



Aalto-yliopisto
Perustieteiden
korkeakoulu

State-Space Inference in Gaussian Process Regression Models (valmiin työn esittely)

Jukka Koskenranta

09.09.2013

Ohjaaja: *TkT Simo Särkkä*

Valvoja: *Prof Harri Ehtamo*

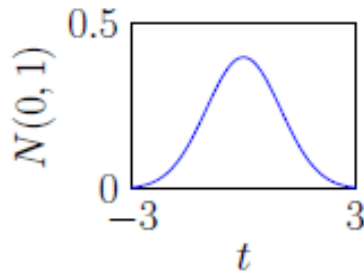
Työn saa tallentaa ja julkistaa Aalto-yliopiston avoimilla verkkosivuilla. Muilta osin kaikki oikeudet pidätetään.

Sisältö

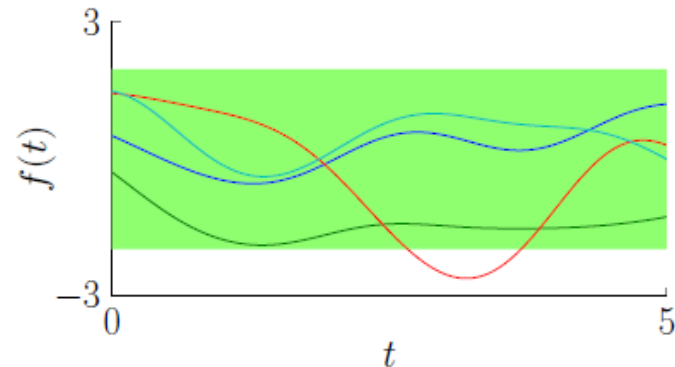
- Mallit ja menetelmät
 - Gaussinen prosessi
 - Estimointi gaussisilla prosesseilla
 - Tila-avaruusmallit
 - Muunto gaussiseksi tila-avaruusmalliksi
- Sovellusesimerkit
 - Vertailu
 - Ennustaminen
- Yhteenveto

Gaussinen prosessi

- Gaussinen prosessi on moniulotteisen normaalijakauman yleistys ääretönulotteiseksi
- Keskiarvo- ja kovarianssifunktio karakterisoivat gaussisen prosessin



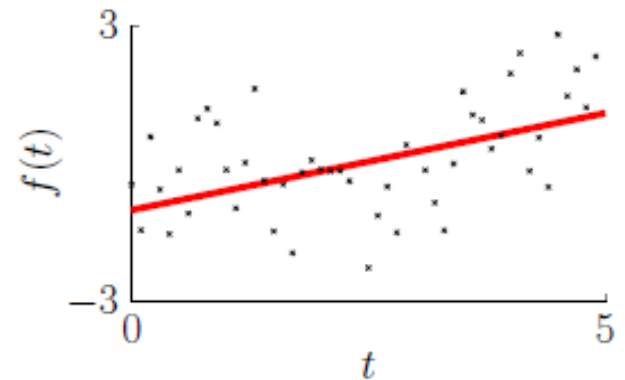
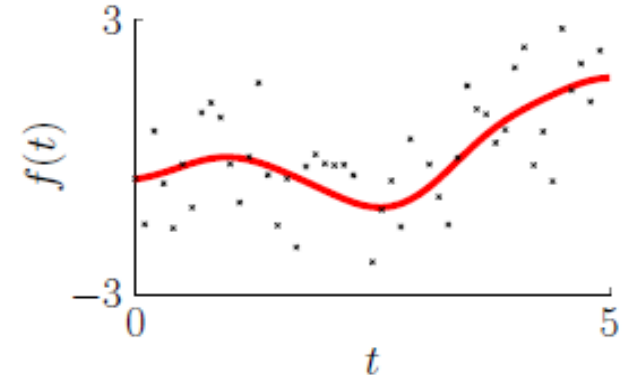
Normaalijakauma



Satunnaisvetoja
gaussisesta prosessista

Estimointi gaussisilla prosesseilla

- Estimoidaan funktiota $f(t)$ oletuksella, että se on gaussinen prosessi
- Aineiston sisäisiä riippuvuuksia mallinnetaan kovarianssifunktiolla, eikä esim. lineaarisilla kertoimilla
- Moneen paikkaan soveltuva, mutta laskennallisesti raskas, $O(n^3)$, n pisteiden lukumäärä



Tila-avaruusmalli

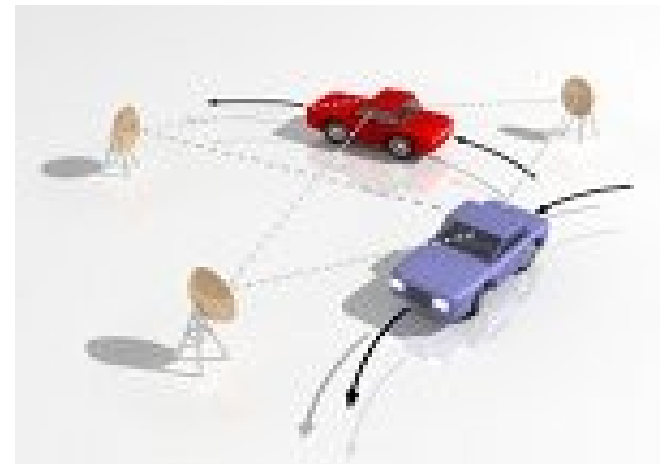
- Tiladynamiikkaa kuvataan differentiaaliyhtälöllä

$$\frac{df(t)}{dt} = \mathbf{F}f(t) + \mathbf{L}w(t)$$

- Tilasta pystytään mittaamaan diskreetisti arvoja

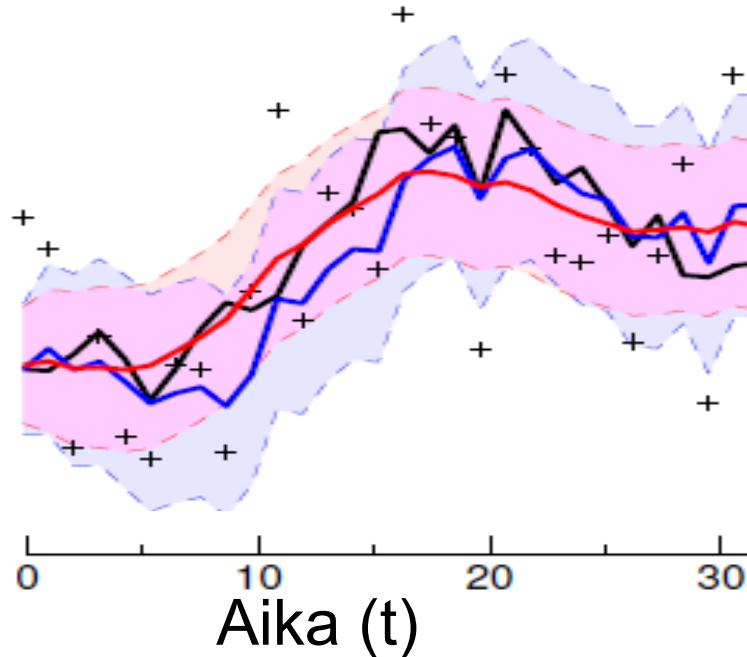
$$y_k = \mathbf{H}f(t_k) + \epsilon_k$$

- Mittaukset ei välttämättä kohdistu suoraan tilaan ja mittauksessa mukana häiriöitä



Kalmanin suodin ja silotin

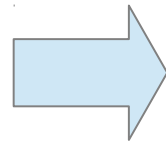
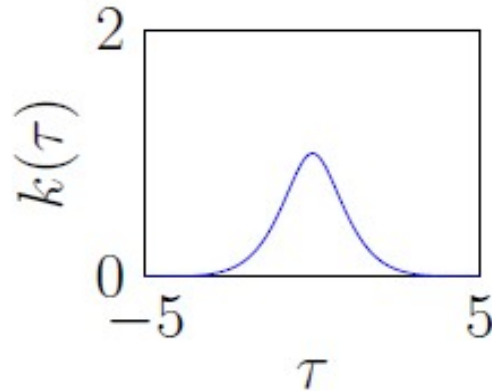
- Tehokkaat ratkaisualgoritmit tila-avaruus mallille, $O(n)$,
 n pisteiden lukumäärä



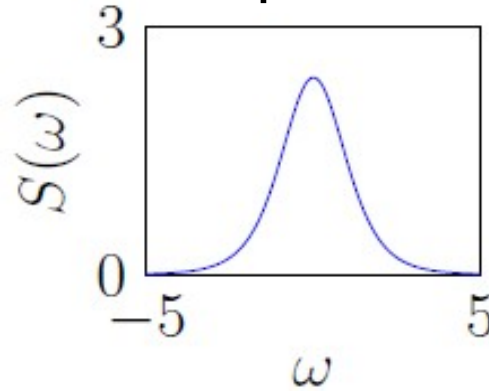
- Todellinen tila
- + Häiriöllinen mittaus
- Suotimen estimaatti
- Suotimen varianssi
- Silottimen estimaatti
- Silottimen varianssi

Muunto gaussiseksi tila-avaruusmalliksi

Regression priori
kovarianssi

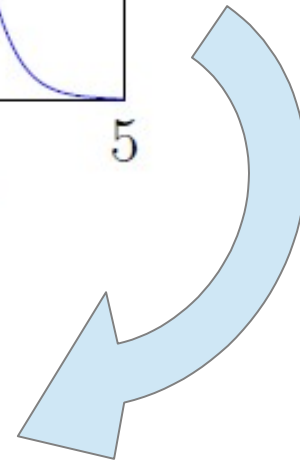


Spektri



Tila-avaruusmuoto

$$\frac{df(t)}{dt} = \mathbf{F}f(t) + \mathbf{L}w(t)$$
$$y_k = \mathbf{H}f(t_k) + \epsilon_k$$

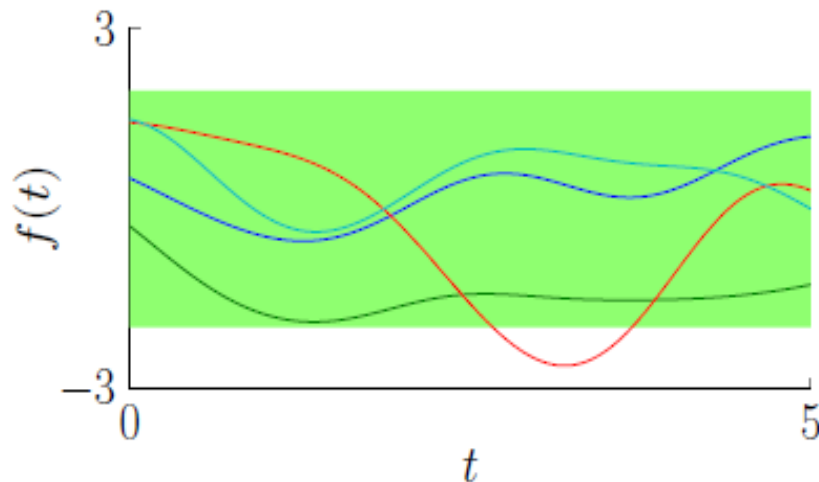


Sovellusesimerkit - vertailu

- Regressio GP:n avulla ja sama regressio tila-avaruusmallilla
- Verrataan laskenta-aikaa ja tulosta
- Aineisto generoitu priorista
- Toisessa sovelluksessa käytetään aitoa aineistoa

Sovellusesimerkit - vertailu

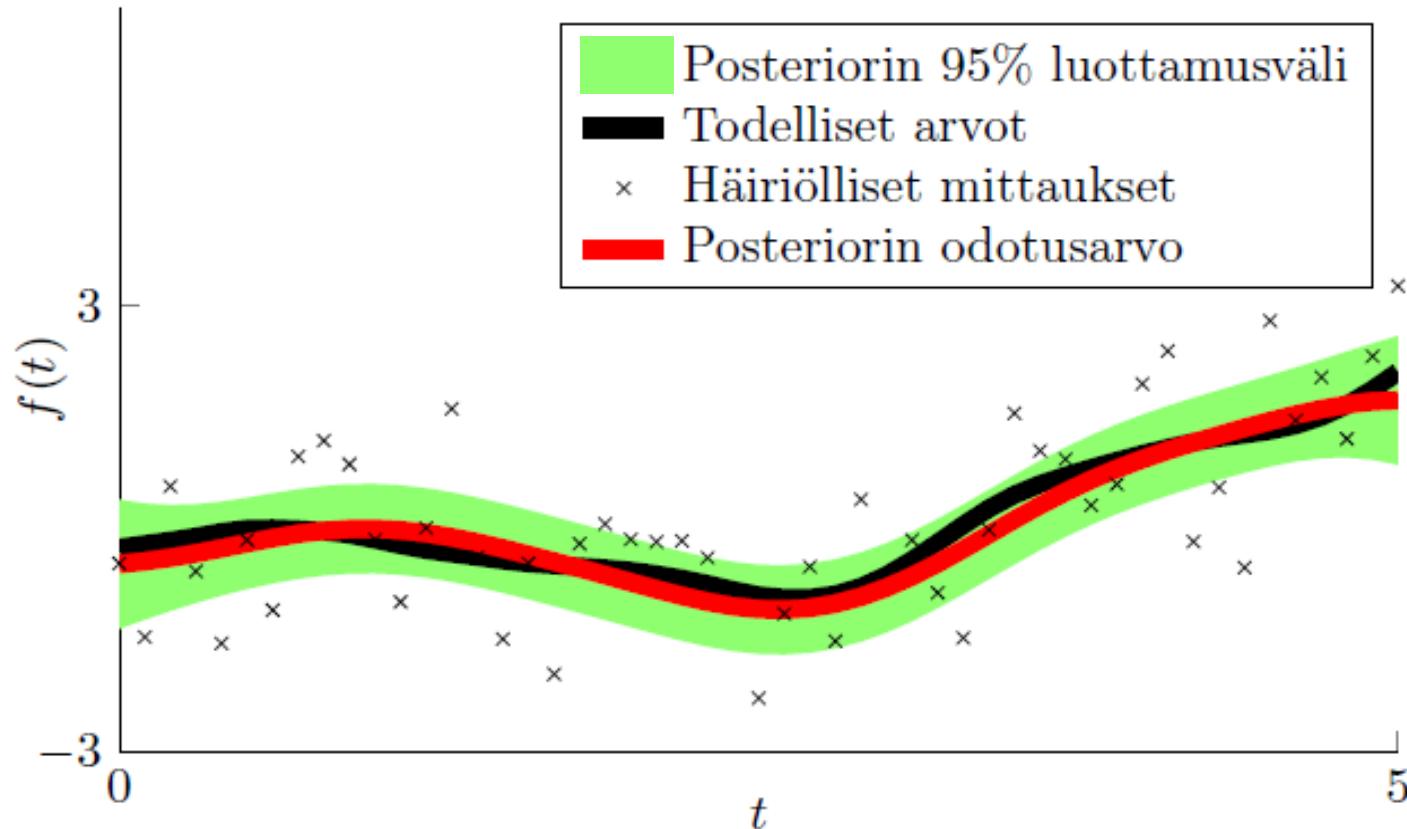
- Priorina Matérn-kovarianssifunktio, parametrien arvot:
 - $\nu = 7/2$ (sileytparametri)
 - $\ell, \sigma^2 = 1$ (skaalauskerroimet akselien suhteen)



- Priorin 95% luottamusväli
- Satunnaisvetoja priorista

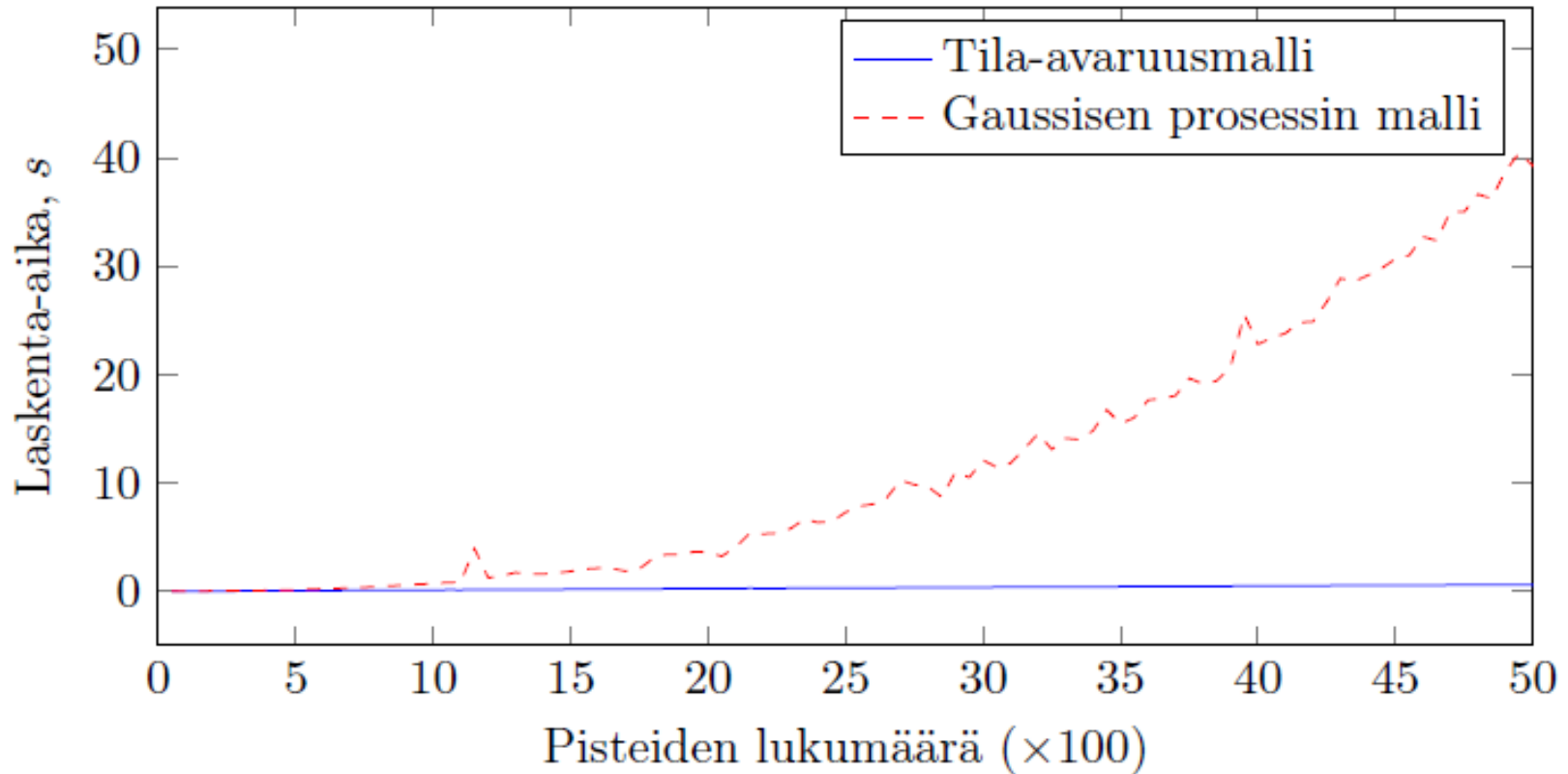
Sovellusesimerkit - vertailu

Regression tulos, posteriori



Sovellusesimerkit - vertailu

Regressioaikojen vertailu

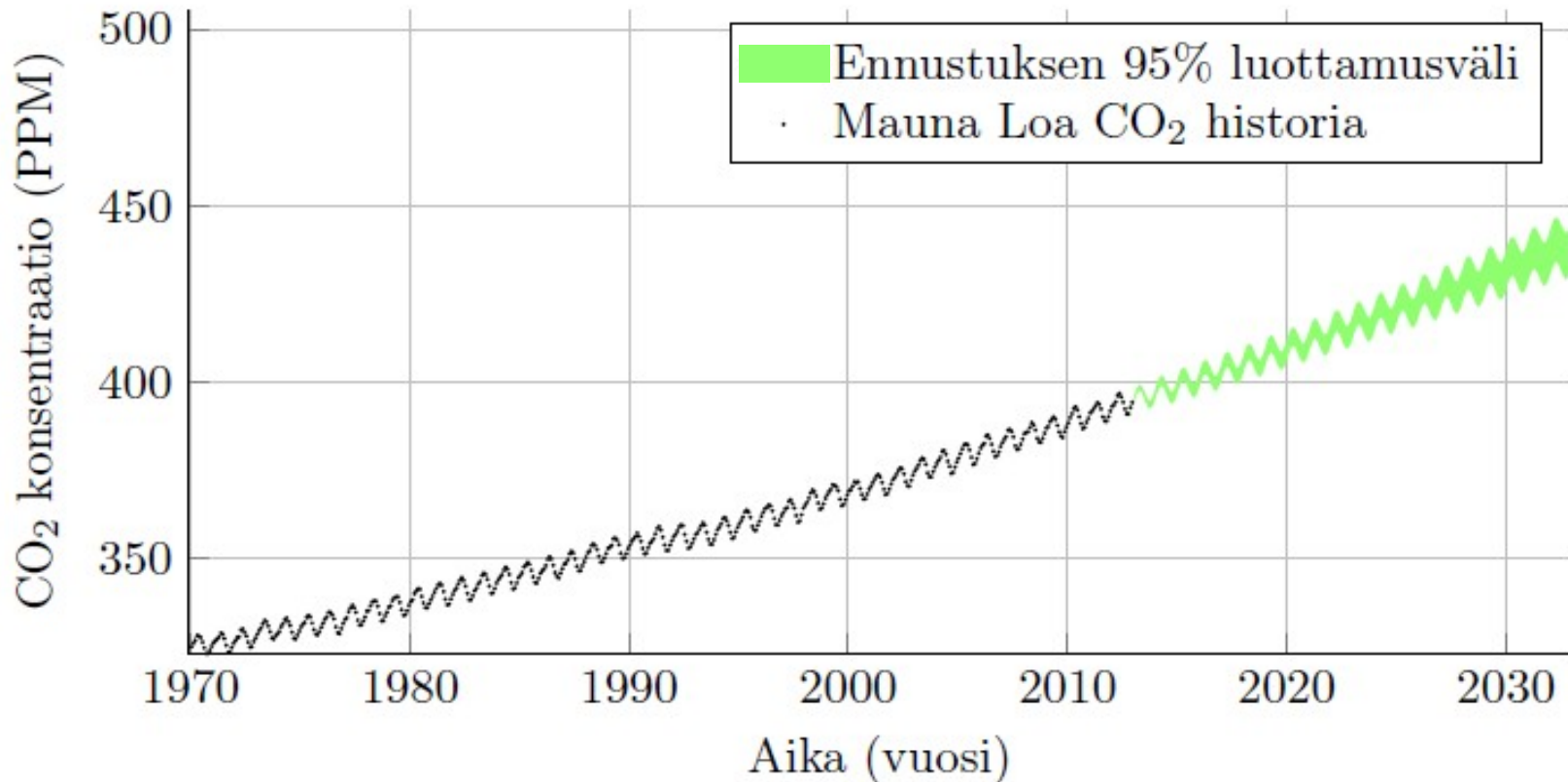


Sovellusesimerkit - ennustus

- Ennustetaan hiilidioksidin pitoisuuden kehitystä ilmakehässä 20 vuotta tulevaisuuteen
- Aineisto Mauna Loa:n mittausasemalta vuodesta 1970 vuoden 2012 loppuun
- Priorina superpositio kolmesta mallista
 - 2 kertaa neliöllinen eksponentti kovarianssifunktio
 - Yksi resonaattorimalli
- Priorin hyperparametrit optimoidaan

Sovellusesimerkit - ennustus

Mauna Loa CO₂ konsentraation ennustaminen



Yhteenveto

- GP regressio joustavampaa, kuin esimerkiksi lineaarinen regressio
- GP regressio laskennallisesti raskas, $O(n^3)$
- Osa GP regressio-ongelmista voidaan muuntaa ja ratkaista tehokkailla Kalmanin suotimella ja silottimella, $O(n)$, n pisteiden lukumäärä
- Muuntamalla GP regressio tila-avaruusmuotoon, pystyy GP regressiomalleja käyttämään yhdessä muiden tila-avaruusmallien kanssa (esimerkiksi resonaattorimalli)
- Laajennettavissa useampiulotteiseen tapaukseen