Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Teknillisen fysiikan ja matematiikan tutkinto-ohjelma

Kirjallisuuskatsaus sisäpistemenetelmiin ja niiden soveltamiseen eri optimointiluokille

kandidaatintyö
15.04.2014

Ilari Vähä-Pietilä

Aalto-yliopisto

AALTO-YLIOPISTO PERUSTIETEIDEN KORKEAKOULU PL 11000, 00076 Aalto http://www.aalto.fi	KANDIDAATINTYÖN TIIVISTELMÄ
Tekijä: Ilari Vähä-Pietilä	
Työn nimi: Kirjallisuuskatsaus sisäpistemenetelmiin ja niiden soveltamiseen eri optimointiluokille	
Tutkinto-ohjelma: Teknillisen fysiikan ja matematiikan tutkinto-ohjelma	
Pääaine: Systeemitieteet	Pääaineen koodi: F3010
Vastuuopettaja(t): Professori Harri Ehtamo Ohjaaja(t): TkT Kimmo Berg	

Tiivistelmä:

Tässä työssä tutustutaan sisäpistemenetelmien tutkimukseen ja käydään läpi tähänastista tutkimusta aiheesta. Työssä pyritään esittelemään sisäpistemenetelmien kehityksen tärkeimmät vaiheet sekä menetelmäluokan suurimmat vaikutukset optimointimenetelmien tutkimukseen.

Lineaaristen tehtävien (LP) ratkaisemiseen on useita menetelmiä ja sisäpistemenetelmien tapauksessa yleisimmät käytetyistä menetelmistä ovat estefunktiomenetelmä, primaali-duaali menetelmä sekä predictor-corrector menetelmä. Näistä menetelmistä erityisesti primaali-duaali sekä predictor-corrector menetelmät on laajennettavissa muidenkin tehtävätyyppien ratkaisemiseksi.

Työssä esitellään myös lineaaristen komplementaarisuusongelmien (LCP) sekä semidefiniitin optimoinnin (SDP) sovelluksia sisäpistemenetelmille. Useimmat tehtävät kuten lineaariset ja neliölliset tehtävät voidaan esittää lineaarisina komplementaarisuusongelmina, jolloin kehitettäessä menetelmiä komplementaarisuusongelmien ratkaisemiseksi, toimivat ne laajaan joukkoon tehtäviä.

Semidefiniitin ohjelmoinnin luonne laaja-alaisena optimointiongelmien luokkana on erityisesti kiihdyttänyt tutkimusta kyseisellä osa-alueella. Semidefiniitissä ohjelmoinnissa minimoidaan lineaarista funktiota rajoitusehtojen suhteen, joiden affiinikombinaatio symmetristen matriisien joukossa on positiivisesti semidefiniitti. Tämän seurauksena semidefiniittien tehtävien teoria ei eroa suuresti lineaaristen tehtävien teoriasta.

Päivämäärä: 15.04.2014	Kieli: Suomi	Sivumäärä: 17+2

Avainsanat: Sisäpistemenetelmät, semidefiniitti ohjelmointi, lineaarinen ohjelmointi, lineaariset komplementaarisuusongelmat

Sisältö

1 Johdanto

Linaaristen tehtävien tutkimus sai alkunsa 1930-luvun lopulta kun matemaatikot von Neumann, Kantorovich ja Koopmans tutkivat taloustiedettä matemaattisesti lineaaristen epäyhtälöiden kautta [23]. Tämän jatkoksi toisen maailmansodan aikana huomattiin, että parhaat logistiset ratkaisut sekä resurssien järkevimmät allokoinnit saatiin esitettyä ja ratkaistua lineaaristen tehtävien avulla.

Danzig julkaisi ensimmäisen version SIMPLEX-menetelmästään 1950-luvulla, jonka jälkeen kiinnostus lineaaristen optimointitehtävien tutkimusta kohden alkoi lisääntyä. Vuonna 1979 Khachiyan esitti uuden lähestymistavan lineaarisille ongelmille käyttäen ellipsoidimenetelmää. Ellipsoidimemenetelmän kulku koostuu jonosta pieneneviä ellipsoideja joista aina viimeisin ellipsoidi sisältää optimiratkaisun. Seuraava ellipsoidi pienentää ratkaisujen joukkoa edelleen kutistuen joka iteraatiokierroksella. Ellipsoidimenetelmä on mielenkiintoinen, sillä se on ensimmäisiä teoriassa polynomiaikaisia menetelmiä.

Parhaimmatkaan implementaatiot ellipsoidimenetemästä eivät olleet käytännössä kilpailukykyisiä SIMPLEX-menetelmän kanssa. Mutta vihdoin Karmarkarin tutkimus [10] vuonna 1984 aloitti sisäpistemenetelmien laajamittaisen tutkimuksen, kun hän esitti uuden polynomiaikaisen sisäpistemenetelmän jossa oli potentiaalia pärjäämään käytännössä SIMPLEX-menetelmälle. Suuren kiinnostuksen myötä huomattiin että Karmarkarin menetelmän ja klassisen logaritmisen estefunktiomenetelmän välillä oli huomattavia yhtäläisyyksiä [22].

Näiden yhtäläisyyksien huomaamisen jälkeen raportoitiin useita laskennallisia tuloksia jotka vertasivat silloista SIMPLEX-menetelmän implementaation MINOS-koodin ja primaalisen Newtonin estefunktiomenetelmän laskenta-aikoja ja tarkkuutta useisiin eri testitehtäviin. Monien hämmästykseksi estefunktiomenetelmä oli useissa tehtävissä jopa nopeampi kuin silloin hallitseva SIMPLEX-menetelmä.

Estefunktiomenetelmän toimivuuden tultua yleiseen tietoon monet tutkijat alkoivat kehittää edelleen lineaaristen tehtävien ratkaisemiseen tarkoitettuja sisäpistemenetelmiä parannelluilla kompleksisuusrajoilla. Koska estefunktiomenetelmät olivat alunperin suunniteltu myös epälineaaristen tehtävien ratkaisemiseen tulisi myös sisäpistemenetelmien laajentaminen muihin konvekseihin luokkiin kuten neliöllisiin ongelmiin, lineaarisiin komplementaarisuusongelmiin (LCP) ja epälineaarisiin ongelmiin (NLP) luonnollisesti kiinnostamaan tutkijoita.

Joukko $A \in \mathbf{R}^n$ on konveksi [5] jos kaikille $x_1, x_2 \in A$ pätee

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A, \, \forall \lambda \in (0,1). \tag{1}$$

Funktio $f : A \mapsto \mathbf{R}, A \subseteq \mathbf{R}^n, A \neq \emptyset$ ja konveksi joukko, on konveksi joukossa S jos kaikille $x_1, x_2 \in A, \; \lambda \in (0,1)$ pätee

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2). \tag{2}$$

Mikäli $x_1 \neq x_2$, niin epäyhtälö pätee ilman yhtäsuuruutta.

Yleinen konveksi optimointitehtävä on muotoa

$$\min_x f(x), \quad \text{s.e.} \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, ..., m, \tag{3}$$

missä f ja $g_i, i = 1, 2, ..., m$ ovat konvekseja funktioita. Tehtävä voidaan ratkaista primaali-duaali algoritmin laajennuksen avulla joka tullaan esittelemään lineaarisen komplementaarisuustehtävän yhteydessä.

Kiinnostus sisäpistemenetelmiin tuotti pian myös menetelmien laajennuksia muihin konvekseihin optimointitehtäviin. Ominaisarvojen optimointitehtävien ratkaiseminen on erityisesti helpottunut sisäpistemenetelmien kehittymisen myötä. Tätä tehtävätyyppiä emme kuitenkaan käsittele tässä työssä. Myös semidefiniitin ohjelmoinnin tehtävien ratkaiseminen on kehittynyt sisäpistemenetelmien kehityksen myötä. Koska semidefiniittejä ohjelmointitehtäviä voidaan käsitellä lineaaristen tehtävien yleistyksinä, on sisäpistemenetelmien tutkimus muiden tehtäväluokkien parissa vaikuttanut suoraan tehtävätyypin menetelmien kehitykseen. Lisätietoa löytyy Nesterovin ja Nemirovskiin julkaisusta [14].

Työssä esitellään kirjallisuuskatsauksena sisäpistemenetelmät eri tehtäväluokille. Luvussa 2 esitellään kolme sisäpistemenetelmien algoritmia lineaarisille tehtäville sekä tutustutaan näiden suorituskykyyn. Luvussa 3 esitetään sekä konvekseille että lineaariselle komplementaarisuustehtävälle primaali-duaali algoritmi. Luvussa 4 esitellään semidefiniittien ohjelmointitehtävien ratkaisumenetelmiä ja luvussa 5 esitellään sisäpistementelmien soveltamisen rajoituksia. Luvussa 6 esitellään pohdinnat sekä yhteenveto.

2 Lineaariset ongelmat

Määritellään ensimmäiseksi lineaarisen ohjelmoinnin ongelma, joka koostuu kustannusvektorista $c \in \mathbf{R}^n$ ja m lineaarisesta yhtälörajoitteesta, jotka määritellään matriisin $A \in \mathbf{R}^{n \times m}$ sekä vektorin $b \in \mathbf{R}^m$ avulla. Näin voidaan määritellä lineaarinen optimointitehtävä standardimuodossa

$$\min c^T x, \quad \text{s.e. } Ax = b, \quad x \geq 0. \tag{4}$$

Rajoitus $x \geq 0$ tarkoittaa, että kaikkien komponenttien vektorissa $x \in \mathbf{R}^n$ tulee olla ei-negatiivisia. Danzigin kehittämä SIMPLEX-algoritmi on ollut kehityksestään lähtien käytetyin metodi lineaarisille ongelmille. Vaikka menetelmä toimi hyvin käytännössä, suurille ongelmille sen kompleksisuus on eksponenttiaikaista, jolloin se on raskas laskea. Yksi ratkaisuista oli käyttää ellipsoidimetodia kyseisiin ongelmiin. Käytännössä toimivia implementaatioita ellipsoidimenetelmästä, jotka olisivat olleet kilpailukykyisiä silloisten algoritmien kanssa, ei ollut.

Karmarkar osoitti artikkelissaan [10], että laskennallinen kompleksisuus lineaarisille tehtäville hänen kehittämällään sisäpistemenetelmällä vaati $O\left(nL\right)$ iteraatiota, vaatien kokonaisuudessaan $O\left(n^{3.5}L\right)$ bittioperaatiota, missä L on syötetyn datan pituus binäärimuodossa

$$L = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \left[\log_2\left(|a_{ij}| + 1\right) + 1\right] \tag{5}$$

ja missä $a_{i0} = b_i$ ja $a_{0j} = c_j$.

SIMPLEX-algoritmia ei voida tehokkaasti laajentaa ratkaisemaan epälineaarisia tehtäviä. Karmarkarin algoritmin suurin hyöty ei ollut sen parempi laskennallinen teho vaan se, että sitä voitiin laajentaa tehokkaasti muihin algoritmeihin ja algoritmiluokkiin. Myöhemmin muun muassa Vaidya on modifioinut algoritmia [20] saaden sisäpistemenetelmin lineaarisen ongelman teoreettiseksi laskennalliseksi kompleksisuudeksi $O(\sqrt{n}L)$ iteraatiota, vaatien $O(n^3L)$ bittioperaatiota, jotka esitellään tarkemmin Goldfarbin ja Toddin julkaisussa [7]. Useat eri lähteet ovat saaneet tämän jälkeen vastaavia laskennallisen kompleksisuuden tuloksia.

Matriisilaskentaa hyödyntämällä voidaan algoritmin tehokkuutta parantaa edelleen. Anstreicher [3] esittelee julkaisussaan modifioidun sisäpistemenetelmän, jossa hyödynnetään esikäsiteltyä konjugaattigradienttimenetelmää(PCG) iteraatiokierrosten tuottamien Newtonin yhtälöiden ratkaisemiseksi. Täten saadaan algoritmin kompleksisuudeksi hieman alle $O(n^3L)$, oikeastaan $O(\frac{n^3L}{\log n})$ bittioperaatiota.

2.1 Logaritminen estefunktio

Oletetaan että lineaarisella tehtävällä on sisus, jolloin siis joukko

$$\mathcal{F}^0 \equiv \{x | Ax = b, x > 0\} \tag{6}$$

ei ole tyhjä joukko ja kohdefunktio on rajoitettu käypien pisteiden joukolla alapuolelta. Näillä oletuksilla ongelmalle (4) on ratkaisu. Käyttämällä logaritmista estefunktiota saadaan parametrisoitu ongelma

$$\min_x f\,(x;\mu) \equiv c^T x - \mu \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \tag{7}$$

missä ln on luonnollinen logaritmi ja $\mu > 0$ kuvaa esteparametria. Mille tahansa jonolle $\{\mu_k\}$, jonka $\lim_{k\to\infty} \mu_k = 0$, sen rajapisteet $\{x(\mu_k)\}$ ovat ongelman (4) ratkaisuja [21]. Myös tehtävän (7) ratkaisun $x(\mu)$ tulee kuulua joukkoon $\mathcal{F}^0$, sillä logatrimisen funktion parametrien tulee olla positiivisia.

Lineaarisille ongelmille käytetään usein primaali estefunktioalgoritmia, jossa käytetään Newtonin menetelmää tehtävän (7) alkuratkaisun löytämiseksi jollain μ arvolla, jonka jälkeen μ arvoa pienennetään. Newton-askeleeseen tarvittavat derivaatat ovat

$$\nabla^2_{xx} f(x;\mu) = -X^{-2}, \quad \nabla_x f(x;\mu) = c + \mu X^{-1} e, \tag{8}$$

missä $X = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ja $e = (1, 1, \ldots, 1)^T$. X on tällöin siis neliömatriisi, jonka diagonaalilla ovat alkiot $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tällöin saadaan ratkaistua Newton-askel seuraavasta systeemistä

$$\begin{bmatrix} -\mu X^{-2} & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \lambda^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c + \mu X^{-1} e \\ Ax - b \end{bmatrix} \tag{9}$$

Yhtälö (9) on sama, joka saadaan Sequential Quadratic Programming (SQP) algoritmin avulla soveltamalla sitä yhtälöön (7), pienten modifikaatioiden jälkeen. Estefunktioalgoritmin vaiheet voidaan määritellä seuraavalla tavalla [16]:

$x^0 \in \mathcal{F}^0$ ja $\mu_0 > 0$
aseta $k \leftarrow 0$;
toista.

Ratkaise x^{k+1} suorittamalla Newton-askel (9), aloittamalla $x = x^k$ ja kiinnittämällä $\mu = \mu_k$; Valitse $\mu_{k+1} \in (0, \mu_k)$;
$k \leftarrow k + 1$;

Short-step versiossa kyseisestä algoritmista [13, osio 2.4] asetetaan askelpituudeksi $\alpha = 1$ ja suoritetaan Newton-askel jokaisella iteraatiokierroksella, jolloin esteparametrin päivitysyhtälöksi saadaan

$$\mu_{k+1} = \mu_k/(1 + \frac{1}{8\sqrt{n}}) \tag{10}$$

Oletetaan, että esteparametri kasvaa juuri kyseisen määrän, jolloin iteraatioiden määräksi esteparametrin μ_1 kasvattamiseksi johonkin arvoon $\mu > \mu_1$ saadaan

$$O(\sqrt{n}\log\frac{n\mu_0}{\epsilon}) \tag{11}$$

iteraatiota. Iteraatioita tarvitaan (11) pisteen x^k saavuttamiseksi, jolloin tehtävän kohdefunktion arvo $c^T x^k$ on ϵ päässä optimiarvosta. Short-step muunnelmien suurimpana ongelmana on esteparametrin liian hidas pieneneminen käytännön sovelluksissa. Yhtälön (11) antama iteraatioiden määrä riippuu lineaarisen optimointitehtävän ominaisuuksista. L bitin pituiselle datalle tiedetään, että jos $\epsilon \leq 2^{-2L}$ niin x^k voidaan pyöristää tarkkaan ratkaisuun $O(n^3)$ aritmeettisella operaatiolla [16]. Lisäksi, jos valitaan alkuparametriksi $\mu_0 \leq 2^{\beta L}$, jollain positiivisella vakiolla β, algoritmien kompleksisuudeksi saadaan $O(\sqrt{n}L)$.

2.2 Primaali-duaali algoritmi

Primaali-duaali pariin pohjautuvat algoritmit tuovat paremman käytännön toimivuuden estefunktiomenetelmään verrattuna, sillä ne ottavat paremmin huomioon tehtävän ratkaisupolun $x(\mu)$. Nämä algoritmit eroavat yllä esitetystä estefunktioista siten, että ne ottavat duaalimuuttujat eksplisiittisesti huomioon ongelmaa ratkaistaessa sen sijaan, että ne vain käsittelisivät duaalimuuttujia jonain lisänä primaalimuuttujia iteroidessa. Duaalitehtävä standardimuotoiselle lineaariselle tehtävälle (4) on

$$\max_{(\lambda,s)} b^T\lambda, \quad \text{s.e. } A^T\lambda + s = c, \quad s \geq 0, \tag{12}$$

missä $s \in \mathbf{R}^n$ ja $\lambda \in \mathbf{R}^m$. Jos x^* ratkaisee yhtälön (4) sekä (λ^*, s^*) on tehtävän (12) ratkaisu, niin $(x, \lambda, s) = (x^*, \lambda^*, s^*)$ täyttävät ehdot

$$Ax = b, \tag{13}$$
$$A^T\lambda + s = c, \tag{14}$$
$$XSe = 0, \tag{15}$$
$$(x, s) > 0, \tag{16}$$

missä $X = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ja $S = \mathrm{diag}(s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Primaali-duaalialgoritmit ratkaisevat tehtävät (4) ja (12) samanaikaisesti iteroimalla (x^k, λ^k, s^k), jotka täyttävät ehdot (13)-(16). Keskuspolku määritellään jonona ratkaisuja $\{x_\mu\}$, $\mu > 0$ ja kun $\mu \to \infty$, $x_\mu \to x^A$ kutsutaan x^A analyyttiseksi keskukseksi [5]. Keskuspolkua voidaan hyödyntää algoritmisuunnittelussa lisäämällä optimaalisuusehtoihin (13)-(16) epävarmuustermi, jolloin ehdot saadaan muodossa

$$Ax = b, \tag{17}$$
$$A^T\lambda + s = c, \tag{18}$$
$$XSe = \mu e, \tag{19}$$
$$(x, s) > 0, \tag{20}$$

missä $\mu > 0$ parametrisoi keskuspolun. Parametrisoiva termi μ relaksoi tehtävän ainoan epälineaarisen termin, joka on yhtälöryhmän työläin ratkaistava. Edellä esitetyt yhtälöt (17)-(20) ovat myös tehtävän (7) optimaalisuusehdot. Yhtälöstä (19) nähdään, että X ja S pareittaisten komponenttien tulot ovat samoja kaikille komponenteille, eli

$$x_i s_i = \mu \tag{21}$$

Käyttämällä muunnettua Newtonin menetelmää edellä esitettyihin optimaalisuusehtoihin saadaan epälineaarinen yhtälöryhmä, josta voidaan ratkaista primaali-duaali algoritmin vaatimat askeleet. Iteroitavat muuttujat (x^k, λ^k, s^k) tulee rajoittaa $(x^k, s^k) > 0$, jotta matriiseilla X ja S on positiivinen diagonaali, jolloin askeleet ovat hyvin määriteltyjä. Askeleen ratkaisemiseksi, oletetaan että ollaan käyvässä pisteessä (x, λ, s) ja että ehdot (17), (18) ja (20) täyttyvät. Tämän jälkeen ratkaistaan primaali-duaali-askel $(\Delta x, \Delta\lambda, \Delta s)$ yhtälöryhmästä

$$\begin{bmatrix} 0 & A & 0 \\ A^T & 0 & I \\ 0 & S & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\lambda \\ \Delta x \\ \Delta s \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ XSe - \sigma\mu e + r \end{bmatrix}, \tag{22}$$

missä $\mu = \frac{x^T s}{n}$, keskitysparametri $\sigma \in [0, 1]$, ja r on vakautustermi, johon sisällytetään muuta informaatiota systeemistä (17)-(20), tai muita termejä keskuspolun läheisyyden varmistamiseksi. Käyttämällä edellä kuvattua askelta (22) voimme kirjoittaa primaali-duaali algoritmin kulun seuraavasti [16]:

Jollakin (x^0, λ^0, s^0), joista $(x^0, s^0) > 0$,
Asetetaan $k \leftarrow 0$ ja $\mu_0 = ((x^0)^T s^0)/n$,
toistetaan seuraavaa

> Valitaan σ_k ja r^k, Ratkaistaan (22) arvoilla $(x, \lambda, s) = (x^k, \lambda^k, s^k)$
> ja $(\mu, \sigma, r) = (\mu_k, \sigma_k, r^k)$, jotta saadaan $(\Delta x^k, \Delta\lambda^k, \Delta s^k)$,
> Valitaan askelpituus siten että $\alpha_k \in (0, 1]$ ja määrätään
> $(x^{k+1}, \lambda^{k+1}, s^{k+1}) \leftarrow (x^k, \lambda^k, s^k) + \alpha_k(\Delta x^k, \Delta\lambda^k, \Delta s^k)$,
> $\mu_{k+1} \leftarrow \frac{(x^{k+1})^T s^{k+1}}{n}$;$k \leftarrow k + 1$,

kunnes jokin lopetusehto täyttyy.

Primaali-duaali-algoritmia käytetään pohjana monissa muissa sisäpistementelmien implementoinneissa ja ne eroavat useimmiten tavassa miten aloituspiste (x^0, λ^0, s^0), keskitysparametri σ_k, vakautustermi r^k tai askelpituus α_k määrätään. Yhtenä esimerkkinä näistä muunnelmista voidaan mainita shortstep versio keskuspolkua seuraavista metodeista [16]. Kyseisessä metodissa asetetaan

$$r^k = 0,\ \sigma_k = 1 - \frac{0.4}{\sqrt{n}},\ \alpha_k = 1,$$

jolloin jokin käypä alkupiste konvergoituu johonkin käypään pisteeseen etäisyydelle $\frac{(x^T s)}{n} \geq \epsilon$ jollakin annetulla ϵ

$$O(\sqrt{n}\log\frac{\mu_0}{\epsilon}) \tag{23}$$

iteraatiolla. Kyseisen algoritmin samankaltaisuus estefunktiota käyttävien algoritmien kanssa on huomattava. Ongelma on kuitenkin sama kuin aikaisemmin, käytännön tehokkuus ei ole välttämättä päätä huimaava.

2.3 Predictor-corrector algoritmi

Paremman käytännön tehokkuuden saamiseksi voidaan käyttää erilaisia, luovempia ja aggressiivisempia vaihtoehtoja keskitysparametrin valitsemiseksi. Nämä menetelmät käyttävät suuntahakua pysyäkseen keskuspolun läheisyydessä. Tämä tarkoittaa sitä että optimaalisuusehtoa (19) voidaan rikkoa jonkin verran, mutta pareittaiset tulot eivät saa erota liian paljoa toisistaan. Perinteinen Mizuno-Todd-Ye predictor corrector algoritmi toimii keskuspolun ympäristössä, joka määritellään

$$\mathbf{N} \equiv \{(x, \lambda, s)\, \text{käypiä} : \Phi(x, s, \mu) \leq \beta\}, \tag{24}$$

missä $\mu(x, s) = \frac{x^T s}{n}$ ja $\beta \in (0, 1)$ on vakio [24]. Jos valitaan tavanomainen euklidinen normi $\Phi(x, s, \mu) = \left|\left|\frac{xs}{\mu(x,s)} - e\right|\right|_2$ saadaan kapea keskuspolun ympäristö, jota merkitään $\mathrm{N}(\beta)$. Kun valitaan $\Phi(x, s, \mu) = \left|\left|\frac{xs}{\mu(x,s)} - e\right|\right|_\infty$ tai $\Phi(x, s, \mu) = \left|\left|(\frac{xs}{\mu(x,s)} - e)^-\right|\right|_\infty$, missä $w^- = min(w, 0)$, saadaan vastaavasti keskuspolun ympäristöt $\mathrm{N}_\infty(\beta)$ ja $\mathrm{N}^-_\infty(\beta)$.

Algoritmin ideana on ottaa jokaisen ennustavan "predictor"-askeleen jälkeen korjaava "corrector"-askel keskuspolun suuntaan, joka pienentää μ arvoa. Algoritmin kulku kuvataan seuraavalla tavalla [16]:

asetetaan $(x^0, \lambda^0, s^0) \in \mathbf{N}(0.25)$
$k \leftarrow 0$ ja $\mu_0 = \frac{(x^0)^T s^0}{n}$;
toistetaan seuraavaa

> Asetetaan $(x, \lambda, s) \leftarrow (x^k, \lambda^k, s^k)$ ja $(\mu, \sigma, r) \leftarrow (\mu_k, 0, 0)$;
>
> Ratkaistaan (22) ja asetetaan $(u, w, v) \leftarrow (\Delta x, \Delta\lambda, \Delta s)$, jotta saadaan $(\Delta x^k, \Delta\lambda^k, \Delta s^k)$;
>
> Valitse askelpituudeeksi suurin mahdollinen $\alpha_k \in (0, 1]$ siten että $(x, \lambda, s) + \alpha(u, w, v) \in \mathbf{N}(0.25)$;
>
> Aseta $(x, \lambda, s) \leftarrow (x, \lambda, s) + \alpha_k(u, w, v)$ ja
> $(\mu, \sigma, r) \leftarrow (\mu_k, (1 - \alpha_k), 0)$;
>
> Ratkaistaan (22) ja asetetaan
> $(x^{k+1}, \lambda^{k+1}, s^{k+1}) \leftarrow (x, \lambda, s) + (\Delta x, \Delta\lambda, \Delta s)$;
> $\mu_(k + 1) \leftarrow ((x^{k+1})^T s^{k+1})/n; k \leftarrow k + 1$;

kunnes jokin lopetusehto täyttyy.

Edellä kuvatulla predictor-corrector-algoritmilla on sama kompleksisuusraja (11) kuin edellisen algoritmin short-step versiolla [23]. Kuitenkin käytettäessä predictor-corrector algoritmia voisi kuvitella sen olevan tehottomampi primaali-duaali-algoritmin short-step versioon verrattuna, sillä predictor-corrector algoritmi kuitenkin vaatii kaksi yhtälöryhmän ratkaisua per iteraatio, kun taas short-step-algoritmi vaatii vain yhden. Numeeristen kokeiden avulla on kuitenkin pysytytty osoittamaan, että predictor-corrector algoritmi on huomattavasti tehokkaampi kuin short-step algoritmi. Koska short-step algoritmin μ_k pienenee joka askeleella vakiomäärän

$$\mu_{k+1} = (1 - \frac{0.4}{n})\mu_k, \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{25}$$

ja predictor-corrector algoritmin keskitysparametri σ_k ei ole kiinnitetty, mahdollistaa se μ_k nopeamman pienenemisen kuin primaali-duaali algoritmin short-step version tapauksessa, erityisesti optimiratkaisun lähellä.

Usein käytetään myös useamman korjauksen algoritmeja, joissa suoritetaan useampi corrector-askel predictor-askeleen jälkeen. Suurin syy tähän on algoritmin kulun primaali-duaali pisteen palauttaminen mahdollisimman lähelle keskuspolkua, jolloin voidaan seuraavalla iteraatiokierroksella ottaa mahdollisimman suuri predictor-askel. Kuitenkin näiden corrector-askelien loputon lisääminen ei pienennä tehtävän ratkaisemiseen vaadittavaa laskenta-aikaa, vaan yleisesti ottaen tehokkaimmaksi menetelmäksi osoittautui toisen asteen predictor-corrector algoritmi, jossa menetelmän aste tarkoittaa siihen käytettyjen corrector-askelten lukumäärää per iteraatiokierros [8]. Kuitenkin iteraatiokierrosten määrä useammalla corrector-askeleella putosi keskimäärin 15-25%.

Paremman laskennallisen tehon saavuttamiseksi voidaan tehtävissä, joissa epäyhtälörajoitukset ovat ainoastaan ei-negatiivisuusrajoitteita, koettaa tunnistaa nollamuuttujat. Yksi näistä tavoista tunnistaa X:n ja S:n nollakomponentit on käyttää Tapia indikaattoreita [6]. Kuitenkaan näiden indikaattorien käyttäminen superlineaarisesti konvergoituvien algoritmien kanssa on hieman liioiteltua, sillä etäisyys μ_k arvoille, joilla superlineaarisen konvergenssin algoritmit sekä äärellisen lopetuksen strategiat toimivat ovat kohtalaisen samankaltaiset. Tällöin kun iteraattien arvot pääsevät tämän etäisyyden päähän, superlineaariset metodit konvergoivat jo muutamassa iteraatiossa, jolloin indikaattorien tuoma hyöty ei ole kovin suuri.

Aikasemmin oletimme että alkupiste toteuttaa lineaariset rajoitteet, ja että aloituspiste on epäyhtälörajoitteen rajaaman alueen sisällä. Käytännössä näin ei kuitenkaan aina ole, jolloin käytetään alkupisteenä pistettä, joka on epäyhtälörajoitteiden rajaaman käyvän alueen sisällä, mutta ei toteuta lineaarisia yhtälörajoitteita. Näitä algoritmeja kutsutaan infeasible-interior-point algoritmeiksi. Kojiman, Mediggon ja Mizunon algoritmi ja Zhangin kompleksisuusanalyysi tähän liittyen antoi alkusysäyksen tämän alueen tutkimukselle. Kuitenkaan näiden algoritmien etuna ei ole parempi tehokkuus feasible-interior-point algoritmeihin nähden, vaan että nämä algoritmit voivat ratkaista ongelmia, joilla ei ole käypää alkupistettä sekä näitä metodeita voidaan käyttää toteamaan tiettyjen lineaaristen ongelmien epäkäypyys [16].

Sisäpistemenetelmien tehokkuudesta kertoo huonoimman mahdollisen tapauksen kompleksisuuden sijaan paremmin keskimääräisen tapauksen kompleksisuus. Suurin osa sisäpistemenetelmistä on polynomiaikaisia, mutta käytännössä ne toimivat huomattavasti paremmin kuin huonoimman mahdollisen tapauksen rajat antaisivat ymmärtää, jolloin teorian ja käytännön välille syntyy ero, jota keskimääräisen tapauksen analyysi pienentäisi. Suurelle osalle menetelmistä algoritmi päätyy lopetukseen suurella todennäköisyydellä jo $O(\sqrt{n} \ln n)$ iteraatiossa [4]. Tällöin siis sisäpistementelmien keskimääräinen kompleksisuus on vahvasti polynomiaikaista, eli se riippuu ainoastaan ongelman dimensiosta, ei datan binäärisestä pituudesta.

3 Lineaariset komplementaarisuusongelmat

Lineaarinen komplementaarisuusongelma (LCP) on yleinen ongelmaluokka jonka alle voidaan listata lineaariset ongelmat (LP), neliölliset ongelmat (QP) sekä bimatriisipelit. LCP tutkimus on hyödyttänyt muuta optimointitutkimusta esimerkiksi tuottamalla toimivia algoritmeja joita on voitu laajentaa epälineaaristen systeemien optimointitehtävien ratkaisemiseksi. LCP tehtävien tutkimuksen tuottamat iteratiiviset menetelmät tuottavat varteenotettavia kilpailijoita varsinkin SIMPLEX-menetelmälle vaikeiksi osoittautuneille suurille ja numeerisesti haastaville tehtäville.

Määritellään ensin LCP. Olkoot M neliömatriisi astetta n ja rivivektori $q \in \mathbf{R}^n$. LCP:lle ei ole käytännössä optimoitavaa kohdefunktiota, vaan tehtävässä pyritään löytämään vektorit $w = (w_1, w_2, ..., w_n)^T$ ja $z = (z_1, z_2, ..., z_n)^T$ siten että ne täyttävät

$$w - Mz = q, \quad (w, z) \geq 0, \quad w_i z_i = 0, \quad \text{kaikille} \quad i. \tag{26}$$

LCP ja QP ovat läheisesti liitoksissa toisiinsa. Määritellään primaali-duaali pari QP:

$$\min c^T u + \frac{1}{2} u^T Q u, \quad \text{s.e.}\, Au \geq b, \quad u \geq 0. \tag{27}$$

$$\max b^T v - \frac{1}{2} u^T Q y, \quad \text{s.e.}\, A^T v - Qu \leq c, \quad v \geq 0, \tag{28}$$

missä Q on symmetrinen ja positiivisesti semidefiniitti (p.s.d.). Jos $Q = 0$ saadaan tehtävästä (27) - (28) primaali-duaali symmetrinen LP-pari. Voimme myös ilmaista primaali ja duaalitehtävän yhdessä LCP kuten (26) positiivisesti semidefiniitin matriisin avulla jos merkitään

$$M = \begin{pmatrix} Q & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} c \\ -b \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Keskuspolku edellä määritellylle LCP tehtävälle saadaan saadaan positiivisen skalaarin μ avulla kuten aiemmin

$$w - Mz = q, \tag{30}$$

$$WZe = \mu e, \tag{31}$$

$$(w, z) > 0. \tag{32}$$

Hakusuunta pisteelle (w, z), joka toteuttaa ehdot (30) ja (31) saadaan ratkaisemalla systeemi

$$\begin{bmatrix} I & M \\ Z & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta w \\ \Delta z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ WZe - \sigma\mu e + r \end{bmatrix} \tag{33}$$

missä $\mu = \frac{w^T z}{n}$, $\sigma \in [0, 1]$ ja r on vakautustermi kuten primaali-duaali algoritmin tapauksessa.

Primaali-duaali algoritmin tapaus sekä monet sen sovellukset tässä kehyksessä ovat identtisiä yllä nähdyn tapauksen kanssa. Tällöin ei ole yllättävää, että kompleksisuustulokset ovat samankaltaisia kuin vastaavan lineaarisen ongelman tapaukseessa.

LCP on ollut yhdistävä tekijä operaatiotutkimuksessa tarjoten keinon käyttää eri optimointiluokkien algoritmeja hyväksi muissakin optimointitehtävissä. LCP algoritmeja voidaan laajentaa kattamaan muitakin optimointiluokkia käyttämällä riittäviä matriiseja (sufficient matrices).

Puhuttaessa matriisien riittävyydestä tulee ensin määritellä matriisien riveittäinen ja sarakkeittainen riittävyys. Matriisin M sanotaan olevan riveittäin riittävä, jos

$$x_i(M^T x)_i \leq 0 \Rightarrow x_i(M^T x)_i = 0, \text{ jokaiselle } i. \tag{34}$$

Matriisi M on sarakkeittain riittävä jos

$$x_i(Mx)_i \leq 0 \Rightarrow x_i(Mx)_i = 0 \, \text{jokaiselle } i. \tag{35}$$

Matriisin sanotaan olevan riittävä jos se täyttää molemmat ehdot (34) ja (35) eli on sekä riveittäin, että sarakkeittain riittävä [40].

Kojima, Megiddo, Noma ja Yoshise esittävät julkaisussaan, että LCP kuvataan $P_*(\kappa)$ matriisilla [17]. $P_*(0)$ matriisi on vain jokin positiivisesti semidefiniitti matriisi, ja kasvatettaessa $\kappa \geq 0$ saadaan edelleen yleisempiä matriiseja, jotka ovat samaan aikaan riittäviä. Matriisia sanotaan riittäväksi, jos jokainen sillä konstruoitu LCP on konveksi ratkaisujoukko ja jokainen QP liittyvä KKT-piste on LCP ratkaisu. Matriisin rajoitteeksi kutsutaan pienintä mahdollista $\kappa \geq 0$, jolla matriisi on $P_*(\kappa)$ matriisi.

Menetelmien laskennallinen kompleksisuus riippuu yleensä matriisin rajoiteasteesta, koska ei voida löytää algoritmia joka ratkaisee kaikki LCP-luokan tehtävät. Parhaiksi tuloksiksi on tähän mennessä saavutettu $P_*(\kappa)$ LCP ratkaisu enintään $O((1+\kappa)\sqrt{n}L)$ iteraatiolla. Sisäpistemenetelmät ovat ylivertaisia kyseisessä ongelmaluokassa niiden polynomisen kompleksisuuden ja superlineaarisen konvergenssin ansiosta.

Sisäpistemenetelmien haasteena on ollut kautta aikain sen teorian ja käytännön välinen kuilu. Eräs mielenkiintoinen ominaisuus on, että parhaat teoreettiset kompleksisuustulokset on saavutettu keskuspolun $\mathrm{N}(\beta)$ ympäristössä, mutta parhaat käytännön tulokset on saavutettu leveämmässä keskuspolun ympäristössä.

Potra ja Sheng esittävät julkaisussaan $P_*(\kappa)$-matriisin sijaan LCP tehtäville vaihtoehtoista suuren askeleen epäkäyvän sisäpisteen algoritmia. Algoritmi luo pisteitä epäkäyvän keskuspolun lähistölle ja jos tehtävä on ratkaistavissa, konvergoituu algoritmi mielivaltaisesta positiviisesta alkupisteestä (x_0, s_0). Algoritmin laskennallinen kompleksisuus riippuu aloituspisteen laadusta ja terminoituu $O((1+\kappa)^2 nL)$ askeleessa löytämällä ratkaisun tai osoittamalla ettei tehtävä ole ratkaistavissa. Aloituspisteen ollessa käypä algoritmi konvergoituu $P_*(\kappa)$-matriisien tapaan $O((1+\kappa)nL)$ askeleessa.

4 Semidefiniitti ohjelmointi

Semidefiniitissä ohjelmoinnissa tarkoituksena on minimoida lineaarista funktiota rajoitusehtojen suhteen joiden affiinikombiaatio symmetrisistä matriiseista on positiviisisesti semidefiniitti. Semidefiniitti ohjelmointi on ollu yksi aktiivisimmista optimoinnin tutkimuksen osa-alueista 1990-luvulla. Semidefiniitti ohjelmointi käsittää useita ongelmatyyppejä, jotka ovat kiinnostavia erityisesti ohjelmointiluokan yleisyyden takia. Vaikka semidefiniitit ongelmat ovat yleisempiä kuin lineaariset ongelmat, ei niitä ole kuitenkaan kovin paljon vaikeampi ratkaista. Määriteltäessä semidefiniittiä ongelmaa notaatio $P \bullet Q$ tarkoittaa kyseessä olevien matriisien sisätuloa, joka on määritelty

$$P \bullet Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} q_{ij}.$$

Tällöin semidefiniitti ohjelmointitehtävä (SDP) määritellään standardimuodossa [1]

$$\min_{x} C \bullet X \quad \text{s.e. } A_i \bullet X = b_i,\ X \geq 0,\ i = 1, 2, ..., m \tag{36}$$

$A_i \in S\mathbf{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$ ja $C \in S\mathbf{R}^{n\times n}$ ovat annettuja ja $X \in S\mathbf{R}^{n\times n}$. Tässä $S\mathbf{R}^{n\times n}$ kuvaa $n \times n$ symmetrisen matriisin avaruutta ja $X \geq 0$ tarkoittaa että X on symmetrinen sekä positiivisesti semidefiniitti.

Ongelman (36) duaaliongelma (SDD) on muotoa

$$\max_{\lambda, S} b^T \lambda \quad \text{s.e. } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i + S = C,\ S \geq 0,\ i = 1, 2, ..., m, \tag{37}$$

missä $\lambda \in \mathbf{R}^m$ ja $S \in \mathbf{R}^{n\times n}$

Jos optimointitehtävän kohdefunktio ja rajoitusehdot ovat konvekseja on tehtävä myös konveksi. Semidefiniitit optimointitehtävät ovat siis lineaarisen kohdefunktion minimointia lineaaristen rajoitteiden suhteen, missä epäyhtälörajoitteet kuuluvat positiivisesti semidefiniittiin kartioon. Optimointiluokkaa voidaan käsitellä lineaarisen ohjelmoinnin laajennuksena, jossa vektoreiden komponenteittaiset epäyhtälörajoitteet on korvattu matriisien epäyhtälörajoitteilla.

Tämän seurauksena semidefiniittien tehtävien teoria ei eroa lineaaristen tehtävien teoriasta suuresti. Useille lineaarisille algoritmeille on olemassa laajennuksia, joiden avulla ne pystyvät ratkaisemaan myös semidefiniittejä tehtäviä. Kuitenkaan tehtävätyyppejä tarkasteltaessa duaaliominaisuudet ovat heikommat semidefiniiteillä tehtävillä, jolloin niille ei vielä löydy tehokasta, samankaltaista suoraa SIMPLEX-algoritmin tapaista metodia tehtävän ratkaisemiseksi. Anderson ja Nash [2] sekä Pataki [15] ja Lasserre [12] ovat julkaisseet tutkimuksia SIMPLEX-algoritmin kaltaisille menetelmille semidefiniittien ongelmien ratkaisemiseksi [20].

Useimmat semidefiniitin ohjelmoinnin algoritmit perustuvat keskuspolun pisteiden approksimointiin. Oletetaan että semidefiniitillä primaali- ja duaalitehtävällä on käyvät ratkaisut. Tällöin merkitään tätä potkua ratkaisuina $(X_m u, \lambda_m u, S_m u)$ ja $\mu > 0$ keskuspolun määrittäville yhtälöille

$$A_i \bullet X = b_i, \quad i = 1, ..., m, \tag{38}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_i + S = C, \tag{39}$$

$$XS = \mu I \tag{40}$$

$$X \geq 0,\ S \geq 0. \tag{41}$$

Keskuspolun yhtälöiden ratkaiseminen Newton-askeleella voisi tuntua luonnolliselta tavalta edetä, mutta kahden symmetrisen matriisin tulo ei välttämättä ole symmetrinen matriisi, jolloin Newton-askelta ei voida suoraan soveltaa tapauksessa. Eri primaali-duaali-algoritmit eroavat niiden tavassa sovittaa tulomatriisin rangi ja dimensio yhteen.

Todd esittää tutkimuksessaan [19] useita tekniikoita tulomatriisin sovitukselle. Useimmat hakusuunnat semidefiniitille ohjelmointitehtävälle on löydettävissä sijoittamalla (40) tulomatriisin tilalle “symmetrinen” matriisi, jonka rangi on $\mathbf{R}^{n \times n}$

$$\Theta(X, S) = 0. \tag{42}$$

Tästä esimerkkinä voidaan mainita Monteiro-Zhang perheen menetelmät, joissa korvataan yhtälö (42) neliöllisellä termillä [13]

$$H_p(Q) = \frac{1}{2}(PQP^{-1} + P^{-T}Q^TP^T), \tag{43}$$

joissa P on ei-singulaarinen matriisi $P \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Tästä saadaan erityyppisiä hakusuuntia vaihtamalla P muotoa. Erityyppisistä hakusuunnista tärkeimpinä voidaan mainita

- Alizadeh-Haeberly-Overton (AHO) hakusuunta, jossa $P = I$
- Helmberg-Rendl-Vanderbei-Wolkowicz [9]/Kojima-Shindoh-Hara [11]/Monteiro (HRVW/KSH/M) hakusuunta, jossa $P = S^{1/2}$
- Nesterov-Todd (NT) hakusuunta, jossa $P = [S^{1/2}(S^{1/2}XS^{1/2})^{-1/2}S^{1/2}]^{1/2}$.

Semidefiniittien ongelmien hakusuunnilla on useita optimoinnin kannalta haluttavia ominaisuuksia, jotka Todd on esittänyt julkaisussaan [19]. Myös todistukset seuraaville lauseille löytyy kyseisestä julkaisusta.

Semidefiniitit ongelmat ovat lineaaristen ongelmien laajennuksia. Kun avaruus $S\mathbf{R}^{n\times n}$ korvataan diagonaalimatriisien aliavaruudella on nämä ongelmat lineaarisia ongelmia uudelleenmuotoiltuna. Tällöin voidaan olettaa, että hakusuunnat vastaaville semidefiniitin ohjelmoinnin ongelmille ovat diagonaalimatriiseja, jotka saadaan lineaarisen ohjelmoinnin primaali-duaali hakusuunnilla.

Tehtävätyyppi ennustaa duaaligapin. Jos oletetaan että iteraatti (X, λ, S) on primaali ja duaalikäypä ja onnistutaan ottamaan täysi askel, niin seuraava iteraatti $(X + \Delta X, \lambda + \Delta\lambda, S + \Delta S)$ on myös primaali ja duaalikäypä. Tällöin voidaan kirjottaa että hakusuunta ennustaa duaaligapin jos ennustettu duaaligap on yhtäsuuri kuin duaaligap keskuspolun pisteeseen parametrilla μ.

$$S \bullet \Delta X + X \bullet \Delta S = \mu n. \tag{44}$$

Useimmat hakusuunnat ovat myös hyvin määriteltyjä. Toddin julkaisussa on tarkemmin määritelty mitkä hakusuunnat ovat hyvin määriteltyjä.

Semidefiniiteille tehtäville systeemit ovat aiemmin kuvatuilla hakusuunnilla rajoitettuja. Hakusuunnat määritellään lineaaristen yhtälöiden systeemeillä, joista kaikkia ei ole määritelty semidefiniittisen tehtävän (SDP) tai sitä vastaavan duaalitehtävän (SDD) ratkaisussa. Kuitenkin näissä tapauksissa voidaan tutkia onko systeemi rajoitettu kun X ja S konvergoituvat. Myös primaali-duaali symmetrisyys pätee osalle systeemeistä.

Edellä mainituista vain NT-hakusuunnalla on kaikki nämä ominaisuudet. H..K..M, duaali H..K..M ja MTW hakusuunnat täyttävät kaikki muut ominaisuudet paitsi primaali-duaali symmetrisyyden. Muut hakusuunnat eivät täytä kahta tai useampaa edellä mainituista ominaisuuksista.

Todd on julkaisussaan [19] myös tutkinut 20 eri hakusuuntiin perustuvien algoritmien tarkkuutta ja robustiutta. Parhaat menetelmät olivat AHO, Toh, Gu, H..K..M ja NT hakusuuntiin perustuvat menetelmät, parhaimmasta huonompaan edellä mainitussa järjestyksessä. Nämä menetelmät pääsivät haluttuun 10^{-6} tarkkuuteen primaali-duaali käypyydessä ratkaistaessa 35 eri tehtävää 7 eri tehtäväluokasta. Tarkkuudessa ja iteraatioiden määrässä parhaimmaksi menetelmäksi osoittauttui AHO-hakusuuntaan perustuva menetelmä.

5 Sisäpistemenetelmien soveltamisen rajoitukset

Sisäpistemenetelmien käytöllä on useita hyötyjä verrattuna aktiivisen joukon (active-set) menetelmiin laskennallisessa mielessä. Aktiivisen joukon menetelmillä on vaikeaa käyttää hyödyksi matriisien Q ja A ominaisuuksia muuttamatta suurta osaa menetelmän lineaarialgebran operaatioista. Sisäpistemenetelmissä ainoa monimutkainen lineaarialgebran operaatio on lineaarisen systeemin (33) ratkaisu. Koska lineaarisen systeemin rakenne ja ulottuvuudet säilyvät samana iteraatioiden ajan, lineaaristen systeemien ratkaisuun tarkoitetut algoritmit pystyvät hyödyntämään täysin systeemin ominaisuudet tehtävää ratkaistaessa.

Algoritmin implementaatioissa voidaan käyttää sovelluslähtöistä lähestymistapaa, jossa implementoijan on vain luotava koodi faktorisointiin ja (33) systeemien ratkaisuun, joka on optimoitu uuden luokan rakennetta varten. Koodit, jotka implementoivat ylemmän tason päätöksiä kuten parametrin σ tai askelpituuden α, toimivat tehokkaasti useissa (26) sovelluksissa.

Aktiivisen joukon menetelmät vaativat toisaalta huomattavasti vähemmän laskenta-aikaa kuin sisäpistemenetelmät useissa tapauksissa ja erityisesti ”warm start”-tyylisissä tapauksissa, joissa systeemin rakenteen tuomat edut eivät ole kovin merkittäviä.

Semidefiniittien ongelmien tapauksessa matriisien symmetrisyysvaatimuksen sekä muut oletukset luovat rajoitteita tehtäville. Jotta sisäpistemenetelmiä voidaan käyttää, täytyy tehdä huomattavia yksinkertaistuksia ja approksimaatioita esimerkiksi symmetrisyyden suhteen.

Sisäpistemenetelmien kehitys on vauhdittanut myös rajoitettujen optimointitehtävien tutkimusta. Kokonaislukuoptimoinnissa sisäpistemenetelmien kehitystä hidastaa SIMPLEX-menetelmän ylivoimainen tehokkuus sen “warm start”-ominaisuuksien takia.

6 Yhteenveto

Sisäpistemenetelmistä on tullut varteenotettava ja kilpailukykyinen vaihtoehto pitkään hallinneen SIMPLEX-menetelmän rinnalle ja joissain sovelluksissa sisäpistemenetelmät toimivat jopa SIMPLEX-algoritmia paremmin.

Semidefiniitin optimoinnin ja lineaaristen komplementaarisuusongelmien tutkimus on syventänyt ja yhdenmukaistanut rajoitettujen optimointiongelmien ymmärrystä. Tutkimus on tuonut parannuksia teoriaan ja algoritmeihin jolloin pystytään ratkaisemaan uudentyyppisiä tehtäviä vanhoja menetelmiä laajentamalla sekä saavuttamaan nopeampia laskenta-aikoja jo tutuille tehtäville.

Konvekseille tehtäville, joista erityisesti mainittakoon neliöllisen optimoinnin tehtävät, sisäpistemenetelmien tarjoamat mahdollisuudet vaikuttavat lupaavilta. Sisäpistemenetelmät pystyvät hyödyntämään neliöllisen ohjelmoinnin tehtävän rakennetta ja täten ratkaisemaan ongelman tehokkaasti.

Vaikka kehitys on hidastunut viime vuosina sisäpistemenetelmien parissa, on se silti mielenkiintoinen tutkimuskohde myös tulevaisuudessa.

Viitteet

[1] F. Alizadeh, Interior Point Methods in Semidefinite Programming with Applications to Combinatoral Optimization, SIAM J. Optim. 5(1), California, 1993, pp. 13-51

[2] E.J. Anderson, P. Nash, Linear Programming in Infinite-Dimensional Spaces: Theory andApplications, John Wiley & Sons, New York, 1987.

[3] K.M. Anstreicher, Linear programming in O($[n^3/\ln n]$L) operations, CORE Discussion Paper 9746, Universite Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium, January 1999, SIAM J. Optim., in preparation.

[4] K.M. Anstreicher, J. Ji, F.A. Potra, Y. Ye, Average performance of a self-dual interior-point algorithm for linear programming, in: P. Pardalos (Ed.), Complexity in Numerical Optimization, World Scientic, Singapore, 1993, pp. 1-15.

[5] M.S. Bazaraa, H.D. Sherali, C.M. Shetty, Nonlinear Programming, Theory and Algorithms, Wiley and Sons, 1993

[6] A.S. El-Bakry, R.A. Tapia, Y. Zhang, A study of indicators for identifying zero variables in interior-point methods, SIAM Rev. 36 (1), 1994, pp. 45-72.

[7] D. Goldfarb, M.J. Todd, Linear programming, in: G.L. Nemhauser, A.H.G. Rinnooy Kan, M.J. Todd (Eds.), Optimization, North-Holland, Amsterdam, 1989, pp. 73-170.

[8] J. Gondzio, Multiple centrality corrections in a primal-dual method for linear programming, Comput. Optim. Appl. 6, 1996, pp. 137-156.

[9] C. Helmberg, F. Rendl, R. J. Vanderbei, H. Wolkowicz, An Interior-point method for semidefinite programming, SIAM J. Optim. 6(2), 1996, pp. 342-361

[10] N. Karmarkar, A new polynomial-time algorithm for linear programming, Combinatorica 4, 1984, pp. 373-395.

[11] M. Kojima, S. Shindoh, S. Hara, Interior-Point Methods for the Monotone Semidefinite Linear Complementarity Problem in Symmetric Matrices, SIAM J. Optim. 7(1), 1997, pp. 86-125

[12] J.B. Lasserre, Linear programming with positive semi-definite matrices, Tech. report LAAS-94099, Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systemes du CNRS, 1995.

[13] R.D.C. Monteiro, Y. Zhang, A unified analysis for a class of long-step

primal-dual path-following interior-point algorithms for semidefinite programming, Math. Programming Ser. A 81 (3), 1998, pp. 281-299.

[14] Y. E. Nesterov, A.S. Nemirovskii, Interior point polynomial methods in convex programming: theory and applications, SIAM, Philadelphia, 1994

[15] G. Pataki, On the multiplicity ofoptimal eigenvalues, Tech. report MSRR-604, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, 1994.

[16] F.A. Portra, S.J. Wright, Interior-point methods, Journal of Computational and Applied Mathematics 124, 2000, pp. 281-302.

[17] F.A. Potra, Interior point methods for linear complementarity problems, 2007.

[18] J. Renegar, A mathematical view of interior-point methods in convex optimization, unpublished notes, June 1999.

[19] M.J. Todd, A study of search directions in primal-dual interior-point methods for semidefinite programming, Technical Report, School of Operations Research and Industrial Engineering, Cornell University, Ithaca, NY, February 1999.

[20] L. Vandenberghe, S. Boyd, Semidefinite programming, SIAM Rev. 38 (1), 1996, pp. 49-95.

[21] M.H. Wright, Interior methods for constrained optimization, in: Acta Numer. 1992, Cambridge University Press, Cambridge, 1992, pp. 341- 407.

[22] M.H.Wright, The interioir-point revolution in optimization: history, recent developments, and lasting consequences, Bulletin of the American mathematical society Vol. 42 N. 1, 2004, pp. 39-56.

[23] Y. Ye, Interior Point Algorithms: Theory and Analysis, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, Wiley, New York, 1997.

[24] Y. Zhao, J. Peng, T. Terlaky, A predictor-corrector algorithm for linear optimization based on a specific self-regular proximity function, SIAM J. Optim. 15(4), 2005, pp. 1105-1127