

Computing approximate Nash equilibria in Action Graph Games with Iterated Polymatrix Approximation (valmiin työn esittely)

Joonas Nurmi

15.09.2025

Ohjaaja: Prof. Ahti Salo

Valvoja: Prof. Ahti Salo

Työn saa tallentaa ja julkistaa Aalto-yliopiston avoimilla verkkosivuilla. Muilta osin kaikki oikeudet pidätetään.

Sisältö

1. Tausta

1. Tavoitteet
2. Iterated Polymatrix Approximation –algoritmi
3. Action graph –muoto
4. Peliteoria ja Nashin tasapaino

2. Menetelmät

3. Tulokset

4. Yhteenveto

5. Viitteet

Työn tavoitteet

- 1) Toteuttaa IPA-algoritmi yksinkertaisille ja symmetrisille action graph –muotoisille peleille
- 2) Arvioida algoritmin tehokkuutta, nopeutta ja tarkkuutta ϵ -Nash-tasapainojen löytämisessä
- 3) Verrata tehokkuutta IPA:n toteutukseen normaalimuotoisille peleille

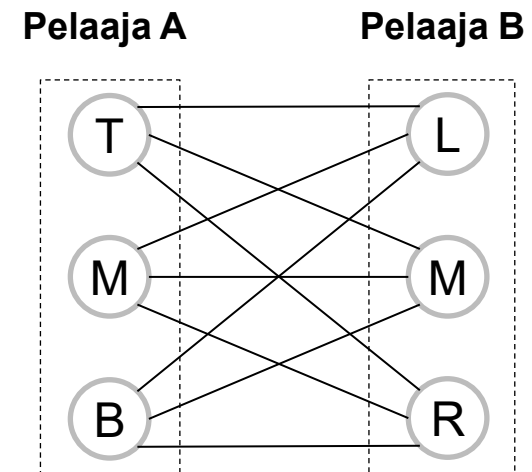
Iterated Polymatrix Approximation (IPA) –algoritmi

- Algoritmi ε -Nash-tasapainon nopeaan löytämiseen moninpeleissä [4]
- Perustuu pelien jakamiseen joukkoon kahden pelaajan välisiin pelejä ja näiden ratkaisemiseen parhaan strategian löytämiseksi
- Siirtyy iteratiivisesti kohti paikallista minimiä kuten gradienttimenetelmä
- Laskennallisesti raskain osa on jakobiaanin laskeminen minimin löytämiseksi

Normaalimuoto vs Action graph –muoto (AGG)

- Normaalimuoto on yleisin tapa esittää kahden pelaajan pelejä
 - Koko kasvaa eksponentiaalisesti pelaajien määrän suhteen
- Vaihtoehtona action graph –muoto, jossa strategiavalinnat esitetään solmuina ja vuorovaikutukset linkkeinä [2]
 - Uuden pelaajan lisääminen vaatii vain lisäsolmuja ja -linkkejä
- Nopeuttaa myös pelien jakobiaanin laskemista [3]

		Pelaaja B		
		L	M	R
Pelaaja A	T	2/1	3/2	5/4
	M	3/3	2/1	4/2
	B	1/5	4/4	3/3



Peliteoria ja Nashin tasapaino

- Peliteoria tutkii useamman pelaajan järjestelmiä, jossa kunkin pelaajan tulos voi riippua muiden pelaajien strategioista
- Keskeinen taloustieteessä, operaatiotutkimuksessa, yhteiskuntatieteissä
- Nashin tasapaino: Yksikään pelaaja ei voi yksinään parantaa tulostaan, jos muut pelaajat eivät muuta strategioitaan [1]
- Laskennallisilla menetelmillä voi olla vaikeaa löytää Nashin tasapainoa, sen sijaan etsitään likiarvoista ϵ -Nash-tasapainoa

Menetelmät

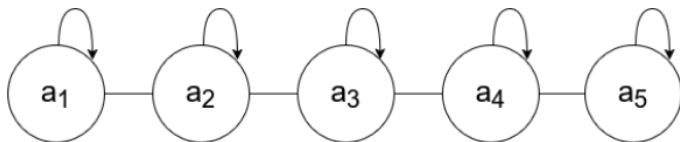
- Kaksi samankaltaista peliä: Beach game ja Coffee shop game
 - Pelaajilla samat valinnat: pelilaudan kentät
 - Kenttien satunnaiset arvot alustetaan niin, että pelaajien tuloksena olevat voitot ovat edelleen positiivisia
- Algoritmi ajetaan erikokoisilla pelilaudoilla (m) ja pelaajamäärillä (n) 100–10 000 kertaa
 - Kierrosten lukumäärän ja suoritusaja enimmäisrajoitukset 10^5 kierrosta ja 900s
 - Kerroista kerätään iteraatioiden lukumäärä, laskenta-aika, pysäyttämisen syy (ratkaistu, maksimikierrosmäärä tai suoritusaja ylitetty)

Valitut pelit ja pelilaudat

Beach game

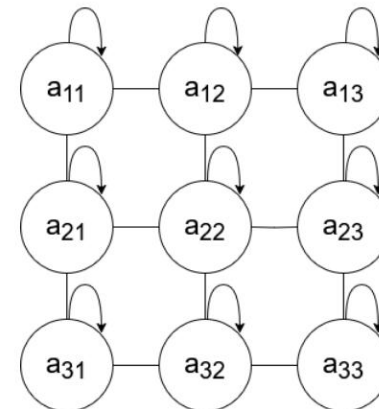
Pelaajat valitsevat rannan varrelta paikan, jossa myyvät jäätelöä

Muut myyjät samassa paikassa tai vieressä vähentävät myyntiä



Coffee shop game

Pelaajat valitsevat ristikonmuotoisesta kaupungista paikan, johon perustavat kahvilan



Tulokset: Beach game

n	m	Avg time for solving (s)	Out of time (%)	Out of iterations (%)
3	10	0.17	0	0.31
4	10	0.21	0	0.1
5	10	0.41	0	0.1
6	10	0.71	0	0.2
7	10	1.16	0	0.5
8	10	5.23	0.2	0.2
9	10	26.18	0.3	0
10	10	35.88	0.7	0
15	10	392.2	31	0
20	10	804.5	98	0

Tulokset: Coffee shop game

n	m	Avg time for solving (s)	Out of time (%)	Out of iterations (%)
5	3x3	0.85	0	0
10	3x3	14.67	0	0
15	3x3	294.15	14	0
20	3x3	2088.21*	91*	0
5	4x4	1.22	0	0.2
10	4x4	44.37	1	0
15	4x4	762.47	97	0
20	4x4	-	100	0
5	5x5	2.02	0	0.2
10	5x5	517.75	70	0
15	5x5	-	100	0

Tulokset: Vertailu IPA-algoritmiin normaalimuotoisilla peleillä

- Tulokset normaalimuotoisille peleille alkuperäisestä artikkelista [4]
- Peleille laskettu ratkaisuaikojen skaalautuvuus suhteessa edeltävään pelaajamäärään kaavalla $(\text{time}_n / \text{time}_{n-1})$

n	Normal form ($m=4$)	AGG form ($m=10$)
4	41.4	1.2
5	4.7	2.0
6	10.6	1.7
7	3.0	1.6

Yhteenveto

- Jakobiaanin laskeminen pelien action graph -muodon avulla parantaa IPA-algoritmin skaalautuvuutta huomattavasti
- Algoritmi löytää ϵ -Nash-tasapainon tehokkaasti lukuun ottamatta pientä osaa tapauksista, jotka voivat johtua lokaaliin minimiin juuttumisesta
- Pelin koon kasvaessa minimiin konvergoitumisen aika vie suoritusajalle asetettua enimmäisaikaa kauemmin

Viitteet

- [1] John F Nash Jr. Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, 54(2):286–295, 1951
- [2] Albert Xin Jiang, Kevin Leyton-Brown, and Navin AR Bhat. Action-graph games. *Games and Economic Behavior*, 71(1):141–173, 2011.
- [3] Navin AR Bhat and Kevin Leyton-Brown. Computing Nash equilibria of action-graph games. In *Proceedings of the 20th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 35–42, 2004.
- [4] Srihari Govindan and Robert Wilson. Computing Nash equilibria by iterated polymatrix approximation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28(7):1229–1241, 2004.