Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu

Estimating the parameters of a geometric Brownian motion with MCMC

Matias Linnankoski

12.06.2020

Ohjaaja: *DI. Niko Lietzén*

Valvoja: *Apulaisprofessori Pauliina Ilmonen*

Systeemianalyysin laboratorio

Tausta

- Markov Chain Monte Carlo (MCMC)
  - Algoritmeja otosten generoimiseen
  - Mahdollistavat otosten generoinnin vaikeista todennäköisyysjakaumista
  - Ideana suorittaa Monte Carlo simulointi Markov ketjulle, jotta saadaan se konvergoimaan haluttuun jakaumaan
  - Voidaan käyttää esimerkiksi laskennallisten inversio-ongelmien ratkomiseen
  - Tunnetuin algoritmi on Metropolis-Hastings algoritmi

Tausta

- Geometrinen Brownin liike (GBM): prosessi jolla voidaan mallintaa osakkeen hintaa

$$dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dX_t$$

Deterministinen komponentti

Stokastinen komponentti

- Stokastisella differentiaaliyhtälöllä ratkaisu:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma X_t}$$

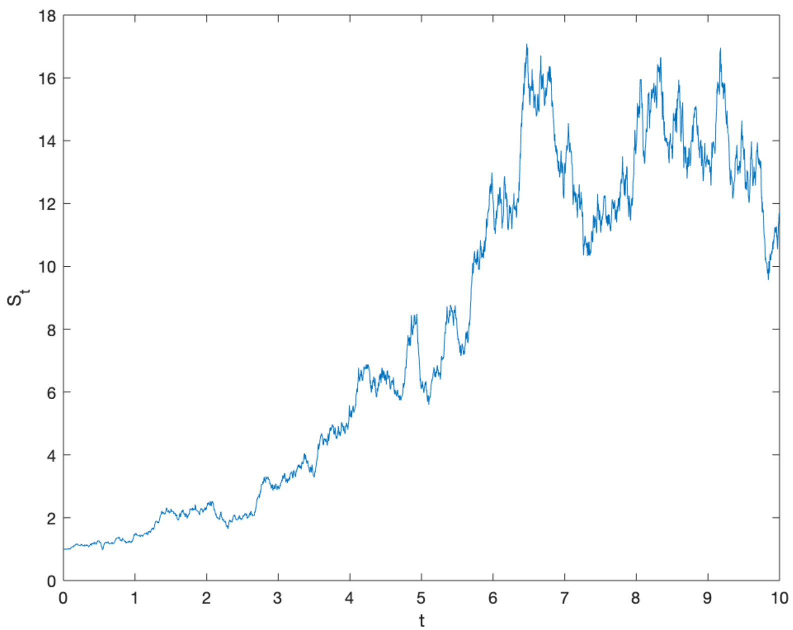
Tavoitteet

- Simuloidaan GBM, siten että, μ on normaalijakautunut ja σ^2 vakio
- Estimoidaan μ:n posteriorijakauma simuloidusta aineistosta, kun σ^2 tunnetaan
- Käytetään estimoimiseen Metropolis algoritmia
- Validoidaan tulokset tarkastelemalla estimoidun jakauman normaalisuutta, odotusarvoa ja varianssia.
  - Normaalisuutta tarkastellaan visuaalisesti
  - Odotusarvo ja varianssi estimoidaan MCMC otoksesta
  - Odotusarvoa ja varianssia verrataan todellisiin arvoihin

Aineisto

- GBM simuloitiin seuraavin parametrein:
  - $\mu \sim N(0.3, 0.05)$
  - $\sigma^2 = 0.1$
  - $T = 10$
  - $n = 2550$
  - $dt = \frac{T}{n} = \frac{1}{255}$

Työssä käytetty GBM polku



Menetelmät

- Käytetään estimoimiseen S lisäyksiä
- S lisäykset ovat lognormaalisti jakautuneita

  $$Y_i = \ln \frac{S_i}{S_{i-1}} \backsim N(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) \; ,$$

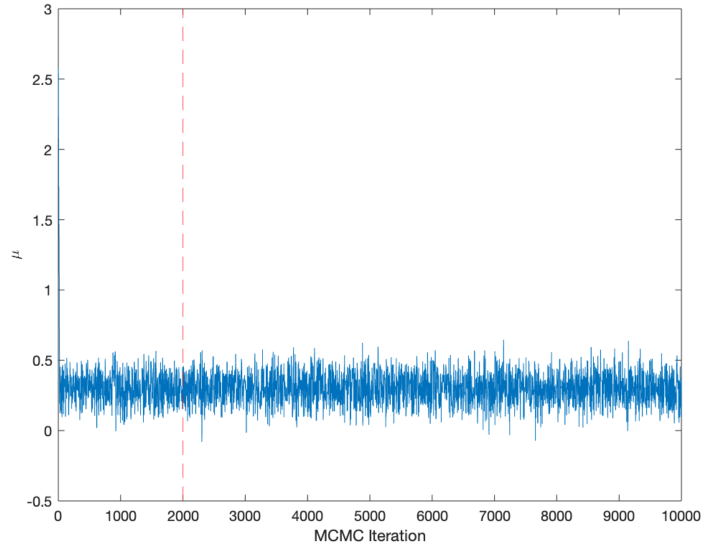
  missä $\hat{\mu} = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt$ ja $\hat{\sigma}^2 = \sigma^2 dt$.
- Estimoidaan ensin $\hat{\mu}$, minkä avulla voidaan selvittää μ.

MCMC algoritmi

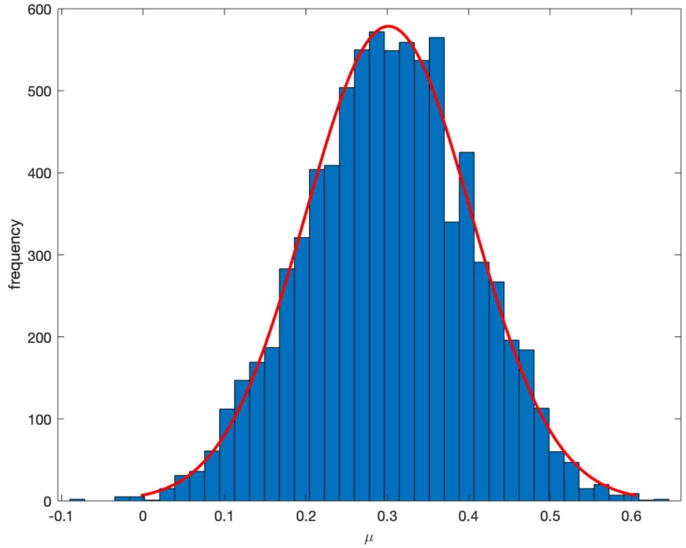
- Tehdään alkuarvaus $\hat{\mu}_i$
- Iteroidaan i = 1…m
  - $\hat{\mu}_p = N(\widehat{\hat{\mu}_i}, \hat{\sigma}_0)$
  - $a = \min(\frac{p(Y|\hat{\mu}_p,\hat{\sigma})}{p(Y|\hat{\mu}_i,\widehat{\sigma})}, 1)$
  - Todennäköisyydellä a:
    - $\hat{\mu}_{i+1} = \hat{\mu}_p$
  - Muuten:
    - $\hat{\mu}_{i+1} = \hat{\mu}_i$
- Palautetaan $\hat{\mu} = (\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_m)$
- Lopuksi tehdään muunnos $\mu = \frac{\hat{\mu}}{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2$

Tulokset

- Kuvaajat MCMC algoritmin generoimasta otoksesta



Otos iteraation funktiona. Punainen viiva kuvaa burn-in aikaa.



Histogrammi otoksesta. Punainen viiva kuvaa otokselle sovitettua normaalijakaumaa N(0.30,0.10).

Tulokset

- Tulokset taulukoituna: Lihavoitu sarake kuvaa parametrin todellisia arvoja.

	Keskiarvo	Keskihajonta	Mediaani
μ	0.302	0.102	0.303
$\boldsymbol{\mu}$	**0.300**	**0.05**	**0.3**

- Estimaatin keskiarvo poikkeaa vain 1% todellisesta arvosta
- Estimaatin keskihajonta kaksinkertainen todelliseen arvoon verrattuna

Johtopäätökset

- Keskiarvon estimoiminen toimi hyvin, mutta keskihajonnan ennuste poikkesi merkittävästi todellisesta
- Syy keskihajonnan poikkeamaan mahdollisesti otoskoossa tai mallissa
- Oikeaan dataan sovittaminen voi olla hankalampaa
  – Hintojen dynamiikka muuttuu ajan kuluessa
- Luonnollisin tapa jatkaa tutkimusta olisi lisätä malliin varianssin estimointi
- Lisäksi GBM voitaisiin korvata jollain hienostuneemmalla mallilla.

Lähteet

- Chib, S., & Greenberg, E. (1995). Understanding the metropolis-hastings algorithm. *The American Statistician*, *49*(4), pp. 327-335.

- Johannes, M., & Polson, N. (2010). MCMC methods for continuous-time financial econometrics. In *Handbook of Financial Econometrics: Applications,* pp. 1-72. Elsevier.