

ARMA-mallin takaisinotanta- luottamusväleistä (valmiin työn esittely)

Jere Niemi

20.07.2023

Ohjaaja: *Prof. Pauliina Ilmonen*

Valvoja: *Prof. Pauliina Ilmonen*

Työn saa tallentaa ja julkistaa Aalto-yliopiston avoimilla verkkosivuilla. Muilta osin kaikki oikeudet pidätetään.

Taustaa

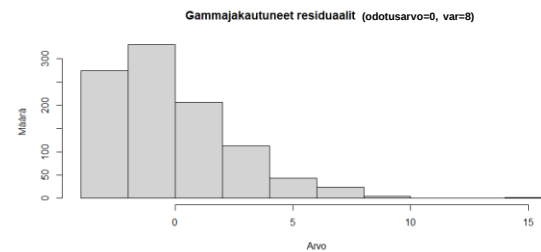
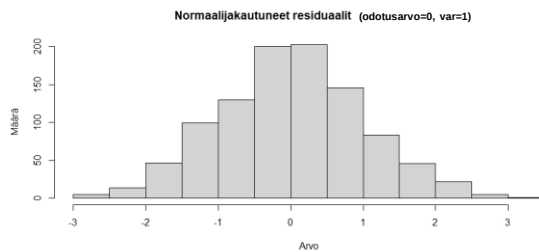
- Aikasarjojen parametrien estimoinnilla on sovellutuksia kaikkialla, missä käsitellään aikasarjadataa – erityisesti talousmatematiikassa
- Takaisinotanta-algoritmi on tunnetusti hyvä tapa ARMA-mallin parametrien estimointiin
- Monet perinteiset menetelmät oletettavan mallin virhetermien olevan normaalijakautuneita, mutta takaisinotanta ei vaadi tätä
- On kiinnostavaa tietää, miten hyvin algoritmi suoriutuu erilaisille virhejakaumille, koska tosielämässä virheet voivat olla jakautuneet monin tavoin

Tutkimuksen tavoitteet

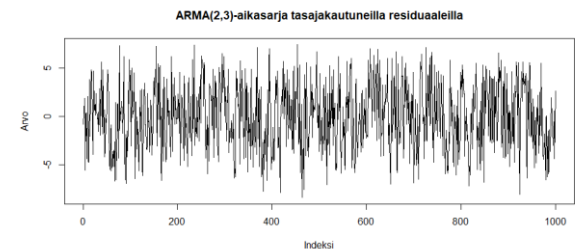
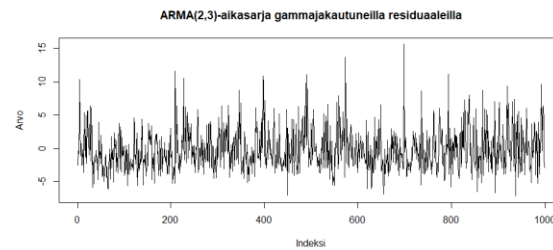
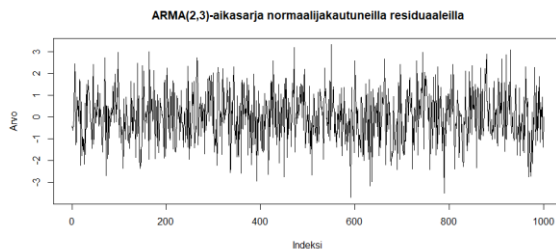
- Työn tavoitteina oli tutkia ARMA-mallin luottamusvälien hyvyttä varioimalla kolmea asiaa
 - Virhejakaumaa
 - Tutkittavat jakaumat olivat normaalijakauma, vino gammajakauma ja tasajakauma
 - Kaikkia jakaumatyyppejä yhdisti se, että virheiden varianssi oli äärellinen ja odotusarvo 0
 - Luottamustasoa
 - Valitut luottamustasot olivat 50%, 80% ja 90%
 - Alkuperäisen aikasarjan pituutta
 - Tutkittavat pituudet olivat 100, 500 ja 1000 elementtiä

Tutkittavat residuaalijakaumat ja aikasarjat

Residuaalit



Aikasarjat



Tutkimuksessa käytetty aineisto

- Tutkittiin ARMA(2,3)-mallia
- Tutkimuksessa käytettävä aineisto generoitiin keinotekoisesti
 - Residuaalit generoitiin jokaiselle jakaumatyypille satunnaisesti hyödyntämällä käytettävän ohjelmiston satunnaislukuja
 - Aineiston kolme ensimmäistä arvoa otettiin samasta satunnaislukujausjakaumasta, josta residuaalit generoitiin
 - Loput aikasarjan arvoista saatiin edellisiä arvoja ja virheitä hyödyntäen

ARMA ja takaisinotanta

$$x(t) = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \cdots + \phi_p x_{t-p} + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q} + \epsilon_t$$

- ARMA-mallien takaisinotanta – toistetaan vaiheet 1-4 n kertaa.
 1. Luodaan satunnaisesti otoksen pituus
 2. Valitaan satunnaisesti aloituspiste
 3. Tehdään otos - irrotetaan palanen alkuperäisestä datasta
 4. Hyödynnetään R:n `arima()`-funktioita parametrien estimointiin tälle otokselle
- Haluttu luottamusväli saatiin laittamalla saadut estimaatit suuruusjärjestykseen ja katkaisemalla ylä- ja alapää

Takaisinotanta

Minimipituus = 10
Aikasarjan pituus = 1000

1. Generoidaan satunnainen pituus väliltä 10-1000

123

2. Valitaan satunnainen aloituspiste (indeksi) aikasarjalta väliltä 1-878



3. Tehdään otos alkuperäisestä aineistosta

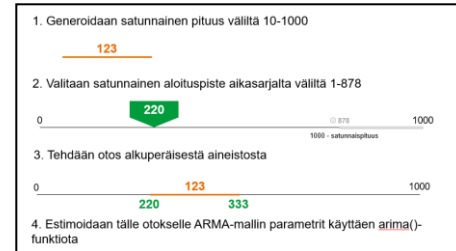


4. Estimoidaan tälle otokselle ARMA-mallin parametrit käyttäen R:n sisäänrakennettua `arima()`-funktiota

Luottamusvälien muodostaminen

1. Takaisinotanta-algoritmi suoritettiin 1000 kertaa ja jokaisen parametrin osalta saadut tulokset asetettiin suuruusjärjestykseen

1000 x



2. Edellisen vaiheen jälkeen käsissämme oli jokaiselle ARMA-mallin parametrille 1000 estimaattia. Seuraavaksi luotiin takaisinotantaluottamusväli ja katkaistiin ylä- ja alapäästä "hännät" pois

1 Luottamustaso α :n sisällä olevat parametrit 1000

Esimerkki: valitaan luottamustasoksi 90 %

1 90% sisällä olevat parametrit 1000
51 950

Tutkimuksen kulusta

- Edellä kuvattu takaisinotanta-algoritmi suoritettiin jokaiselle tutkittavalle tapaukselle 100 kertaa
- Jokaisen syklin alussa tutkittava aineisto luotiin uudelleen
- Otettiin talteen seuraavat asiat
 - Kuinka monta kertaa luottamusväli kattoi oikean parametrin
 - Kuinka monta kertaa nolla osui luottamusvälille
 - Tunnuslukuja: pisimmän luottamusvälin pituus, lyhimmän luottamusvälin pituus, luottamusvälin pituuden varianssi ja keskiarvo sekä luottamusvälin keskimääräiset ylä- ja alarajat
 - Kuinka monta kertaa arima()-funktio ei onnistunut löytämään ratkaisua

Tulokset – virhejakaumatyyppin vaikutukset luottamusvälin hyvyyteen

Luottamusväli kattaa oikean parametrin (kerrat)

Parametri	Normaalijakauma	Gammajakauma	Tasajakauma
ϕ_1	85	87	89
ϕ_2	80	78	81
θ_1	86	86	85
θ_2	82	85	81
θ_3	80	79	78

Vertailuarvot

Luottamustaso = 80 %
Aikasarjan pituus = 1000

- Havaittiin, että jakaumatyypistä riippumatta luottamusväli kattoi oikean tunnetun parametrin hieman useammin kuin olisi pitänyt → luottamusväli oli konservatiivinen
- Jakaumatyypillä ei ollut vaikutusta tuloksiin

Tulokset – tutkimukset eri luottamustasoilla (50 % ja 90 %)

Luottamusväli kattaa oikean parametrin (kerrat, 50 % luottamustaso)

Parametri	Normaalijakauma	Gammajakauma	Tasajakauma
ϕ_1	41	33	37
ϕ_2	44	44	47
θ_1	40	42	36
θ_2	41	37	36
θ_3	44	46	42

Luottamusväli kattaa oikean parametrin (kerrat, 90 % luottamustaso)

Parametri	Normaalijakauma	Gammajakauma	Tasajakauma
ϕ_1	99	97	99
ϕ_2	96	96	91
θ_1	99	97	100
θ_2	95	94	93
θ_3	97	96	95

- Havaittiin, että 50 % luottamustasolla kaikilla jakaumatyypeillä luottamusväli kattoi oikean parametrin harvemmin kuin olisi pitänyt
- Vastaavasti 90 % luottamustasolla tuloksena saatu luottamusväli kattoi kaikilla jakaumatyypeillä oikean parametrin useammin kuin olisi pitänyt

Tulokset – tutkimukset eri aikasarjojen pituuksilla (100 ja 500 elementtiä)

Luottamusväli kattaa oikean parametrin (kerrat, 500 elementin aikasarja)

Parametri	Normaalijakauma	Gammajakauma	Tasajakauma
ϕ_1	86	86	81
ϕ_2	74	88	78
θ_1	85	84	88
θ_2	85	90	75
θ_3	80	88	82

Luottamusväli kattaa oikean parametrin (kerrat, 100 elementin aikasarja)

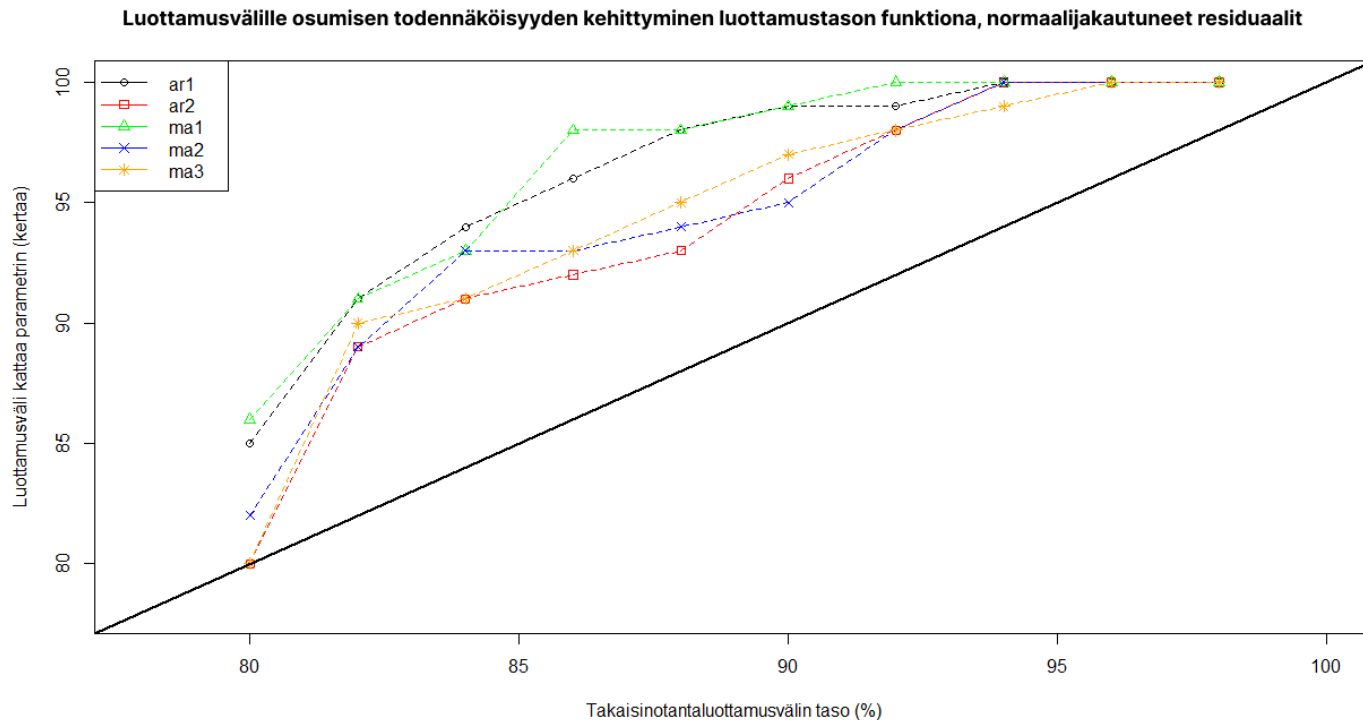
Parametri	Normaalijakauma	Gammajakauma	Tasajakauma
ϕ_1	77	81	87
ϕ_2	81	87	85
θ_1	93	92	92
θ_2	89	94	89
θ_3	91	87	89

- Havaittiin, että kun aikasarjan pituutta lyhennettiin, epätarkkuus kasvoi
- 500 elementin aikasarjan tulokset kuitenkin melko lähellä vertailukohtaa (1000 elementin aikasarjaa)
- 100 elementin aikasarjassa hajontaa eri parametrien osalta voidaan havaita jo enemmän

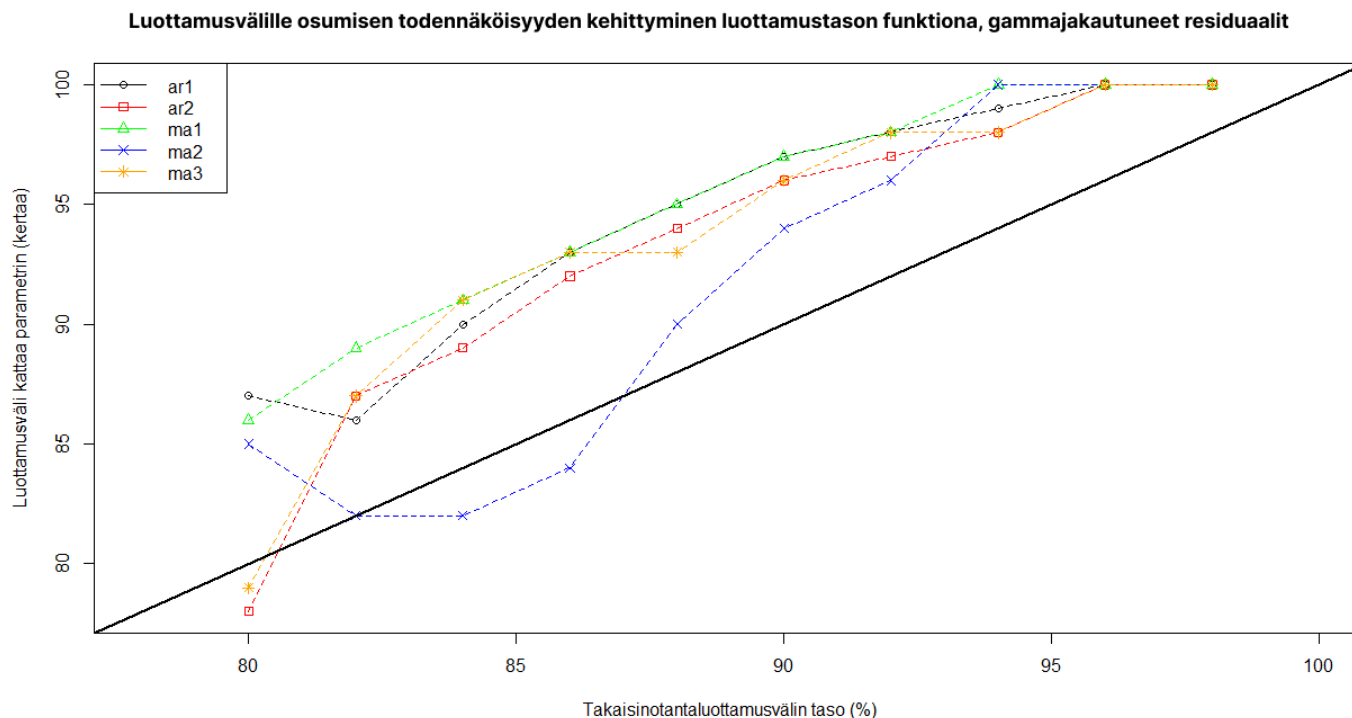
Tulokset – luottamusvälille osumisen kehittyminen luottamustason funktiona

- Luottamustason vaikutuksissa luottamusvälien hyvyyteen havaittiin säännönmukaisuutta – 50 % luottamustasolla luottamusväli kattoi oikean parametrin harvemmin, kun taas 80 % ja varsinkin 90 % luottamustasoilla huomattavasti useammin kuin olisi pitänyt
- Tutkittiin, kuinka luottamusvälille osumisen todennäköisyys kehittyy luottamustason funktiona kahden prosenttiyksikön nousuin 80-98 % luottamustasoille
- Havaittiin, että riippuvuus ei ollut lineaarista, mutta kaikille virhejakaumatyypeille samankaltaista

Tulokset – luottamusvälille osumisen kehittyminen luottamustason funktiona normaalijakautuneille residuaaleille



Tulokset – luottamusvälille osumisen kehittyminen luottamustason funktiona gammajakautuneille residuaaleille



Tulokset – luottamusvälille osumisen kehittyminen luottamustason funktiona tasajakautuneille residuaaleille

