

Satelliittien rataliikkeen ennustamisesta

Markus Hiltunen

06.03.2023

Ohjaaja: *Pauliina Ilmonen*

Valvoja: *Pauliina Ilmonen*

Työn saa tallentaa ja julkistaa Aalto-yliopiston avoimilla verkkosivuilla. Muilta osin kaikki oikeudet pidätetään.

Satelliittien rataliikkeen ennustaminen: Ongelman taustaa

- Satelliiteilla tarkoitetaan tässä ihmisen avaruuteen laukaisemia, ja Maan tai muun taivaankappaleen kiertoradalle asettamia laitteita.
- Kiertoradalla olo ja siellä pysyminen on luontaisesti dynaaminen tila, jossa kappaleet liikkuvat suurilla nopeuksilla.
- Rataliike sanelee satelliitin paikan kullakin ajanhetkellä. Tämä on voitava ennustaa varsin tarkasti, jotta satelliitteja voidaan käytännössä hyödyntää

Satelliittien rataliikkeen ennustaminen: Ongelman taustaa

- Onneksi ennustaminen on mahdollista: Avaruuden olosuhteissa kappaleiden liike noudattaa tunnettuja lakeja hyvin vähäisin häiriöin.
- Jopa Newtonin mekaniikalla päästään kohtalaisen tarkkoihin ennusteisiin (vs relativistiset mallit)
- Kahden kappaleen ongelma konservatiivisen vuorovaikutuksen alla:
 - **Analyttinen ratkaisu on olemassa.**
- Kolme tai useampi kappale, tai epäjatkuvia voimia:
 - **Tarvitaan numeerista integraatiota.**

Satelliittien rataliikkeen ennustaminen:

Tavoitteet

- Katsaus suhteellisen yksinkertaisiin numeerisen integroinnin menetelmiin, ja 2-3 valinta lähempään tarkasteluun.
- Menetelmien implementointi.
- Sopivien vertailukriteerien tunnistaminen.
- Algoritmien vertailu kvantitatiivisesti ja kvalitatiivisesti, sekä loppupäätelmä niiden soveltuvuudesta.
- Katsaus aallonharjan menetelmiin.

Satelliittien rataliikkeen ennustaminen: Mitä teimme?

- Valitsimme kolme tunnettua numeerisen integroinnin algoritmia toteutettavaksi:
 - **Eulerin menetelmä**
 - **Verlet-integrointi**
 - **Runge-Kutta 4. (RK4)**
- Toteutus Python3-ohjelmointikielellä, (asianmukaiset kiihdytykset numpy, numba, ...)

Satelliittien rataliikkeen ennustaminen: Mitä teimme?

- **Eulerin menetelmä:** $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$ $f(t, y,) = y'(t)$
 - Hyvin yksinkertainen lineaarinen menetelmä.
- **Verlet-integraatio:** $r_{n+1} = 2r_n + hr_{n-1} + \frac{1}{2}a_nh^2$
 - Symplektinen, hieman monimukaisempi.
- **Runge-Kutta 4. (RK4):** $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$
 - Ei symplektinen
 - Työläämpi kuin Verlet, kukaties tarkempi.

Satelliittien rata liikkeen ennustaminen: Mitä teimme?

- Sunnittelimme kaksi erilaista koeasetelmaa, ja niiden vertailukriteerit:
- **1: Klassinen satelliittirata matalalla kiertoradalla Maan ympärillä, lievästi elliptisellä radalla.**
 - Energiavirhe: $\Re_{E_o}(t, h)$
 $= |E_{o,h,sim}(t) - E_{o,ref}(t)|$
 - seuraa satelliitin rataenergian $E_{o,h,sim}(t)$ ja viiterataenergian $E_{o,ref}(t)$ erotuksen magnitudia ajanhetkellä t , siten että aika-askeleen pituus h on kullekin integraatioajolle vakio.

Satelliittien rataliikkeen ennustaminen: Mitä teimme?

- Sunnittelimme kaksi erilaista koeasetelmaa, ja niiden vertailukriteerit:
- 1: **Klassinen satelliittirata matalalla kiertoradalla Maan ympärillä, lievästi elliptisellä radalla.**

- Elementtivirhe: $\mathfrak{R}_{Kepler}(t, h)$

$$= \sum_{i=0}^5 \left| \frac{K_{i,h,sim}(t) - K_{i,ref}(t)}{K_{i,h,sim}(t)} \right|$$
- seuraa satelliitin Keplerin ~~statisten rataelementtien~~ $K_{i,h,sim}(t)$ normalisoidun virheen summaa suhteessa elementtien viitearvoihin $K_{i,ref}(t)$ ajanhetkellä t . Jälleen pidämme aika-askeleen pituuden h kullekin integraatioajolle vakiona.

Satelliittien rataliikkeen ennustaminen: Mitä teimme?

- Sunnittelimme kaksi erilaista koeasetelmaa, ja niiden vertailukriteerit:
- **2: Aurinkokunnan päätaivaankappaleet, ja auringonpimennysten ennustaminen.**
 - Sijaintivirhe: $\mathfrak{R}_E(t)_i = \|r_{h,i,sim}(t) - r_{i,ref}(t)\|$
 - seuraa taivaankappaleen i integroitujen sijaintien $\mathbf{r}_{h,i,sim}(t)$ euklidista etäisyyttä efemeridin mukaisiin sijainteihin $\mathbf{r}_{i,ref}(t)$ ajan t funktiona, kullekin integraatioajolle vakioisella aika-askeleen pituudella h . Tämä residuaali soveltuu paitsi kvalitatiiviseen, myös kvantitatiiviseen vertailuun. Tätä käytettiin maa-kuu vektorin virheen määrittämiseen.

Satelliittien rataliikkeen ennustaminen: Mitä teimme?

- Sunnittelimme kaksi erilaista koeasetelmaa, ja niiden vertailukriteerit:
- **2: Aurinkokunnan päätaivaankappaleet, ja auringonpimennysten ennustaminen.**
 - Pimennyskäyrät: $\{\mathcal{R}_E(t)_i\} = \{\Phi_{\oplus}^{\odot \rightarrow \mathbb{C}}(t)_i\}$
 - ovat tarkasteltujen pimennysten joukkoa vastaava käyräjoukko. Pimennyskäyrä seuraa Auringosta $\odot$ kuun $\mathbb{C}$ massakeskipisteen kautta piirretyn janan osoittamaa pistettä Φ Maan $\oplus$ pinnalla ajan t funktiona pimennyksen alusta. Nämä soveltuvat kvalitatiiviseen graafiseen vertailuun.

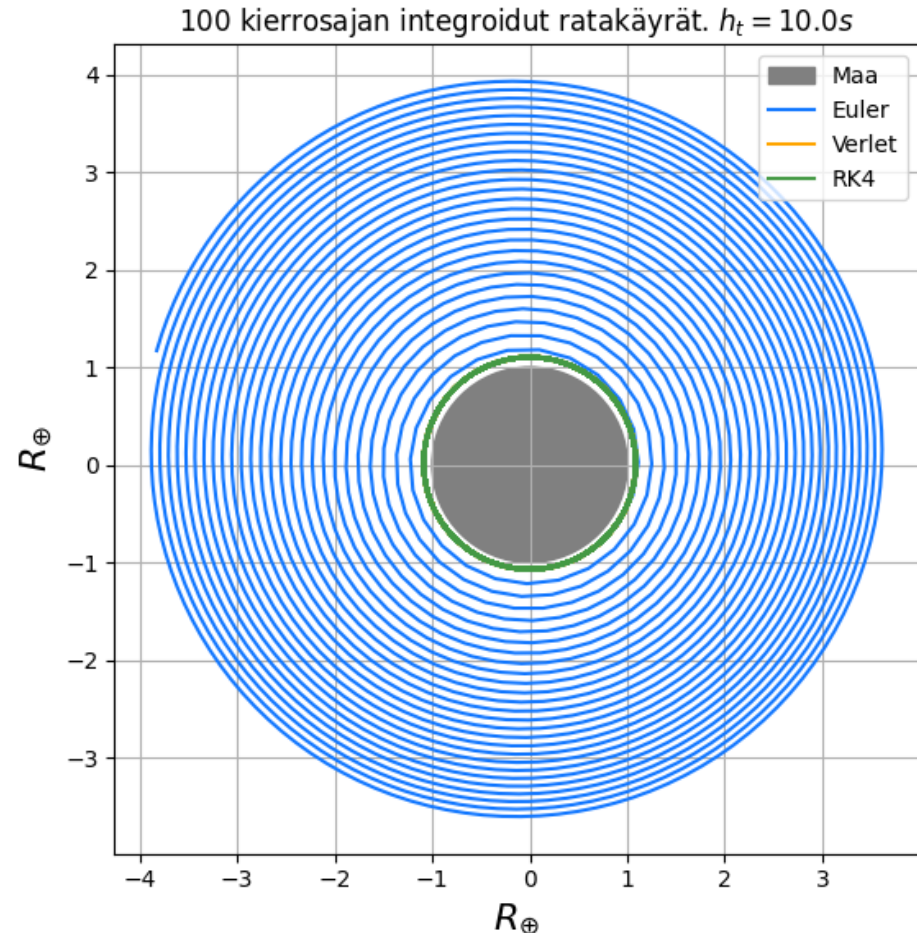
Satelliittien rata liikkeen ennustaminen: Mitä teimme?

- Kriteerinä käytettäviä residuaaleja voitiin käyttää integrointimetodien vertailuun joko aikatasossa (muuttujan t suhteen) vakioisella aika-askeleen pituudella h , tai aika-askeltasossa (muuttujan h suhteen) jollekin vakioiselle integrointiajalle t .
- Näin myös tehtiin, tyypillisesti ensin aikatasossa, ja siitä saadun näkemyksen pohjalta aika-askeltasossa.

Tulokset

Satelliittien rataliikkeen ennustaminen: Tulokset

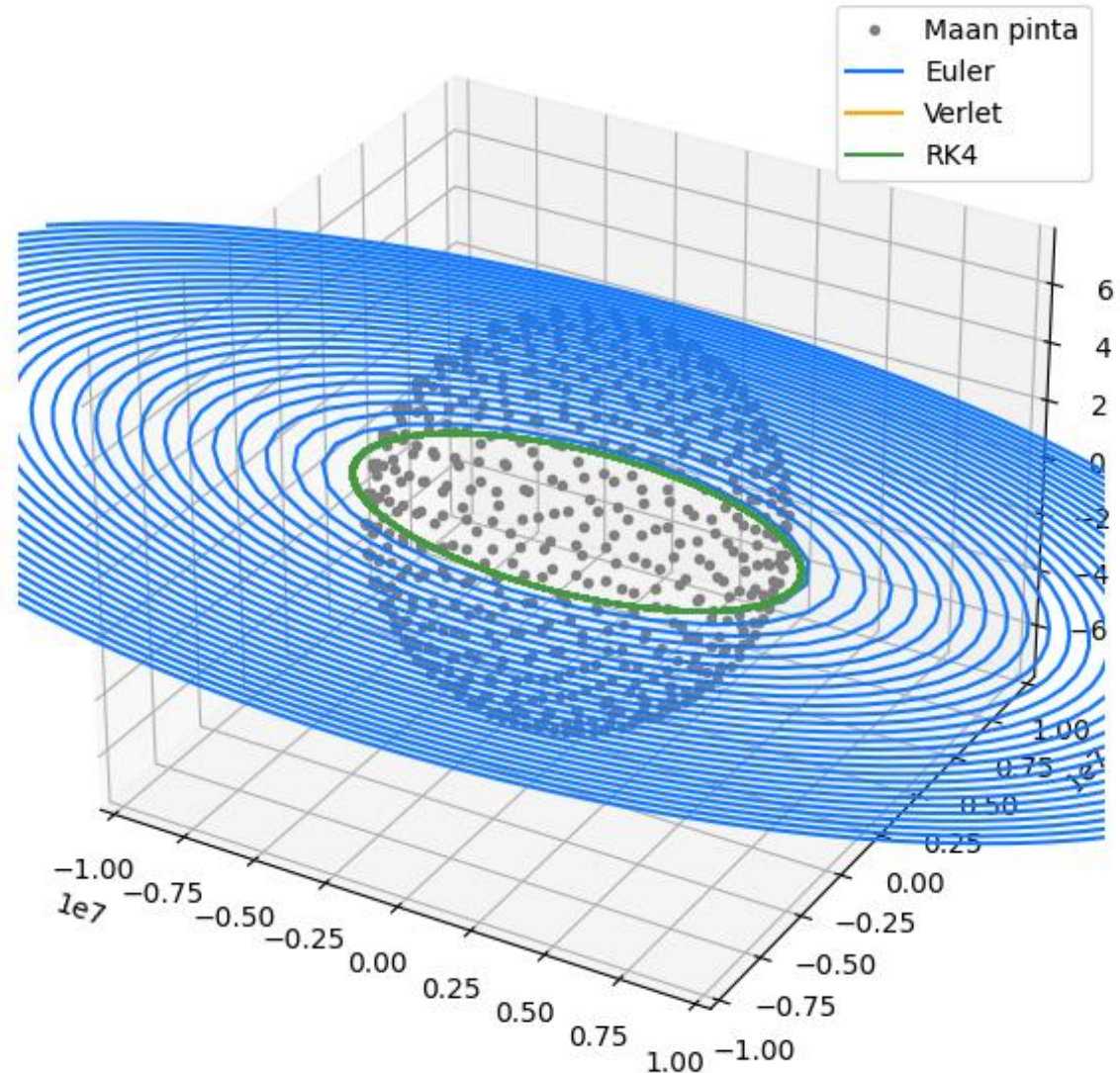
Ensinnä lyhykäinen tarkastelu metodien kyvystä pysyä radallaan. Euler alkaa heti osoittautua keinoimmaksi.



Satelliittien rataliikkeen ennustaminen: Tulokset

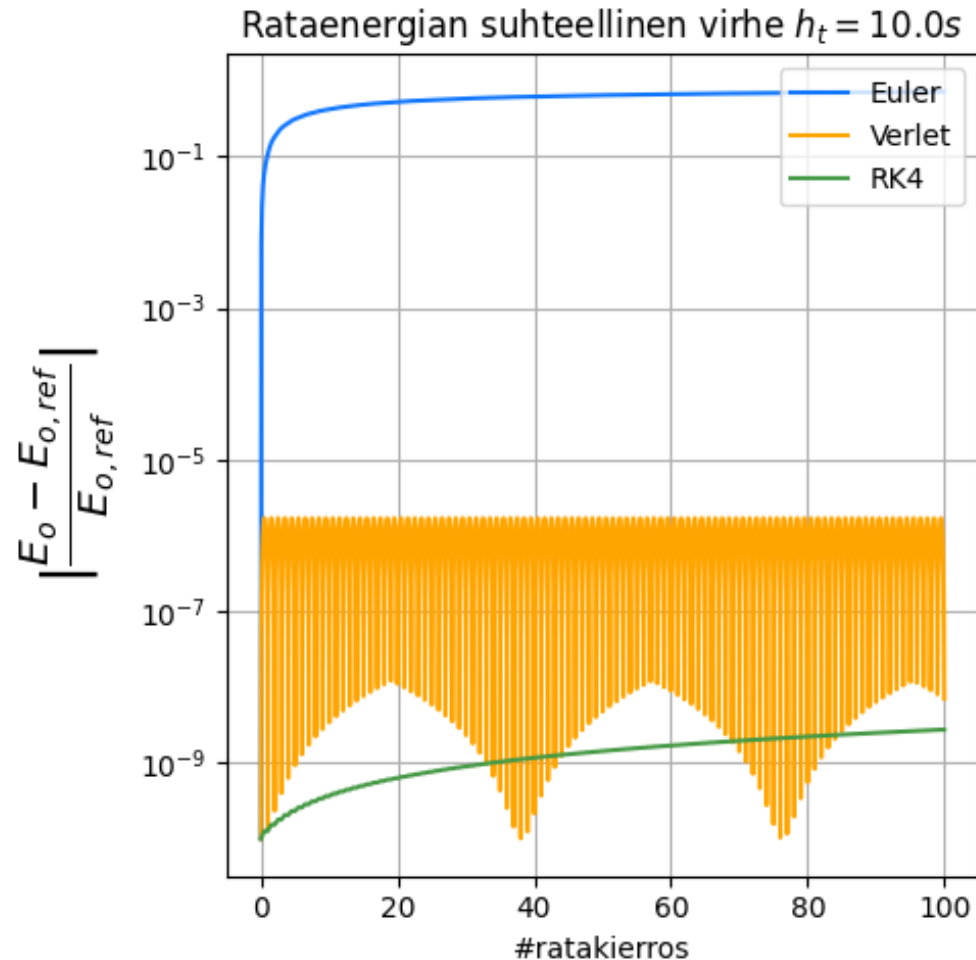
Ensinnä lyhykäinen tarkastelu metodien kyvystä pysyä radallaan. Euler alkaa heti osoittautua kehnoimmaksi.

ratakäyrät 3D-piirroksena. $h_t = 10.0s$



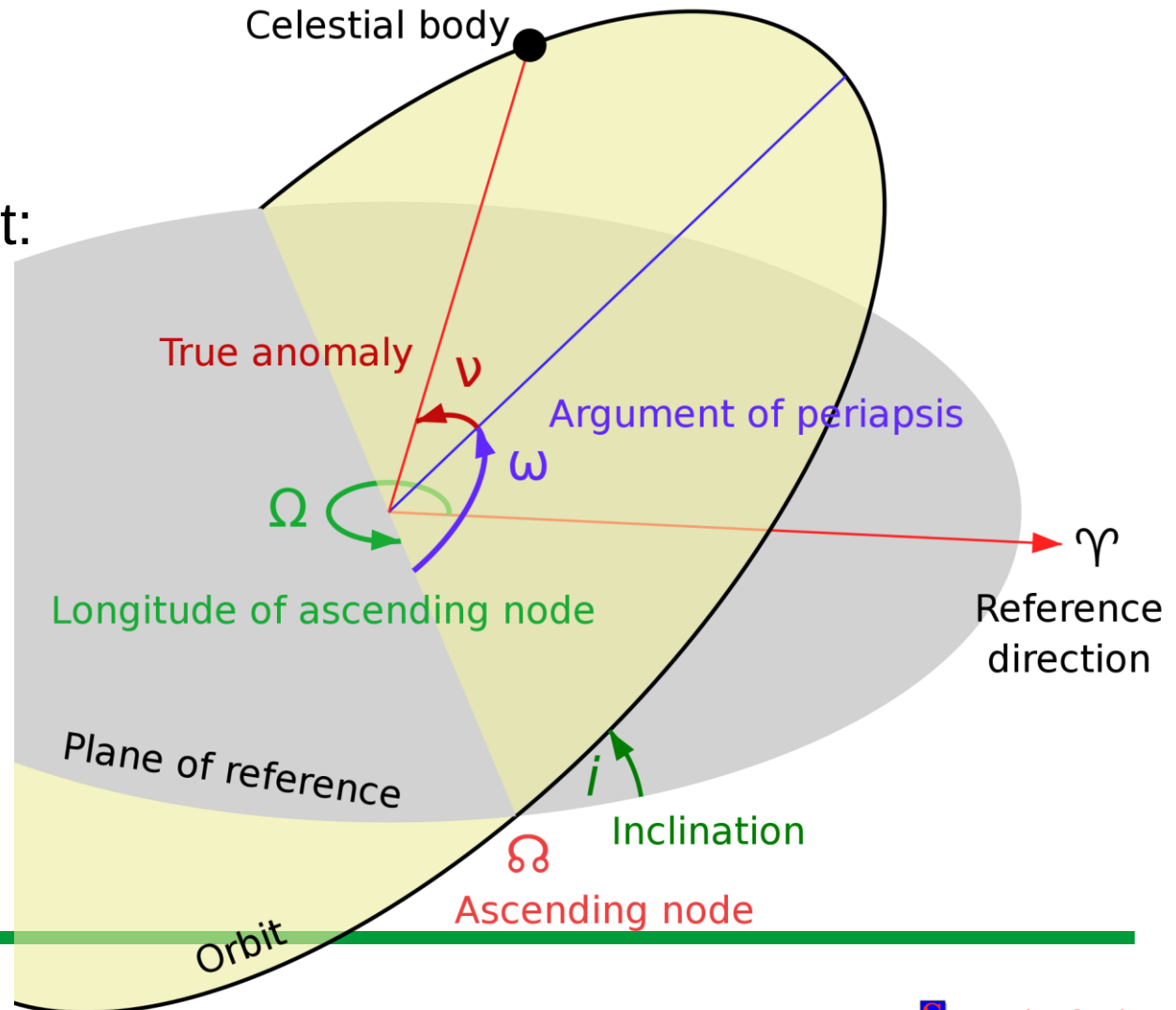
Satelliittien rataliikkeen ennustaminen: Tulokset

Rataenergia:

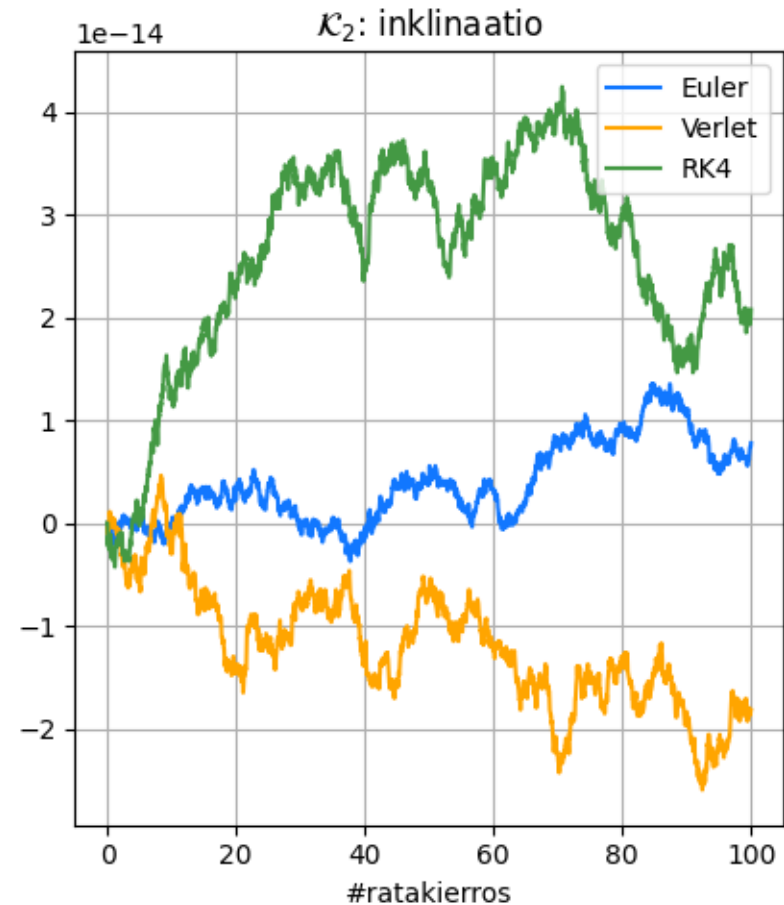
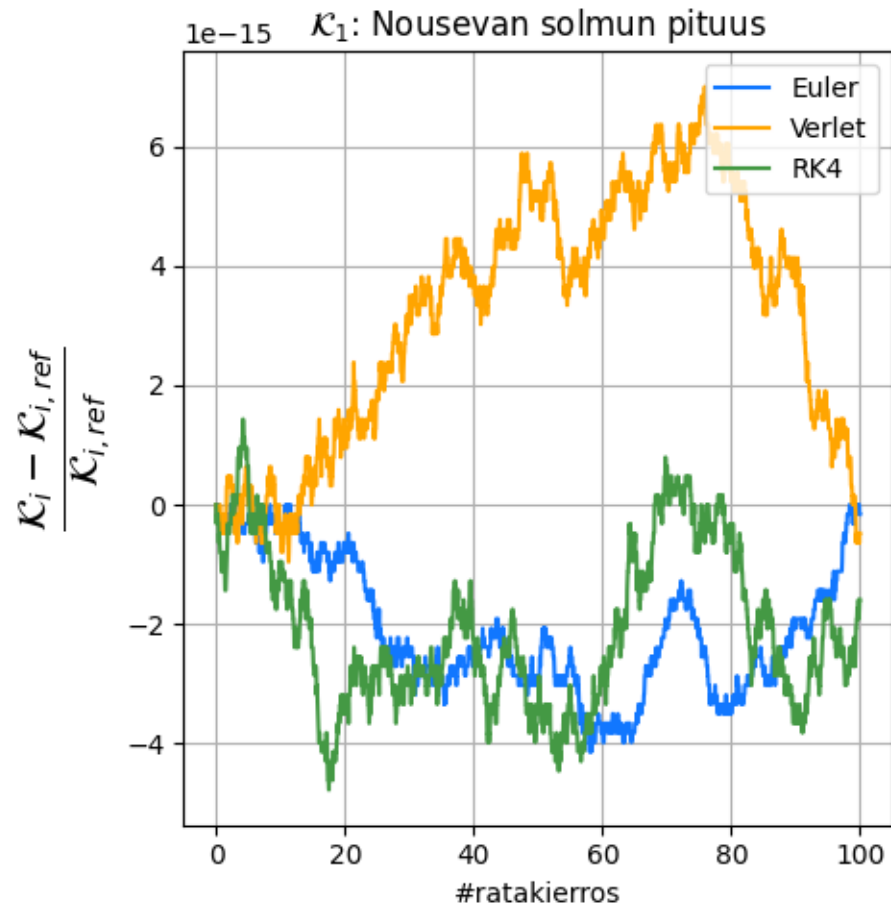


Satelliittien rataliikkeen ennustaminen: Tulokset

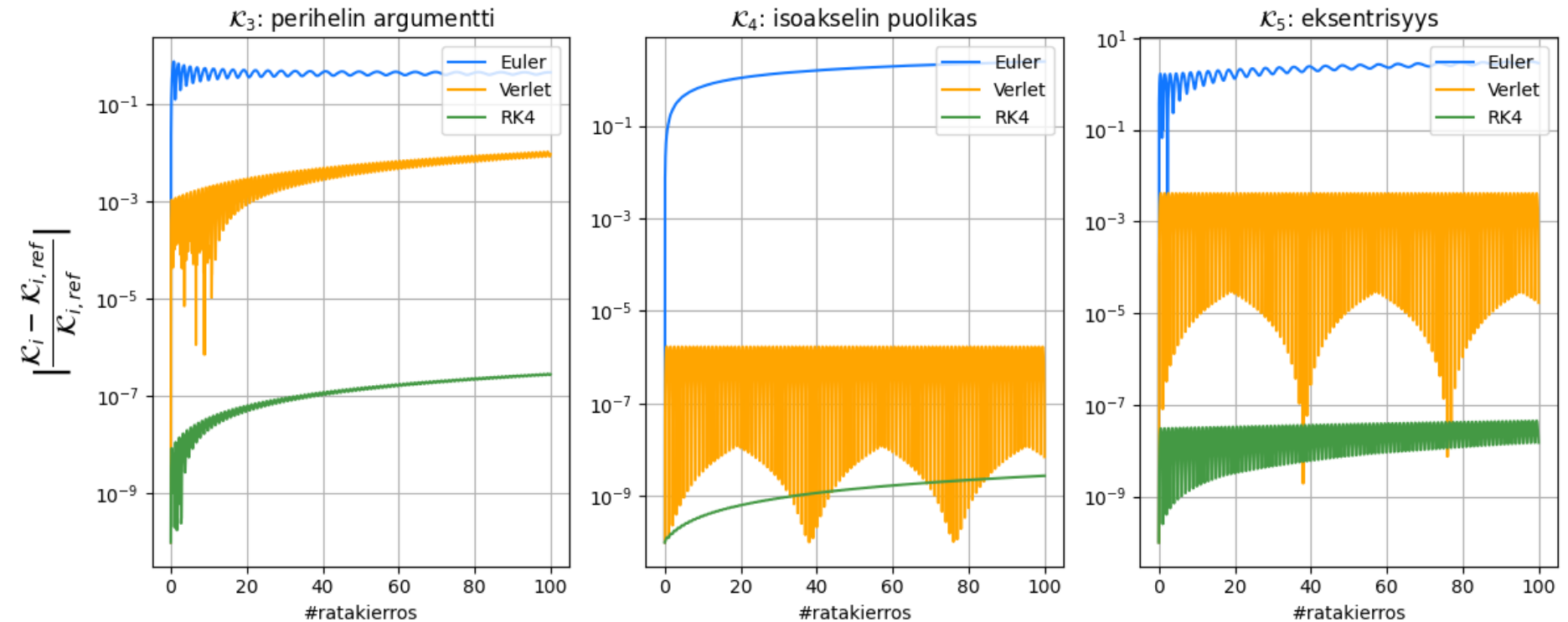
Lyhyt oppimäärä,
Keplerin elementit:



Satelliittien rataliikkeen ennustaminen: Tulokset

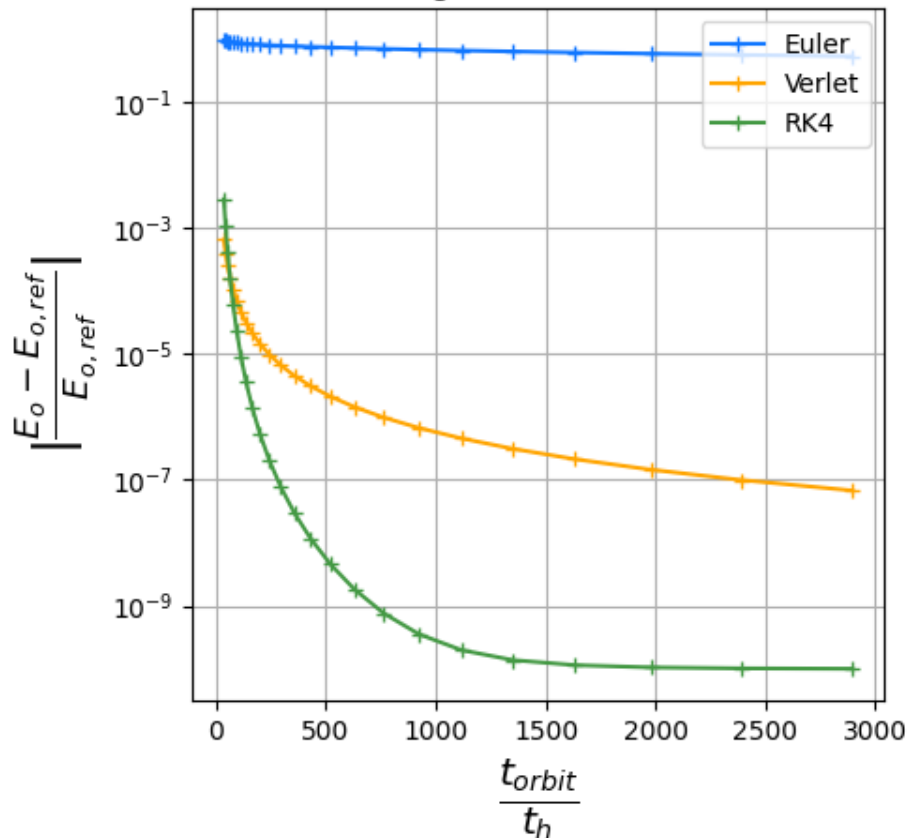


Satelliittien rataliikkeen ennustaminen: Tulokset

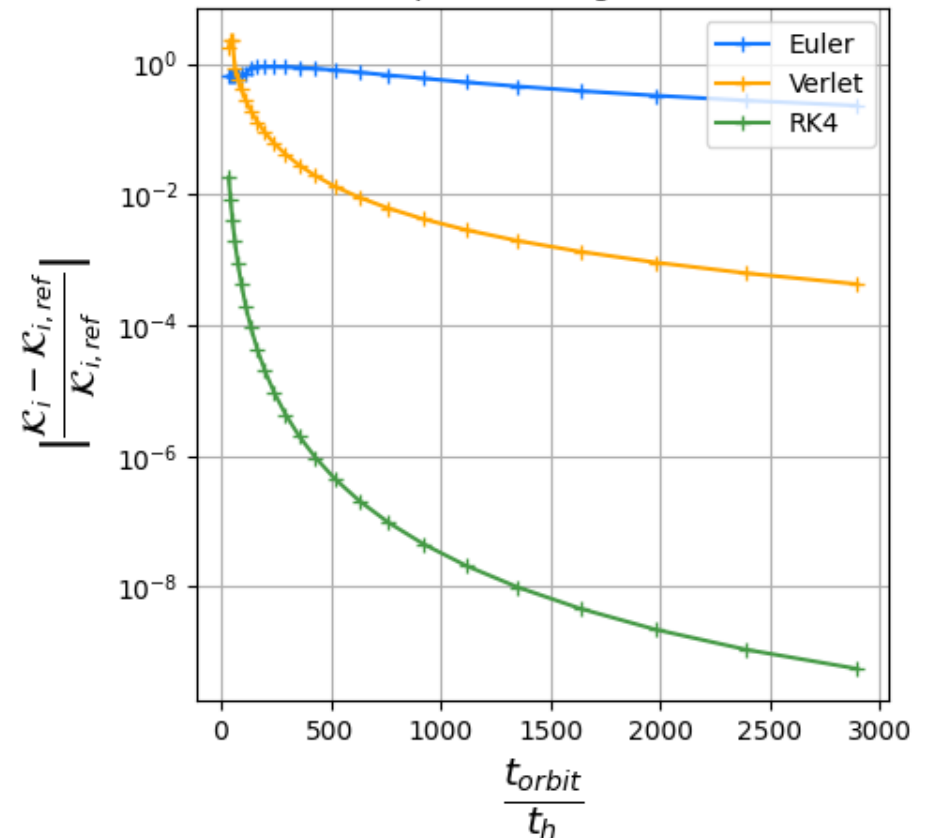


Satelliittien rataliikkeen ennustaminen: Tulokset

Rataenergian suhteellinen virhe

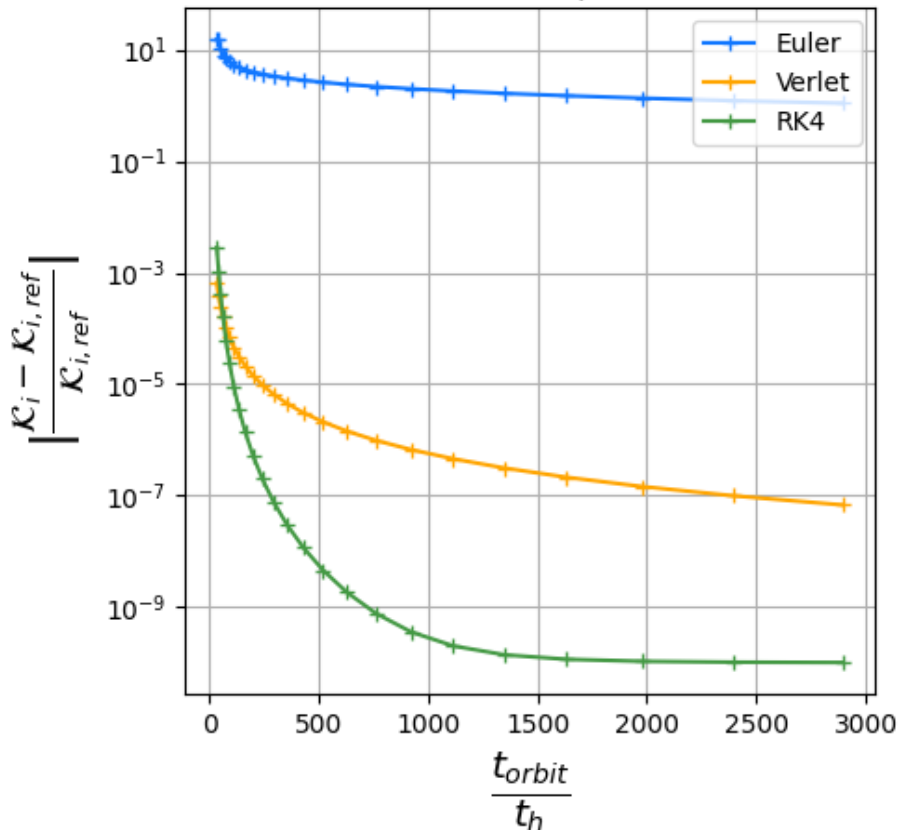


$\mathcal{K}_3$: perihelin argumentti

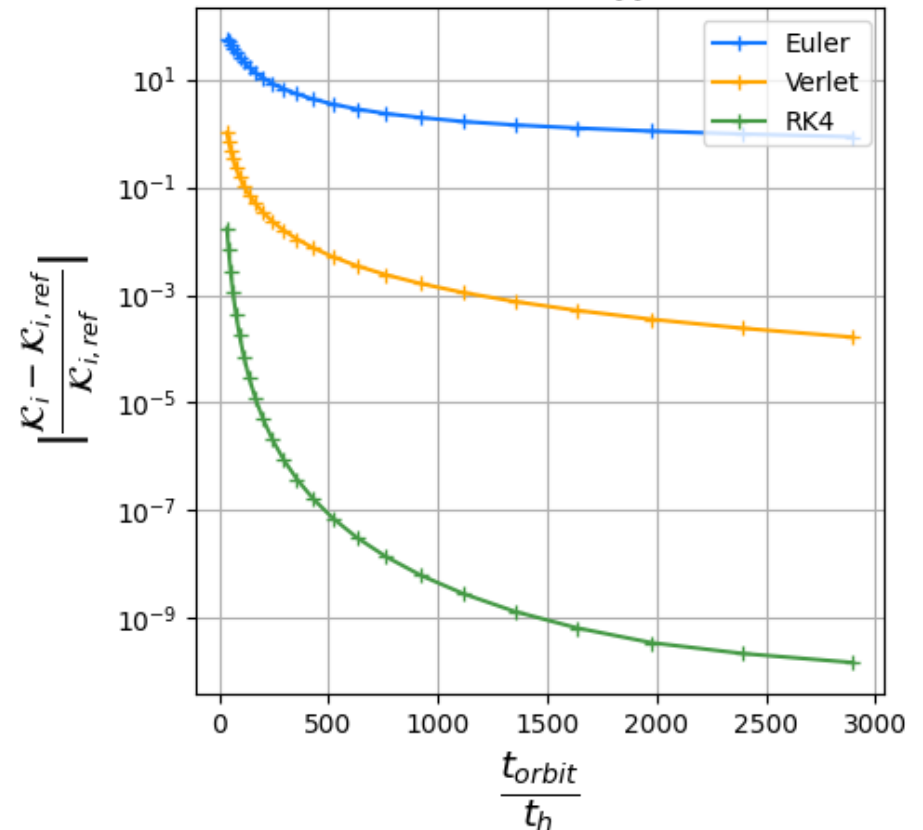


Satelliittien rataliikkeen ennustaminen: Tulokset

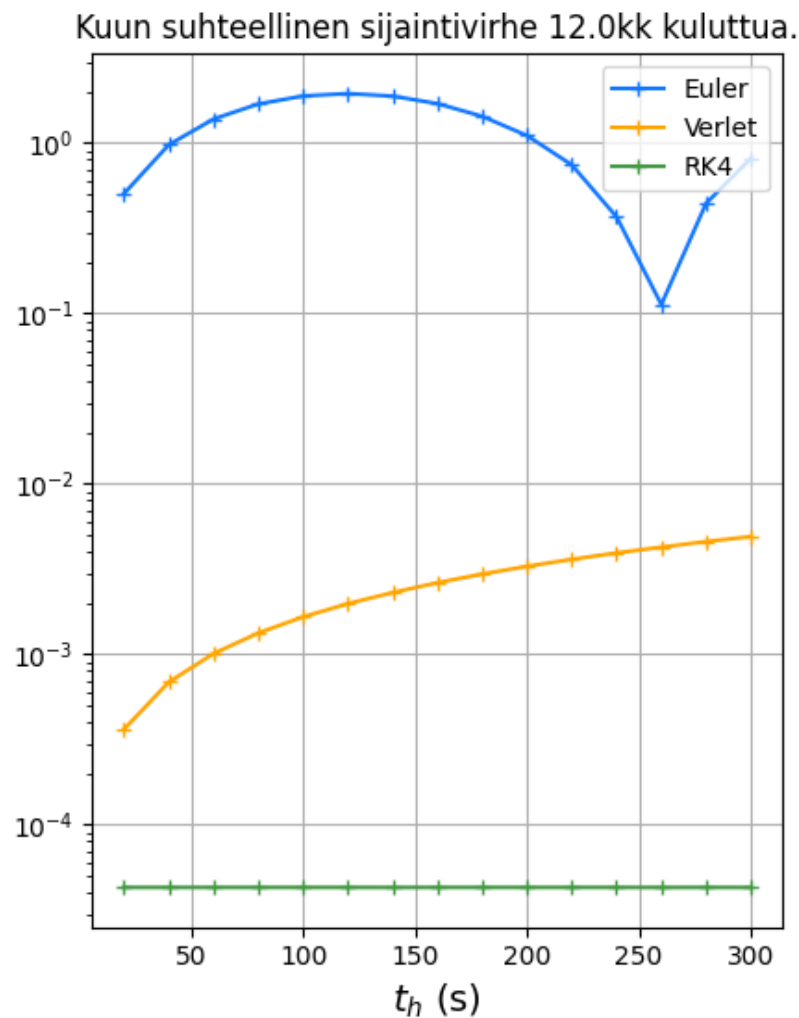
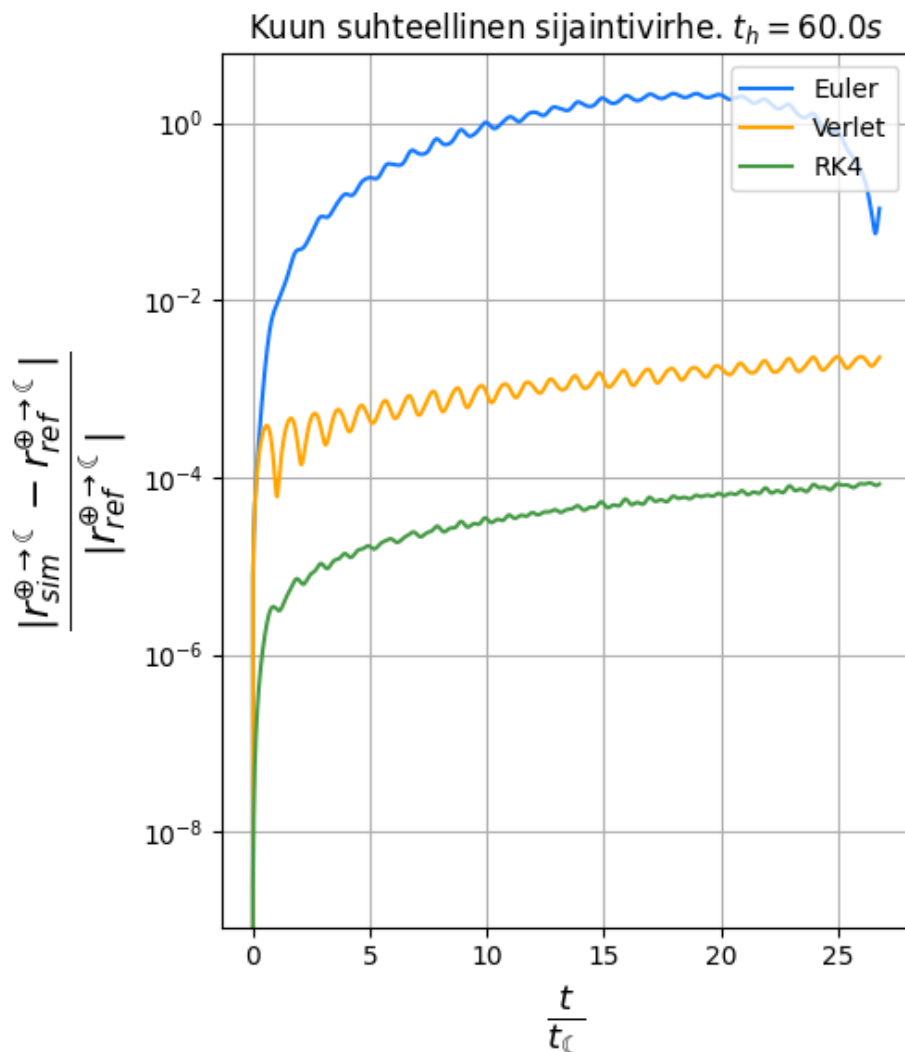
$\mathcal{K}_4$: isoakselin puolikas



$\mathcal{K}_5$: eksentrisyys

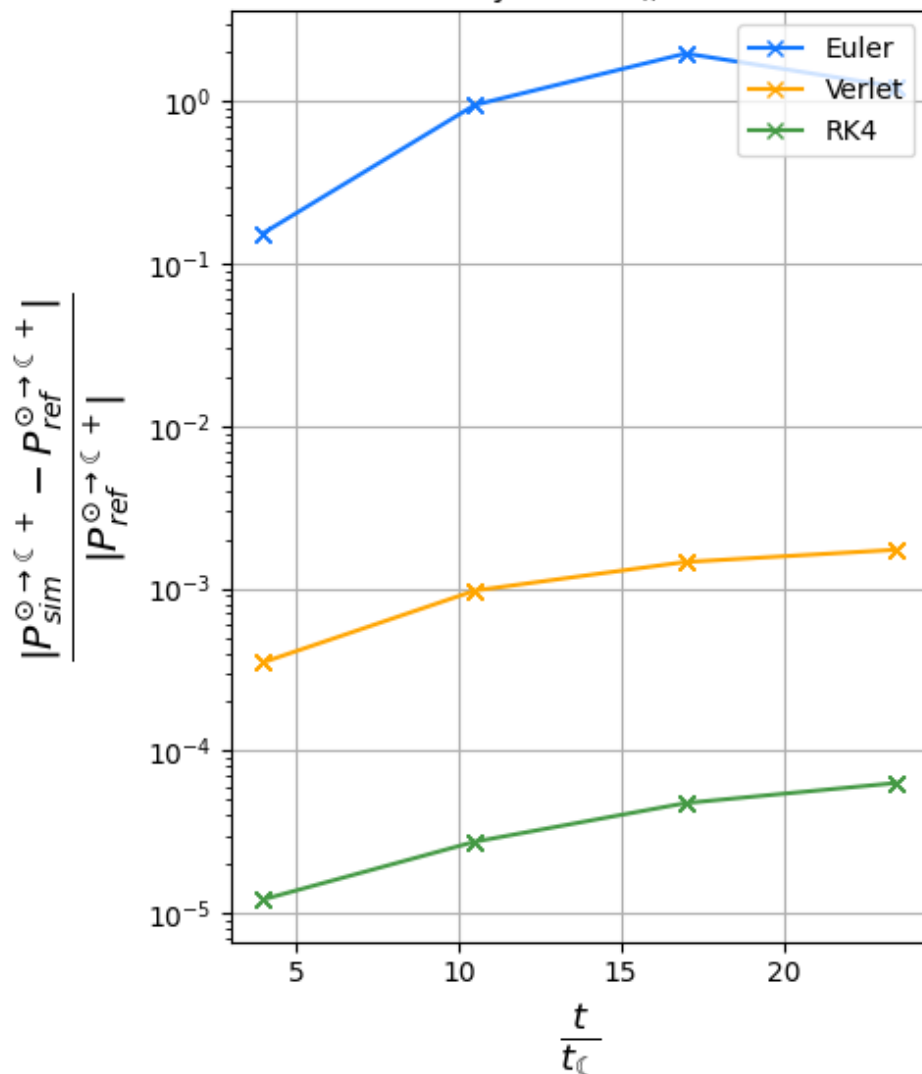


Satelliittien rataliikkeen ennustaminen: Tulokset

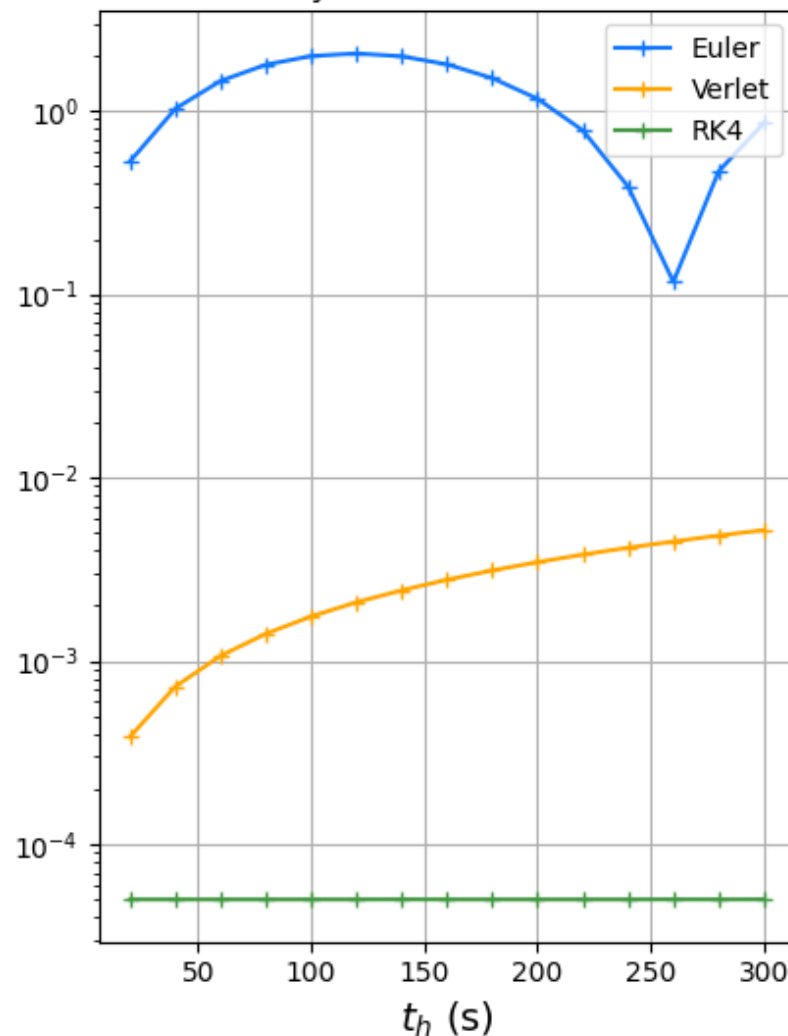


Satelliittien rataliikkeen ennustaminen: Tulokset

Pimennysvirhe. $t_h = 60.0s$

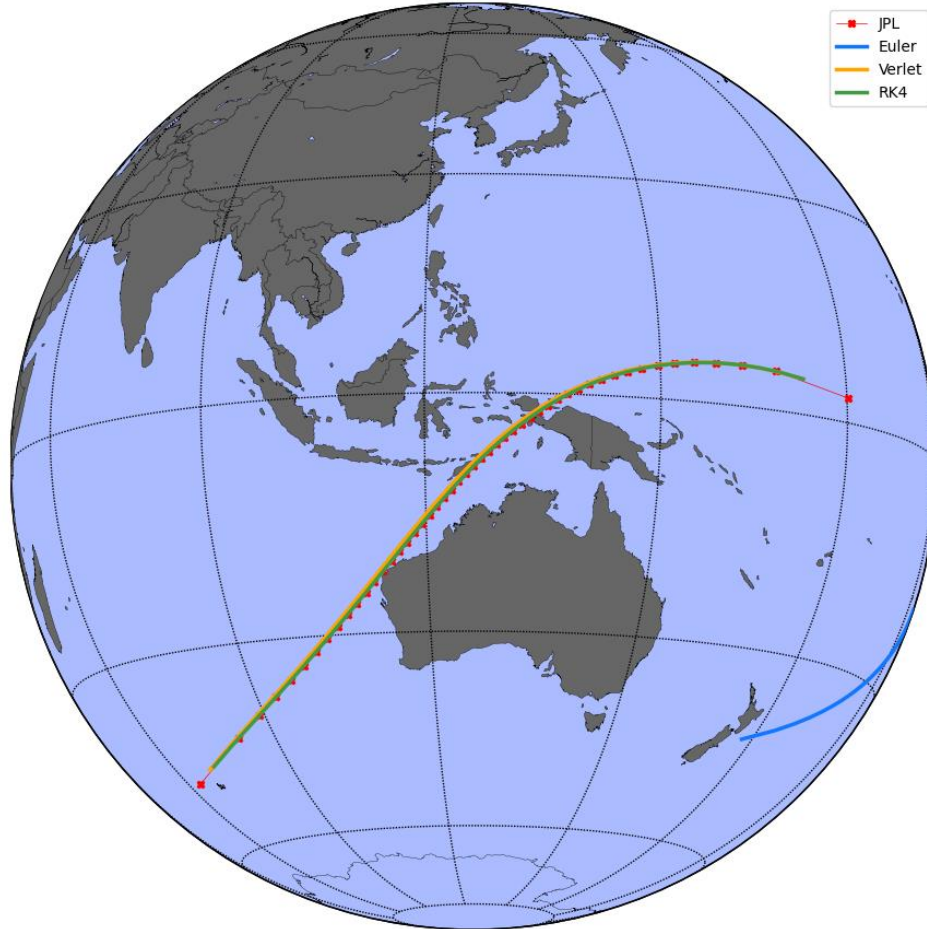


Pimennysvirhe 12.0kk kuluttua.

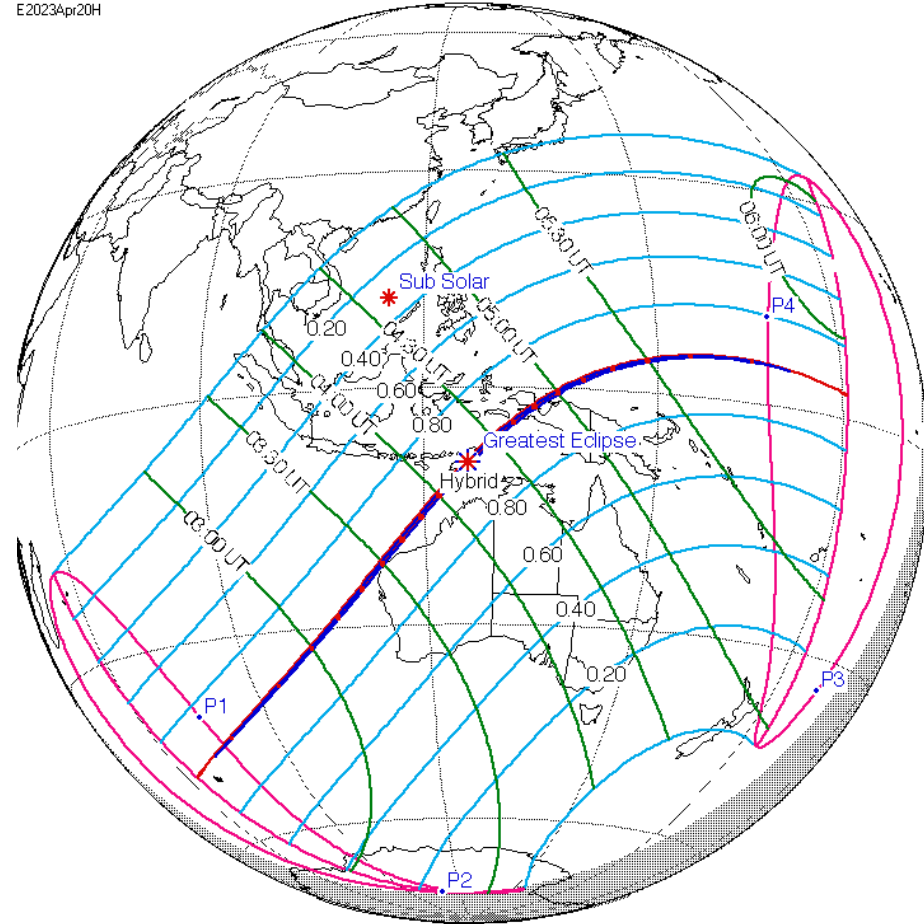


Tulokset

Pimennys 2023-04-20



E2023Apr20H



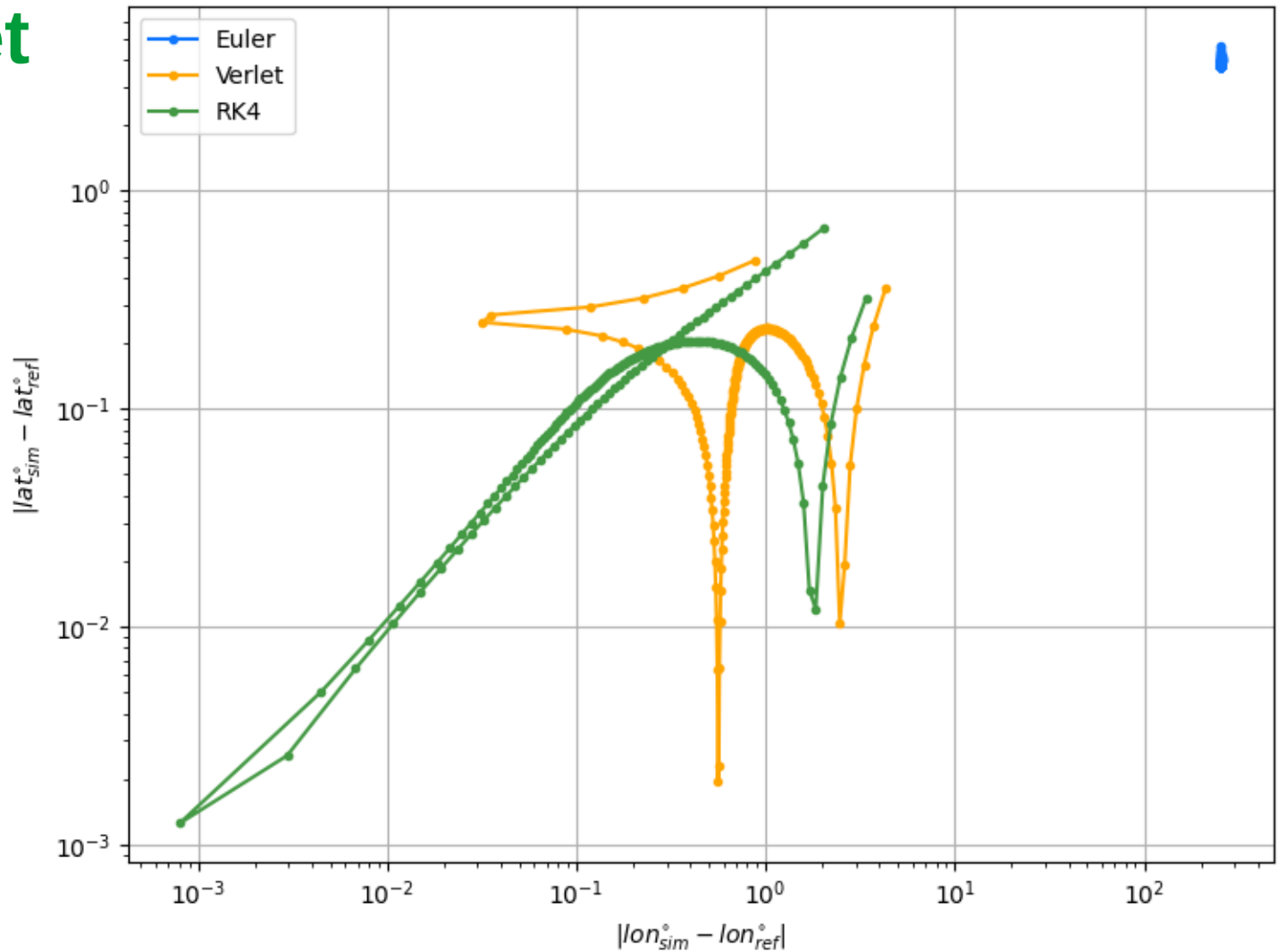
Tulokset



Tulokset

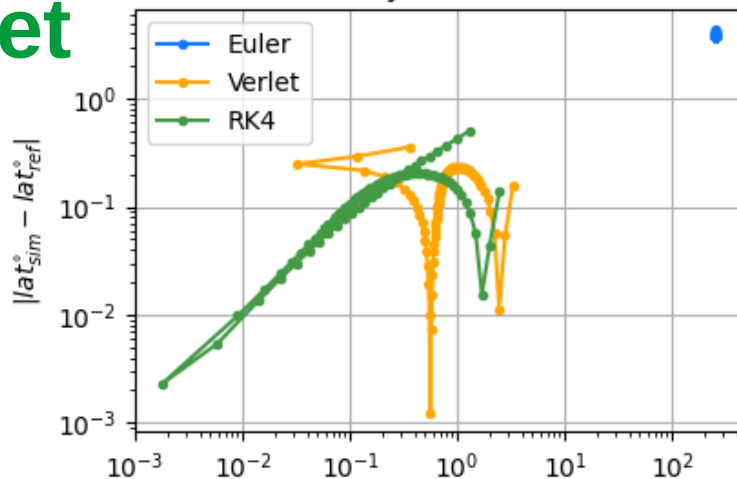


Tulokset

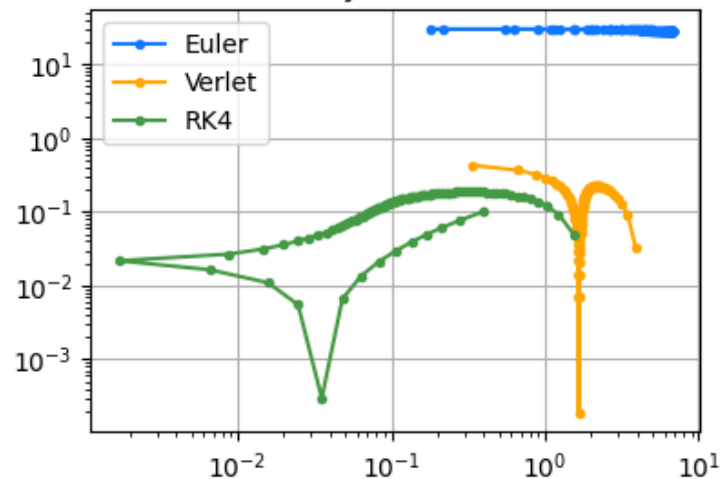


Tulokset

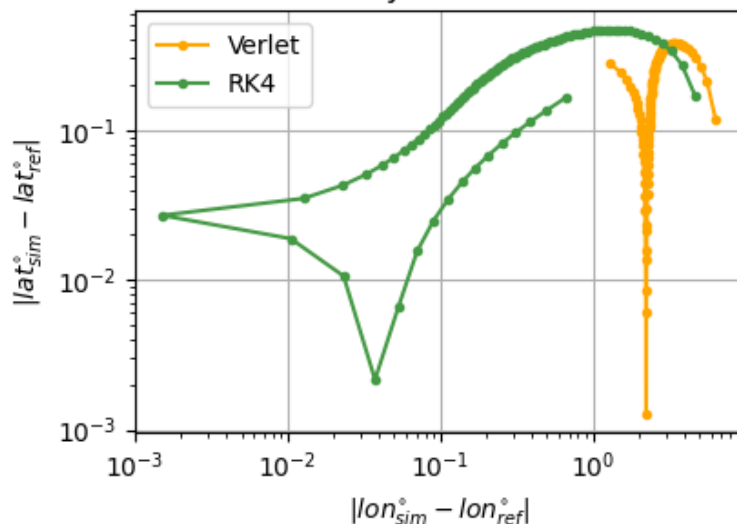
Pimennys 2023-04-20



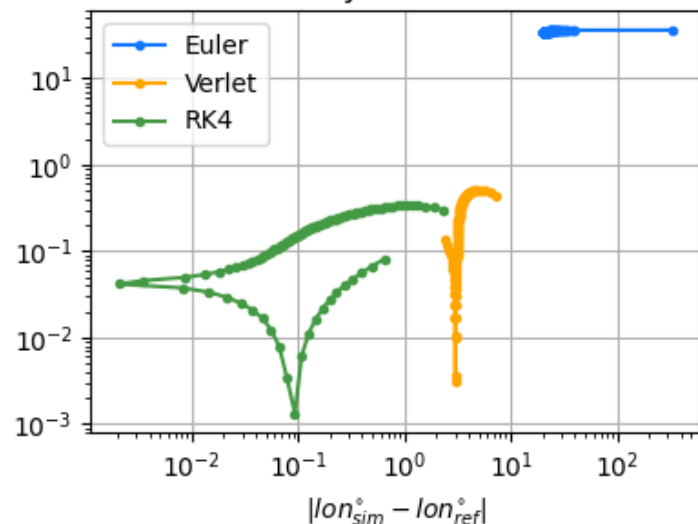
Pimennys 2023-10-14



Pimennys 2024-04-08



Pimennys 2024-10-02



Satelliittien rataliikkeen ennustaminen:

Päätelmät

- Eulerin metodi erottuu selkeästi puutteellisena numeerisen integroinnin tapana. Sen hyödyllisyys rajoittuu pedagogisiin tarkoituksiin.
- Verlet ja RK4 näyttäytyvät kelpoisina menetelminä. RK4 saavuttaa konsistentisti parempia tuloksia, tosin tällä toteutuksella n. 80% pidemmän laskenta-ajan kustannuksella samaa askelpituutta kohti.
- Mielenkiintoinen huomio: Verlet-integroinnin nimellinen symplektisyys ei takaa parempia tuloksia.

Satelliittien rataliikkeen ennustaminen:

Päätelmät

- Varsin yksinkertaiset algoritmitkin kykenevät saavuttamaan suhteellisen suuria tarkkuuksia pitkissä integraatioskaaloissa.

Satelliittien rataliikkeen ennustaminen: Huomioita & lähdedataa

- Taivaankappaleiden asemat peräisin NASAn alaisen JPL:n julkaisemasta Development Ephemeris 441 - taulukosta, jossa tarkat asemat auringolle, sekä planeetoille tuhansiksi vuosiksi eteenpäin.
- Efemeridien luontiprosessi vain osittain julkinen: käytettyjä integrointimenetelmiä ei paljasteta muutoin erinomaisessa JPL:n paperissa aiheesta.

Satelliittien rataliikkeen ennustaminen: Huomioita & lähdedataa

- HORIZONS-järjestelmä sisältää sijainteja ja rataparametreja joillekin sadoille tuhansille avaruuden objekteille (Kuita, asteroideja, komeettoja, avaruusluotaimia ...)
- Numeriikan ystäville: *numba* kykenee tuottamaan lähes C-toteutuksen veroisen kiihdytyksen oikein muotoillulle python-koodille
- Kysymyksiä?