyeksi myyntiä)
- Tehokkaat portfoliot muodostavat **tehokkaan rintaman**



# Tuotto-odotusten estimointi

- Tuotto-odotuksia  $r_n$  estimoitiin eri ajanhetkillä 60 ja 47 pörssipäivän päähän (~ 3kk) faktorimallilla muotoa

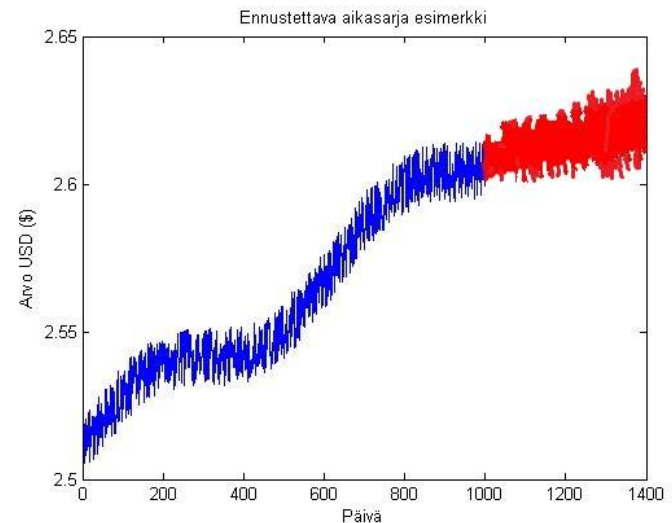
$$r_n = \beta + \sum_i a_i x_{ni}$$

missä  $\beta$  on vakio,  $a_i$  on tekijän  $i$  kontribuutio ja  $x_{ni}$  on instrumentin  $n$  tekijä  $i$

- Selittäviksi tekijöiksi  $i$  valittiin instrumenttien 4 erilaista tunnuslukua
  - $\frac{E}{P}$ , osakkeen tuotto suhteessa sen pörssiarvoon
  - $\frac{B}{P}$ , osakkeen kirjanpidollisen arvon suhde pörssiarvoon
  - $\frac{S}{P}$ , yrityksen myynti suhteessa sen pörssiarvoon
  - $\frac{Cf}{P}$ , yrityksen kassavirta suhteessa sen pörssiarvoon
- Kertoimet  $\beta$  ja  $a_i$  laskettiin pienimmän neliösumman menetelmällä historiatiedoista

# Kovarianssien estimointi

- Tuotto-odotuksen estimointivirhe vaikuttaa salkun arvon kokonaishajontaan n. 10-100 kertaa niin paljon kuin kovarianssien estimointivirhe
- Tuotto-odotuksen epävarmuus huomioitiin kuvaamalla tulevaisuutta siirretyllä Brownin liikkeellä, jonka trendi määräytyy 60 ja 47 pörssipäivän päähän lasketusta tuotto-odotuksesta
- Siirretty Brownin liike on huomioitu kovarianssin estimoinnissa integroimalla kaikkien mahdollisten tulevaisuuksien yli
- Näin voidaan välttää Monte-Carlo simulaatiosta aiheutuvaa ylimääräistä hajontaa

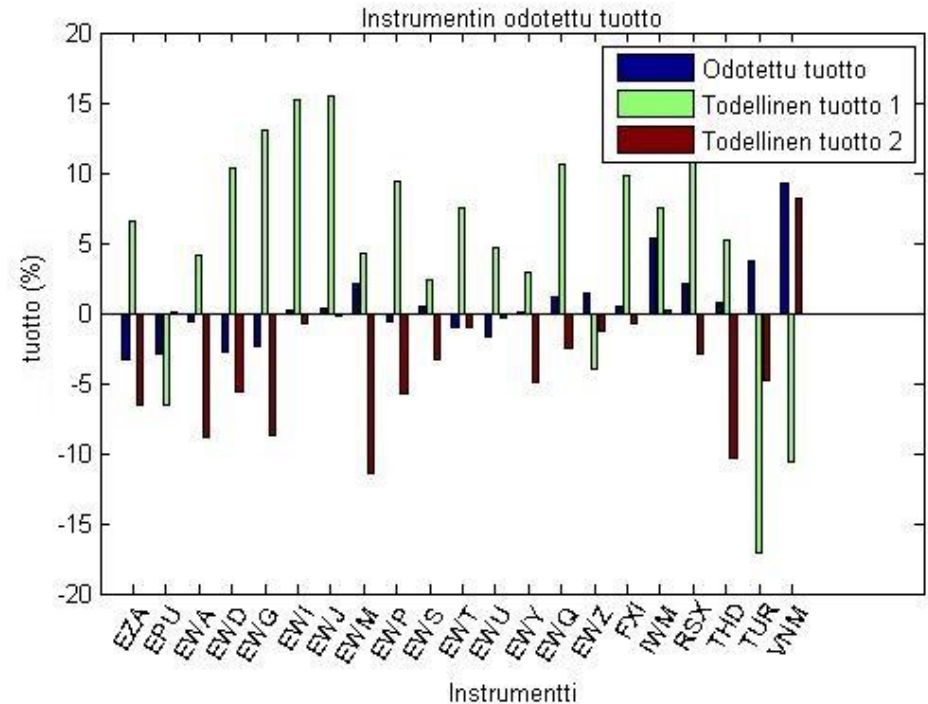


# Aineisto ja työkalut

- Testiaineisto:
  - Eri maiden pörssi-indeksejä jäljittelevät ETF-rahastot (exchange-traded fund), esim.
    - EPU - Peru
    - EWG - Saksa
    - FXI – Kiina
  - Mallin parametrien estimointi 105 datapisteestä vuosilta 2013-2014
  - Mallin ennustekyvyn (tuotto-odotus ja tehokas rintama) testaus 13.1.2015 - 9.4.2015 ja 9.4.2015 - 12.6.2015 aineistolla
- Työkalut:
  - Parametrien estimointi pienimmän neliösumman menetelmällä MATLAB:lla
  - Tehokkaan rintaman portfolioiden laskeminen MATLAB:iin integroidulla algoritmilla

# Tuotto-odotusten estimointitulokset

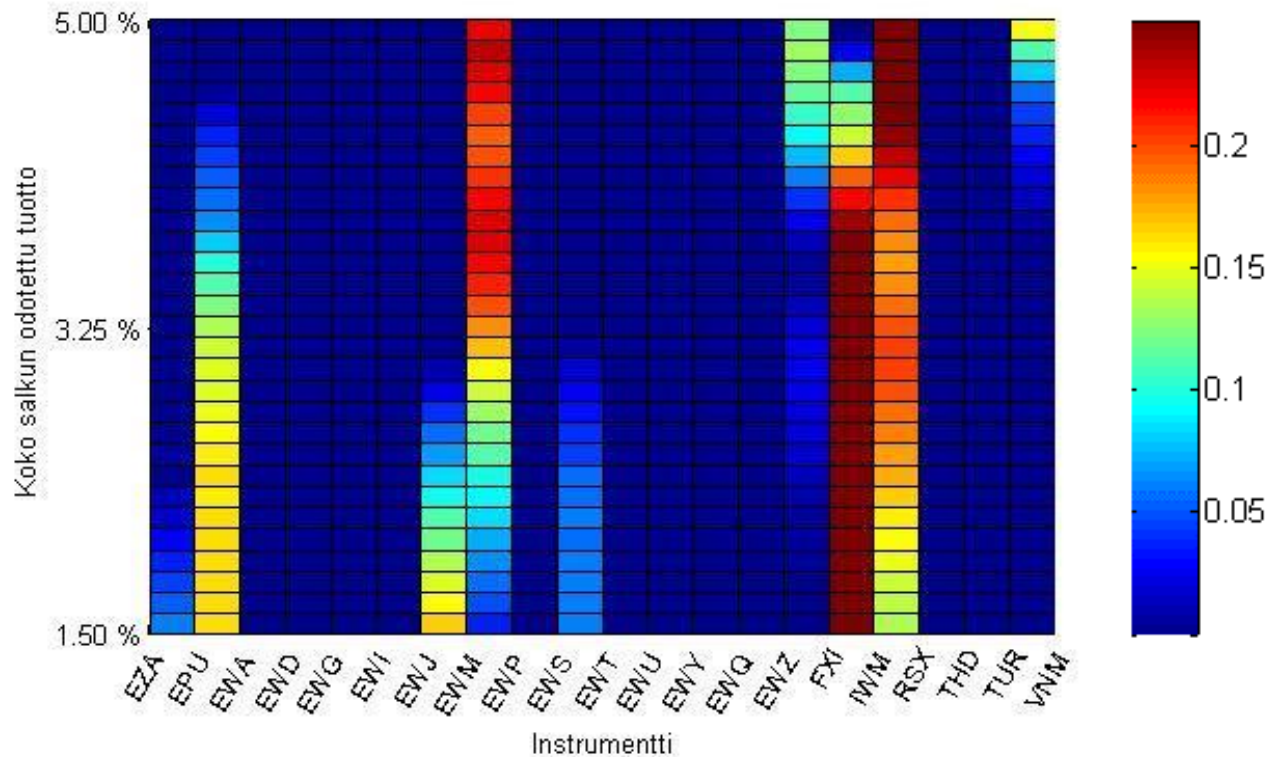
- **Tuotto-odotukset** instrumenteille ovat kuvaajassa **sinisellä**
- **Toteutuneet tuotot** 60 ja 47 pörssipäivän aikana kahtena eri ajankohtana:
  - **Vihreällä** (13.1.2015 - 9.4.2015 )
  - **Punaisella** (9.4.2015 - 12.6.2015)





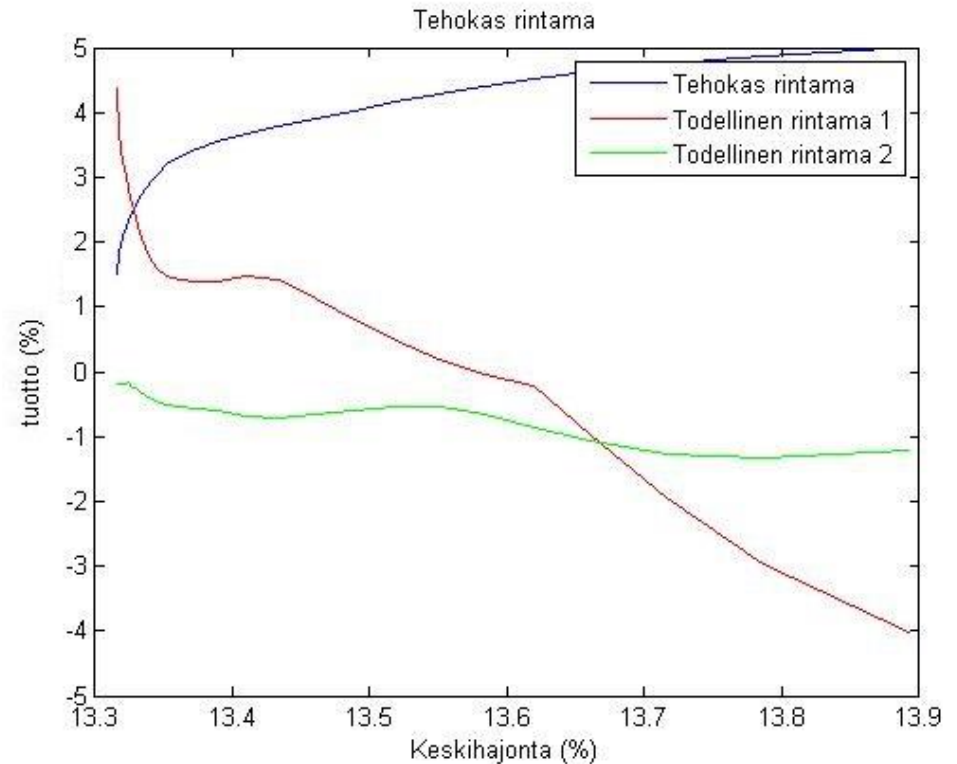
# Painokertoimet eri salkuissa

- Salkkuja generoitiin tuotto-odotuksilla 1,50 % - 5,00 %



# Tehokas rintama

- Toteutuneet tehokkaat rintamat vastaavat huonosti Markowitzin mallin tehokasta rintamaa
- Osakkeet laskivat yleisesti kyseisenä aikana, mistä mahdollisesti johtuu tehokkaiden rintamien ”ylösalaisuus”



# Yhteenvedo

- Työssä kehitettiin uusi menetelmä Markowitzin mallin parametrien estimointiin
- Siirretty Brownin liike kovarianssien estimoinnissa osoittautui matemaattisesti käyttökelpoiseksi
- Osakkeiden tunnuslukuista ennustetut tuotot eivät kuitenkaan vastanneet 2015 alkuvuoden toteutuneita todellisia tuottoja
  - Syynä voi olla aineiston pieni koko (105 pistettä ja 5 parametria)
  - Jatkossa estimointimenetelmää tulisi testata huomattavasti laajemmalla aineistolla

# Tietolähteet

- [1] Moderni portfolioteoria, *Portfolio Selection*, Markowitz H.M, 1952
- [2] Bayesian portfolio selection: *An empirical analysis of the S&P 500 index 1970-1996*, Polson, Nicholas G;Tew, Bernard V, 2000
- [3] Mallin luomiseen käytetyt aikasarjat **Eoddata** (<http://eoddata.com/>)
- [4] Mallin luomiseen käytetyt tunnusluvut **Yahoo** (<https://www.yahoo.com/>)
- [5] Brownin liike, *Investigations on the theory of the Brownian motion*, Albert Einstein, 1905