

AALTO YLIOPISTON PERUSTIETEIDEN KORKEAKOULU  
Teknillisen fysiikan ja matematiikan tutkinto-ohjelma

# Toistetun haukka-kyyhky -pelin numeerinen analysointi

---

Kandidaatintyö

28.11.2012

Joonas Tarpila

Työn saa tallentaa ja julkistaa Aalto-yliopiston avoimilla verkkosivuilla.  
Muilta osin kaikki oikeudet pidätetään.

AALTO-YLIOPISTO PERUSTIETEIDEN KORKEAKOULU PL 11000, 00076 Aalto <a href="http://www.aalto.fi">http://www.aalto.fi</a>		KANDIDAATINTYÖN TIIVISTELMÄ	
Tekijä: Joonas Tarpila			
Työn nimi: Toistetun haukka-kyyhky-pelin numeerinen analysointi			
Tutkinto-ohjelma: Teknillisen fysiikan ja matematiikan tutkinto-ohjelma			
Pääaine: Systemitieteet		Pääaineen koodi: Mat-2	
Vastuuopettaja(t): Prof. Harri Ehtamo			
Ohjaaja(t): TkT Kimmo Berg			
<p>Peliteoriassa voidaan helpohkosti löytää yksinkertaisille peleille Nash-tasapainotilat. Toistetuille peleille näiden tasapainotilojen löytäminen ei ole niin yksinkertaista. Kun peliä toistetaan, on syytä diskontata pelaajien saamia tuottoja. Tämä tuottojen diskonttaaminen kuvastaa pelaajien preferenssejä tulevaisuuden hyödyistä ja kärsivällisyyttä valintoja tehdessä. Diskonttauskerrointa kasvatettaessa saattaa toistetulle pelille muodostua enemmän tasapainotiloja.</p> <p>Tässä kandidaatintyössä tutkitaan toistetun haukka-kyyhky -pelin tasapainotiloja analysoimalla niitä numeerisesti. Työssä analysoidaan näiden tasapainotilojen muodostamia tasapainopolkuja kolmella eri menetelmällä. Aluksi analysoidaan tasapainopolkujen affiinisuusdimensioita joka kertoo kuinka suuren osan tilasta tasapainotuotot täyttävät verrattuna kaikkiin mahdollisiin pelin tuottoihin. Seuraavaksi analysoidaan näitä dimensioita visuaalisesti muodostaen niistä payoff-kuvaajia. Viimeiseksi analysoidaan pelaajien viimeiseksi tekemien valintojen frekvenssejä näillä tasapainopoluilla.</p> <p>Työssä havaittiin että diskonttauskertoimen kasvattaminen vaikutti merkittävästi tasapainopolkujen affiinisuusdimensioon. Tämä näkyi myös selkeästi payoff-kuvaajista. Pelaajien tekemien valintojen frekvenssit näyttivät kuitenkin pysyvän suhteellisen samanlaisina riippumatta polun maksimipituudesta mutta diskonttauskertoimen suuruudella oli pieni vaikutus.</p> <p>Jatkossa samankaltainen analysointi olisi mielekäästä tehdä muille peliteoriassa tunnetuille esimerkkipeleille.</p>			
Päivämäärä: 28.11.2012		Kieli: Suomi	
		Sivumäärä: 15+1	
Avainsanat: toistettu peli, osapelitäydellisyys, tasapainopolku			

## Sisältö

1.	Johdanto .....	1
2.	Teoreettinen tausta .....	2
2.1	Pelin normaalimuoto ja haukka-kyyhky -peli .....	2
2.2	Osapelitäydellisyys .....	2
2.3	Toistettu peli .....	3
2.3.1	Äärellisesti toistetut pelit.....	4
2.3.2	Äärettömästi toistetut pelit .....	4
2.3.3	Tasapainoehto osapelitäydellisille poluille .....	4
3	Tutkimusongelma ja -menetelmät.....	5
3.1	Elementaariset osapolut .....	5
3.2	Algoritmi jolla etsitään elementaariset osapolut .....	7
3.3	Elementaaristen osapolkujen esitys graafina.....	8
3.4	Tasapainopolkujen analysointi .....	10
3.4.1	Tasapainopolkujen dimensio.....	10
3.4.2	Payoff-kuvaajat .....	10
3.4.3	Pelaajien valintojen frekvenssit.....	10
4.	Tulokset.....	11
5.	Johtopäätökset.....	14
6.	Lähteet.....	15
7.	Liitteet .....	16

## 1. Johdanto

Peliteoriassa on esitetty useita klassisia peliesimerkkejä joiden avulla pyritään ymmärtämään sen tarjoamia teorioita paremmin. Näiden pelien Nash-tasapainotilat ovat yleisesti helpohkosti määriteltävissä. Yksittäisten pelien tasapainotilat saattavat kuitenkin lisääntyä kun peliä toistetaan useita kertoja peräkkäin. Toistokertoja voi olla joko ennalta määrätty määrä tai peliä voidaan toistaa äärettömän pitkään. Kun peliä toistetaan, on syytä diskontata pelaajien saamia tuottoja. Tämä tulevaisuuden tuottojen arvottaminen diskonttauksen avulla saattaa aiheuttaa enemmän tasapainotiloja toistetuille peleille. Diskonttaus siis kuvastaa pelaajien preferenssejä tulevaisuuden hyödyistä ja kärsivällisyyttä valintoja tehdessä.

Tämän työn tarkoituksena on tutkia numeerisesti, miten erilaiset diskonttauskertoimet vaikuttavat toistetun haukka-kyyhky -pelin mahdollisiin tasapainotiloihin. Työn alussa käydään läpi teoreettista taustaa peliteoriasta. Tämän jälkeen esitellään algoritmi, jonka avulla voidaan muodostaa tasapainopolkuja toistetuille peleille (Berg, Kitti 2011, 2012) sekä tietyt määritelmät jotka mahdollistavat näiden polkujen analysoinnin. Lopussa esitellään työssä saadut tulokset, jotka on saatu analysoimalla toistetun pelin tasapainopolkuja kolmella eri tavalla muuttaen diskonttauskertoimia ja elementaaristen tasapainopolkujen maksimipituuksia.

## 2. Teoreettinen tausta

### 2.1 Pelin normaalimuoto ja haukka-kyyhky -peli

Normaalimuotoisessa pelissä jokainen pelaaja valitsee oman strategiansa yhtäaikaan. Tämä strategioiden kombinaatio määrittää jokaiselle pelaajalle heidän pelistä saamansa tuoton (Fudenberg, Tirole 1991, Gibbons 1992). Yksi tapa havainnollistaa tällaista peliä on niin sanottu haukka-kyyhky -peli. Tässä pelissä pelaajina toimivat kaksi lintua jotka taistelevat samasta reviiristä. Molemmilla pelaajilla on kaksi vaihtoehtoa joko olla haukka ja taistella reviiristä tai olla kyyhky ja vetäytyä reviiriltä. Jos molemmat päättävät taistella, saavat he molemmat pahoja vammoja jolloin lopputuloksena on negatiivinen tuotto. Jos toinen päättää vetäytyä ja toinen taistella, saa taisteleva pelaaja koko reviirin itselleen. Jos molemmat päättävät vetäytyä, jakavat he reviirin puoliksi (Gintis 2000). Tämä haukka-kyyhky -peli voidaan esittää kuvan 1 mukaisesti 2x2-matriisina.

	Haukka	Kyyhky
Haukka	(-1,-1)	(6,0)
Kyyhky	(0,6)	(3,3)

Kuva 1: haukka-kyyhky -peli

Pelissä pelaaja 1 valitsee siis rivin ja pelaaja 2 sarakkeen mitä pelataan. Suluissa olevista luvuista ensimmäinen on pelaajan 1 saama tuotto ja jälkimmäinen pelaajan 2 saama tuotto.

Yhtenä oikean maailman esimerkkinä haukka-kyyhky -pelistä voidaan pitää 1962 tapahtunutta Kuuban ohjuskriisiä (Wikipedia, 2012, hakusana Kuuban ohjuskriisi). Tämän kriisin aiheutti amerikkalaisten ottamat satelliittikuvat, joissa näytti siltä, että Neuvostoliitto oli tuomassa ohjuksia Kuubaan. Molemmilla mailla oli tässä siis mahdollisuus tehdä asialle jotain tai olla tekemättä. Jos molemmat maat olisivat pelanneet ”haukkaa”, olisi mahdollinen lopputulos ollut kolmas maailmansota, mikä olisi ollut molemmille huono vaihtoehto. Jos taas toinen maa olisi käyttänyt voimakeinoja, ja toinen ei, olisi tuloksena ollut toisen maan ylivoima maailmankartalla. Kriisi kuitenkin ratkesi siihen, että Yhdysvallat eivät tuhonneet laivaa, joka oli kuljettamassa ohjuksia, vaan se kääntyi omasta tahdostaan takaisin kohti Neuvostoliittoa. Lopputulos oli siis kyyhky-kyyhky tässä pelissä.

### 2.2 Osapelitäydellisyys

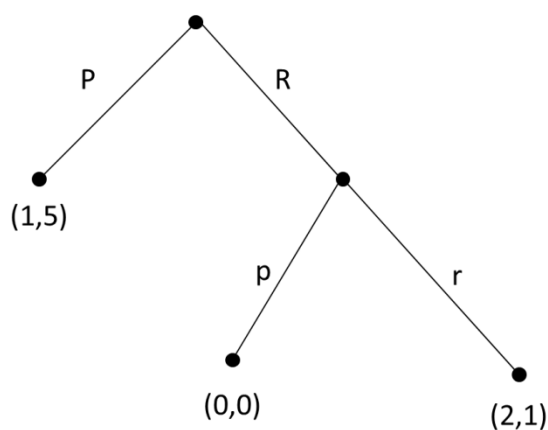
Tarkastellaan seuraavaksi yksinkertaista dynaamista peliä, jossa oletetaan että, peli etenee vaiheittain, ja että edellisen vaiheen lopputulemat tiedetään ennen kuin tehdään seuraavan

kierroksen valinnat. Pelissä on neljä pelaajaa, joista pelaajat yksi ja kaksi sekä kolme ja neljä pelaavat samaan aikaan. Aluksi pelaajat yksi ja kaksi valitsevat toimintonsa, jotka tuottavat heille tuotot  $A_1$  ja  $A_2$ . Tämä jälkeen pelaajat kolme ja neljä tekevät valintansa sen perusteella, mitä pelaajat yksi ja kaksi valitsivat. Näin ollen, koska pelaajat yksi ja kaksi voivat nähdä ennen omia valintojaan tuotot pelaajille kolme ja neljä, voivat he tehdä toimintonsa sen perusteella, mitä olettavat pelaajien pelaavan. Tämä on mahdollista, koska pelin oletuksena oli, että pelaajat tiesivät edellisten pelaajien valinnat ennen kuin tekivät omat valintansa. Nyt jos oletetaan että pelaajien yksi ja kaksi valinnat  $A_1$  ja  $A_2$  ovat pelin ensimmäisen vaiheen Nashin tasapaino, voidaan kirjoittaa pelin aiheuttamat tuotot pelaajille muotoon

$$u_i(a_1, a_2, a_3^*(a_1, a_2), a_4^*(a_1, a_2)), \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

Tätä kutsutaan kyseisen pelin osapelitäydellisyydeksi pelaajien saamille tuotoille (Fudenberg, Tirole 1991, Gibbons 1992).

Kuvassa 2 on esitetty esimerkki osapelitäydellisyydestä. Tässä esimerkissä Nash-tasapaino on valinta (R, r). Pelaaja 2 voi kuitenkin uskotella pelaajalle 1 pelaavansa valinnan p jolloin pelaajan 1 paras vaste on pelata P. Tällöin myös valinta (P, p), joka antaa tuotot (1,5), on Nash-tasapaino ja siten se on pelin osapelitäydellinen tasapaino.



Kuva 2 esimerkki osapelitäydellisyydestä

### 2.3 Toistettu peli

Toistetulla pelillä tarkoitetaan sellaista peliä jossa pelataan samaa peliä useampia kierroksia. Toistetuissa peleissä siis tulevien kierrosten valinnat saattavat vaikuttaa siihen mikä on itselleen paras mahdollinen valinta kyseisellä kierroksella (Fudenberg, Tirole 1991, Gibbons 1992).

### 2.3.1 Äärellisesti toistetut pelit

Äärellisesti toistetut pelit ovat sellaisia pelejä joita toistetaan ennalta määrätyn monta kertaa. Yksinkertaisin äärellisesti toistettu peli on peli, jota toistetaan kaksi kertaa. Tällaisessa pelissä pelaajien tuotot voidaan yksinkertaisesti summata yhteen (Fudenberg, Tirole 1991, Gibbons 1992). Jos siis luvussa 2.1. esitetyn haukka-kyyhky -pelin ensimmäisellä kierroksella pelataan kyyhky-kyyhky, niin tuotot pelaajille toisella kierroksella ovat kuvan 3 mukaiset.

	Haukka	Kyyhky
Haukka	(2,2)	(9,3)
Kyyhky	(3,9)	(6,6)

Kuva 3 Toistettu haukka-kyyhky -peli

Samalla tavoin voidaan summata minkä tahansa ensimmäisen kierroksen valintojen aiheuttamat tuotot seuraavan kierroksen tuottoihin.

### 2.3.2 Äärettömästi toistetut pelit

Äärellisesti ja äärettömästi toistettujen pelien erona on, että äärettömästi toistetuille peleille voidaan löytää osapelitäydellisiä vaihtoehtoja, vaikka ne eivät olisikaan kyseisen kierroksen Nash-tasapainoja (Fudenberg, Tirole 1991, Gibbons 1992). Äärettömästi toistetuissa peleissä ei ole myöskään mielekästä summata pelaajien tuottoja yhteen. Sen sijaan, että tuotot summattaisiin yhteen, käytetään hyväksi diskonttauskerrointa  $\delta = 1/(1+r)$ , jolla saadaan määritettyä tuoton nykyarvo. Diskonttauksen perusidea on siis, että euro tänään ei ole samanarvoinen kuin euro vuoden päästä. Näin ollen pelaajan  $i$  saamat tuotot saadaan laskettua seuraavasti

$$U_i(\sigma) = (1 - \delta_i) \sum_{k=0}^{\infty} \delta_i^k u_i(a^k(\sigma)) \quad (2)$$

Tässä  $\sigma$  on pelaajan käyttämät strategiat kullakin kierroksella ja  $a^k$  on kyseisen strategian määräämä polku. Termi  $(1 - \delta_i)$  skaalaa tuotot, jotta ne voidaan esittää samassa kuvaajassa selkeämmin. Pelaajien käyttämät valinnat muodostavat polkuja, joita on mielekästä tutkia.

### 2.3.3 Tasapainoehto osapelitäydellisille poluille

Osapelitäydelliset strategiat voivat olla hyvin monimutkaisia. Näiden tasapainopolkujen analysointia voidaan yksinkertaistaa siten, että kaikkea tasapainokäyttäytymistä tukee fakta ekstremaalaisesta rankaisusta (Abreu 1988, Abreu et al. 1990). Tämä tarkoittaa, että jokaisen polun kohdalla ei tarvitse tutkia onko se osapelitäydellinen polku, riittää näyttää, että missään

polun vaiheessa ei ole tuottoisempaa siirtyä muuhun valintaan, kun se johtaa ekstremaali rankaisuun. Seuraavassa pienimmät tasapainotuotot merkitään

$$\bar{v}_i = \min\{v_i: v \in V\}$$

missä  $V$  on osapelitäydellisten tuottojen joukko. Nyt siis osapelitäydellisille poluille on tunnusomaista se, että ne eivät sisällä sellaisia toimintoja, jotka johtaisivat kannattavampaan poikkeamaan missään pelin vaiheessa. Näin ollen polku  $p = a^0(\sigma)a^1(\sigma) \dots$  pelistrategialla  $\sigma$  on osapelitäydellinen polku jos ja vain jos

$$(1 - \delta_i)u_i(a^k(\sigma)) + \delta_i v_i^k \geq \max_{a_i \in A_i} \left[ (1 - \delta_i)u_i(a_i, a_{-i}^k(\sigma)) + \delta_i \bar{v}_i \right] \quad (3)$$

kaikille  $i \in N, k \geq 0$ , ja missä

$$v_i^k = (1 - \delta_i) \sum_{j=0}^{\infty} \delta_i^j u_i(a^{k+1+j}(\sigma))$$

on jatkotuotto  $a^k(\sigma)$ :n jälkeen. Nyt ehto 3 tarkoittaa, että pelaajat suosivat valintaa, joka määräytyy osapelitäydellisen polun mukaan mieluummin kuin poikkeaisivat siitä, ja sen myötä saisivat ekstremaalisen rankaisun tuoton (Abreu 1988, Abreu et al. 1990).

### 3 Tutkimusongelma ja -menetelmät

Työssä tutkitaan tilannetta jossa haukka-kyyhky -peliä toistetaan äärettömän monta kertaa. Aluksi selvitetään miten löydetään pelin elementaariset osapolut. Nämä osapolut määrittävät kaikki pelin palaset, joista osapelitäydelliset polut voivat koostua.. Tämän jälkeen muodostetaan niistä äärettömän pitkiä polkuja. Elementaariset osapolut toteutetaan algoritmilla käyttäen hyväksi Matlab -ohjelmistoa. Algoritmia ajetaan erilaisilla parametreilla muuttaen mm. diskonttauserrointa. Saatuja tuloksia analysoidaan tämän jälkeen esimerkiksi muodostamalla niistä payoff-kuvaajia.

#### 3.1 Elementaariset osapolut

Oletetaan, että pelataan peliä, jota toistetaan äärettömän monta kertaa, ja pelaajat diskonttaavat tuottoensa. Lisäksi oletetaan, että pelaajilla on täydellinen tieto pelin historiasta, ja he tutkivat pelihistorian ennen jokaisen kierroksen alkua. Pelihistoria pitää siis sisällään kaikkien aiempien kierrosten pelaajien valinnat. Nyt voidaan merkitä, että  $A^k$  sisältää  $k$ :n pelikierroksen valinnat, eli  $k$ :n pituiset polut. Äärettömän pitkiä polkuja voidaan taas merkitä



$A^\infty$ . Alussa polku on tyhjä, eli  $A^0 = \{\emptyset\}$ . Nyt merkitään kuvan yksi haukka-kyyhky -pelin pelaajien valintavaihtoehtoja seuraavasti:

	Haukka	Kyyhky
Haukka	a	b
Kyyhky	c	d

Kuva 4 Haukka-kyyhky -pelin vaihtoehtoinen esitysmuoto

Näin ollen voidaan merkitä, että  $A^k(a)$  on kaikkien  $k$  mittaisten polkujen joukko, jotka alkavat toiminnolla  $a$ , ja vastaavasti  $A^\infty(a)$  on äärettömän pitkien polkujen joukko jotka alkavat toiminnolla  $a$ . Näistä poluista, joita muodostuu pelin edetessä, on mielekästä tutkia vain sellaisia, jotka ovat osapelitäydellisiä tasapainopolkuja. Olennaista on, että nämä osapelitäydelliset polut määritellään elementaaristen osapolkujen avulla. (Berg, Kitti 2012)

Esimerkki 1. Oletetaan, että on neljä valintaa:  $A = \{a, b, c, d\}$ . Lisäksi oletetaan että joukko  $P^k(a), k = 1, 2, a \in A$  ovat taulukon 1 mukaiset.

Taulukko 1 Esimerkin 1 joukot  $P^1(a)$  ja  $P^2(a)$

	$a$	$b$	$c$	$d$
$P^1$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{d\}$
$P^2$	$\{aa\}$	$\{ba, bc\}$	$\{ca, cb\}$	$\emptyset$

Tässä siis  $aa \in P^2(a)$  tarkoittaa sitä, että mitä tahansa tasapainopolkua  $a$  tulee aina seurata uudestaan valinta  $a$ . Seuraavan polun valinnalla ei ole merkitystä, kunhan se vain on tasapainopolku. Kuitenkin on syytä huomioida, että taulukon 1 mukaiset joukot eivät mahdollista muuta valintaa  $a$ :n jälkeen kuin  $a$ :n. Näin ollen tasapainopolulla ensimmäisen  $a$ :n jälkeen kaikki seuraavat valinnat ovat  $a$ . Toisaalta nähdään että valintaa  $b$  voi seurata joko valinta  $ba$  tai  $bc$ . Tämän jälkeen on mahdollista muodostua tasapainopolku, joka alkaa joko  $a$ :lla tai  $c$ :llä. Vastaavalla tavalla saadaan tapaukset valinnalle  $c$ . Viimeiseksi nähdään, että koska  $d \in P^1(d)$ , voi sitä seurata mikä tahansa tasapainopolku.

Nyt siis joukot  $P^k, k \geq 1$  ja  $P^\infty$  antavat osapolut, joita voi seurata mikä tahansa valinta. Tiedetään siis, että jokaista valintaa  $a$ , joka on tasapainopolulla, seuraa osapolku, joka kuuluu joukkoon  $P^k(a)$  jollain  $k$ :lla tai joukkoon  $P^\infty(a)$ . Tämä tarkoittaa sitä, että tasapainopolut noudattavat tiettyä syntaksia, jonka määrittelevät elementaariset osapolut (Berg, Kitti 2012).

### 3.2 Algoritmi jolla etsitään elementaariset osapolut

Aluksi määritetään rekursiivinen tapa laskea tuottovaatimukset. Tutkitaan ensiksi osapolkua, joka on muotoa  $abc$ . Vektori, jolla pelaajat saavat pienimmän tuoton  $con(ab)$  kun on pelattu valinnat  $ab$  ja että valinta  $a$  olisi mielekäs, voidaan laskea seuraavasta lausekkeesta

$$(I - T)u(b) + Tcon(ab) = con(a),$$

missä  $I$  on identiteettimatriisi ja  $T$  on matriisi jonka diagonaalilla on diskonttauskerroimet kaikille pelaajille. Nyt pienin tuotto, jonka pelaaja  $i$  voi saada, on  $v_i^-(V)$ . Tässä  $V$  on pelaajien tasapainotuottojen joukko. Jos huomataan että  $con_i(a) \leq v_i^-(V)$ , merkitään yksinkertaisesti  $con_i(a) = v_i^-(a)$ . Näin ollen, koska  $con(ab)$  tiedetään, voidaan laskea pienin tuotto valintojen  $abc$  jälkeen, jotta  $a$  olisi mielekäs seuraavasti

$$(I - T)u(c) + Tcon(abc) = con(ab)$$

Nyt jos  $con(abc) \leq con(c)$ , niin mikä tahansa tasapainopolku, joka alkaa  $c$ :llä, on mahdollinen jatko  $abc$ :lle, kun on pelattu valinta  $a$ . Edellä mainitulla tavalla voidaan yleisesti määrittää  $con(p)$  mille tahansa polulle  $p \in A^k, k \geq 2$ . Nyt jos  $con(p^{k-1})$  tiedetään ja  $p = p^{k-1}a^k$  voidaan kirjoittaa

$$con_i(p) = \max\{[con_i(p^{k-1}) - (1 - \delta_i)u_i(a^k)]/\delta_i, v_i^-(V)\}$$

Näin ollen  $con(p)$  on jatkotuottovektori, joka tarvitaan polun viimeisen elementin jälkeen, jotta  $p$  olisi mielekäs ensimmäiseksi valinnaksi (Berg, Kitti 2012).

Itse algoritmi, jolla määritetään elementaariset osapolut, luo ensiksi joukon  $\hat{P}^k$  joka saattaa sisältää osapolkuja, joissa on ei-tasapainoisia osia. Nämä osapolut poistetaan algoritmin myöhemmässä vaiheessa.

1. Kaikille  $a \in A$  otetaan mukaan  $a \in \hat{P}^1(a)$  jos  $con(a) \leq v_i^-(V)$  kaikille  $i \in N$ . Jos  $v_i^-(V) \leq con_i(a) \leq \bar{v}_i$  kaikille  $i \in N$ , ja ensimmäinen epäyhtälö on tiukka joillekin  $i \in N$ , niin  $a$  lisätään joukkoon  $P_*^1(a)$ . Asetetaan että  $k = 2$ . Siirrytään kohtaan kaksi.
2. Jokaiselle  $a, b \in A, p \in P_*^{k-1}(a)$  etsitään  $con(q)$ , missä  $q = pb$ .

a) Jos  $con(q) \leq con(b)$  ja

$$q_j \in P_*^{k-j}(i(q_j)) \text{ tai } q_j^l \in \hat{P}^l(i(q_j)), \forall j = 1, \dots, k - 1$$

joillekin  $1 \leq l \leq k - j$ , niin lisätään  $q$  joukkoon  $\hat{P}^k(a)$

b) Muutoin, jos  $\text{con}_i(q) \leq \bar{v}_i$  kaikille  $i \in N$  ja  $q$  täyttää yllä olevan ehdon, lisätään  $q$  joukkoon  $P_*^k(a)$

Jos  $P_*^k(a) = \emptyset$  kaikille  $a \in A$  niin lopeta algoritmi. Muutoin kasvata  $k$ :ta yhdellä ja toista kohta 2.

3. Poista osapolut joissa on ei-tasapainoisia osia joukosta  $\hat{P}^k$  ja määritä elementaaristen osapolkujen joukko  $P^k$ .

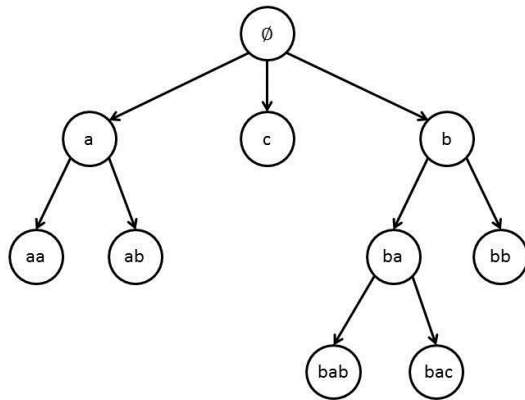
Kohta 3 selitetään tarkemmin seuraavassa luvussa 3.3.

### 3.3 Elementaaristen osapolkujen esitys graafina

Luvussa 3.2 esitetty algoritmi jättää joukkoon  $\hat{P}^k$  polkuja, jotka sisältävät ei-tasapainoisia osia. Nämä ei-toivotut polut voidaan poistaa joukosta samaan aikaan kun luodaan saaduista tasapainopoluista graafiesitys. Alla on esitetty tämä algoritmi.

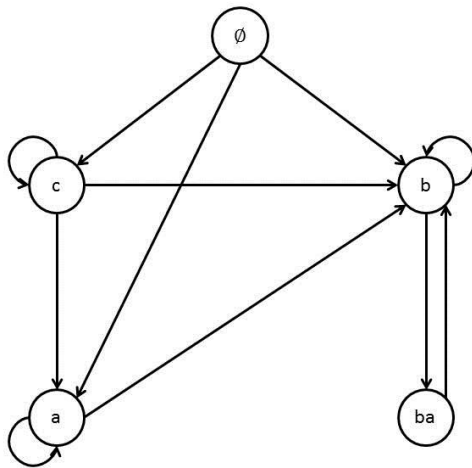
1. Muodosta puu osapoluista jotka ovat joukossa  $\hat{P}^k$ . Juurisolmu on tyhjä historia  $\emptyset$ .
2. Muunna puu graafiksi. Jokainen solmu puussa vastaa jotain solmua graafissa. Muodosta kaaret solmujen välille ja määritä jokaiselle kaarelle jokin päätössolmu.
  - a) Puun sisäsolmun määränpää. Eli solmu jolla on ”lapsia” ovat kyseisen solmun ”lapsia”. Muodosta kaari jokaiseen määränpää solmuun.
  - b) Puun lehtisolmun määränpää. Eli solmu jolla ei ole ”lapsia” ja joka on yhdistetty juurisolmuun  $\emptyset$ . Nämä solmut ovat kaikki juurisolmun ”lapsia”.
  - c) Puun muiden lehtisolmujen määränpää, eli osapolut  $p \in \hat{P}^k$ . Etsi pienin  $i \geq 1$  jolle  $p_i$  löytyy puusta. Jos  $p_i$  löytyy ja se on sisäsolmu, poista solmu  $p$  ja yhdistä  $p^{|p|-1}$  solmuun  $p_i$ . Jos  $p_i$ :tä ei löydy ja pisin yhteinen polku puun kanssa on sisäsolmu, niin osaa  $p$ :stä ei voi esiintyä tasapainopolulla ja solmu poistetaan graafista.
3. Syötä äärettömän pitkien tasapainopolkujen solmut ja kaaret. Jokaiselle osapolulle etsi suurin  $i$  että  $p^i$  on solmu. Syötä kaari merkillä  $p^i$  solmusta tyhjään vastaavaan solmuun polulla.

Esimerkki 2. Oletetaan että, joukossa  $\hat{P}^k$  on osapolut:  $c$ ,  $aa$ ,  $ab$ ,  $bb$ ,  $bab$  ja  $bac$ . Näitä osapolkuja vastaava puu on esitetty kuvassa 5.



**Kuva 5 Esimerkin 2 osapolkujen puu**

Huomataan, että osapolku *bac* sisältää ei-tasapainoisen osan, koska ei ole elementaarista osapolkua, joka alkaisi *ac*. Näin ollen osapolku *bac* ei voi olla osa tasapainopolkua. Huomataan, että tämä solmu poistuu, kun joukko  $\hat{P}^k$  ajetaan aiemmin esitetyn algoritmin läpi (Berg, Kitti 2012). Kuvassa 6 on esitetty osapolkujen muodostama graafi ja osapelitäydelliset tasapainopolut.



**Kuva 6 Esimerkin 2 osapolkujen graafi**

### 3.4 Tasapainopolkujen analysointi

Tässä osiossa on tarkoitus kertoa erilaisista tavoista joilla algoritmista saatuja tasapainopolkuja voidaan analysoida. Tässä työssä käytettiin kolmea eri tapaa analysoida polkuja.

#### 3.4.1 Tasapainopolkujen dimensio

Ensimmäinen tapa tulkita tasapainopolkujen hyvyttä on tutkia niiden dimensioita. Algoritmilla saatu graafi voidaan esittää  $m \times m$  vierusmatriisina  $D$ , missä  $m$  on graafissa olevien solmujen lukumäärä, ja  $D_{ij} = 1$  jos solmujen välillä on kaari ja vastaavasti  $D_{ij} = 0$  jos kaarta ei ole (Cvetkovic et al. 1997). Tämän matriisin ominaisarvoja ja -vektoreita voidaan hyödyntää tasapainojen analysoinnissa.

Yksi fraktaalimitaustapa on Hausdorff dimensio. Se kertoo intuitiivisesti kuinka tasapainotuotot täyttävät kaikkien mahdollisten tuottojen muodostaman tilan (Falconer 1988). Itse Hausdorffin dimensiota ei voida suoraan laskea vaan lasketaan ns. affiinisuusdimensio. Tämä on hyvä estimaatti Hausdorff dimensiolle. Affiinisuusdimensio voidaan määrittää seuraavan kaavan avulla

$$\dim_A(V) = -\frac{\log \rho(D)}{\log \delta},$$

missä  $\rho(D)$  on vierusmatriisin suurin ominaisarvo. Mitä suurempi luku  $\dim_A(V)$  on, sitä paremmin tasapainotuotot täyttävät kaikkien mahdollisten tuottojen muodostaman tilan.

#### 3.4.2 Payoff-kuvaajat

Toinen tapa analysoida tasapainopolkuja on payoff-kuvaaja. Kuvaajiin on piirretty ”kaikki” tasapainotuottoja vastaavat pisteet. Yleisesti voidaan todeta, että kun diskonttauskerroin kasvaa, muodostuu yhä enemmän tasapainopolkuja ja usein myös enemmän elementaarisia osapolkuja, ja näin ollen graafi kasvaa (Berg, Kitti 2012). Näistä kuvaajista voidaan nähdä edellisessä kohdassa esitetyn affiinisuusdimension kasvu.

#### 3.4.3 Pelaajien valintojen frekvenssit

Kolmas tapa analysoida tasapainopolkuja on tutkia pelaajien tekemien valintojen frekvenssejä. Tämä tarkoittaa sitä että jos tasapainopolku on muotoa  $abba^\infty$ , kasvattaa se ainoastaan valinnan  $a$  frekvenssiä. Frekvenssien tutkinnassa on tarkoitus selvittää, vaikuttavatko elementaaristen osapolkujen maksimipituudet tai diskonttauskertoimet merkittävästi eri valintojen frekvensseihin. Nämä frekvenssit saadaan selville tutkimalla

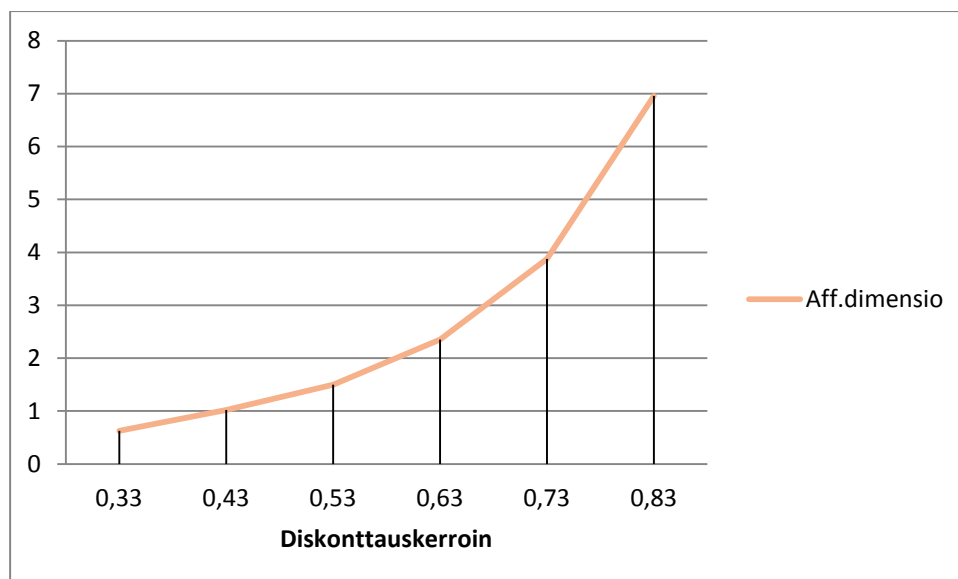
vierusmatriisin  $D$  ominaisvektoreita. Aluksi selvitetään suurinta ominaisarvoa vastaava ominaisvektori ja normeerataan se. Seuraavaksi verrataan tätä vektoria saatuihin tasapainopolkuihin ja lasketaan frekvenssit eri valinnoille. Tämä toteutetaan Matlab-ohjelmistolla, käytetty koodi löytyy liitteestä 1.

#### 4. Tulokset

Ensimmäiseksi analysoitiin eri diskonttauskertoimien vaikutusta affiinisuusdimensioon. Diskonttauskertoimia kokeiltiin kuutta erilaista. Nämä diskonttauskertoimet ja niiden aiheuttamat dimensiot on esitetty taulukossa 2 ja kuvassa 7.

Taulukko 2 Affiinisuusdimensiot eri diskonttauskertoimilla

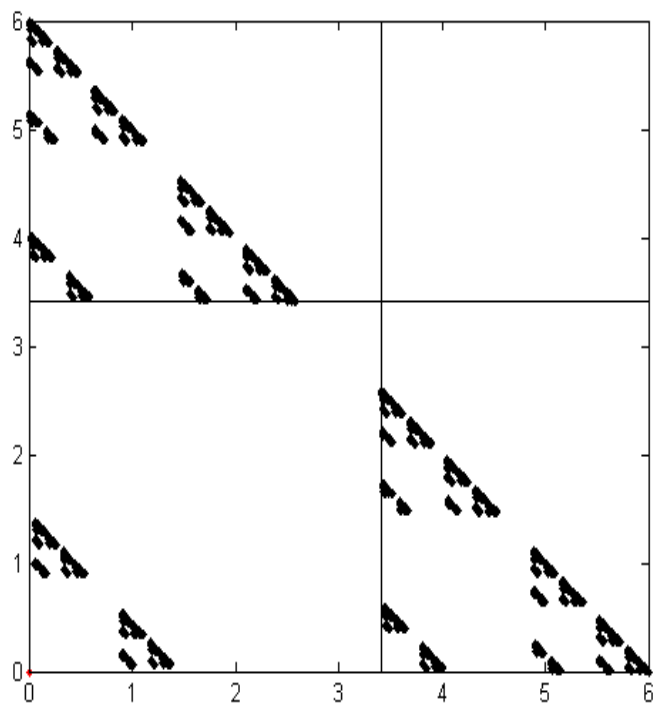
Diskonttauserroin	0,33	0,43	0,53	0,63	0,73	0,83
Aff.dimensio	0,6252	1,0171	1,4958	2,3536	3,8743	6,9536



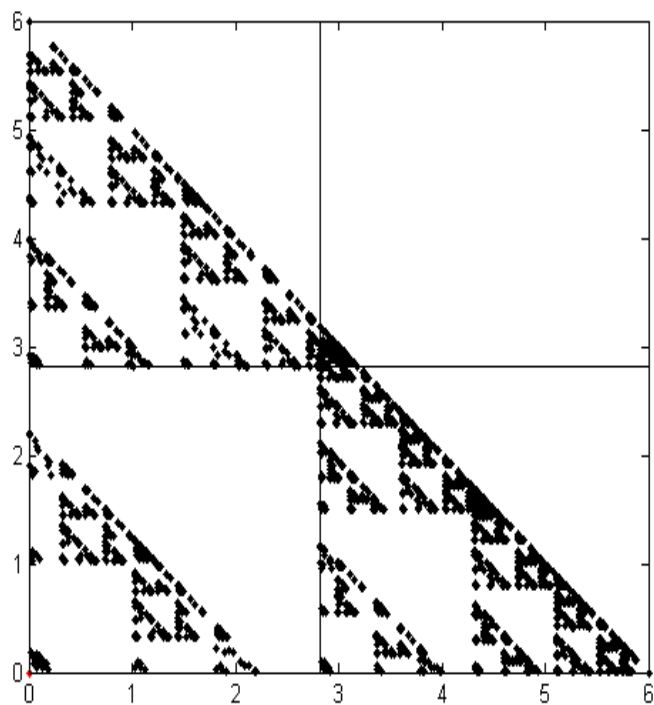
Kuva 7 Affiinisuusdimensioiden kuvaaja eri diskonttauskertoimilla

Kun  $\delta < 0,5$  on affiinisuusdimensio sama kuin Hausdorff dimensio. Kun  $\delta \geq 0,5$ , eivät dimensiot enää yhdy. Hausdorff dimensio on kuitenkin likimain affiinisuusdimensio. Hausdorff dimensio ei kuitenkaan tämän pelin tapauksessa voi olla yli 2, koska kyseessä on kahden pelaajan peli (Mauldin, Williams 1988, Ngai, Wang 2001). Taulukosta nähdään, että diskonttauskertoimella on suuri vaikutus affiinisuusdimension suuruuteen. Dimensioiden erot voidaan nähdä hyvin payoff-kuvaajista.

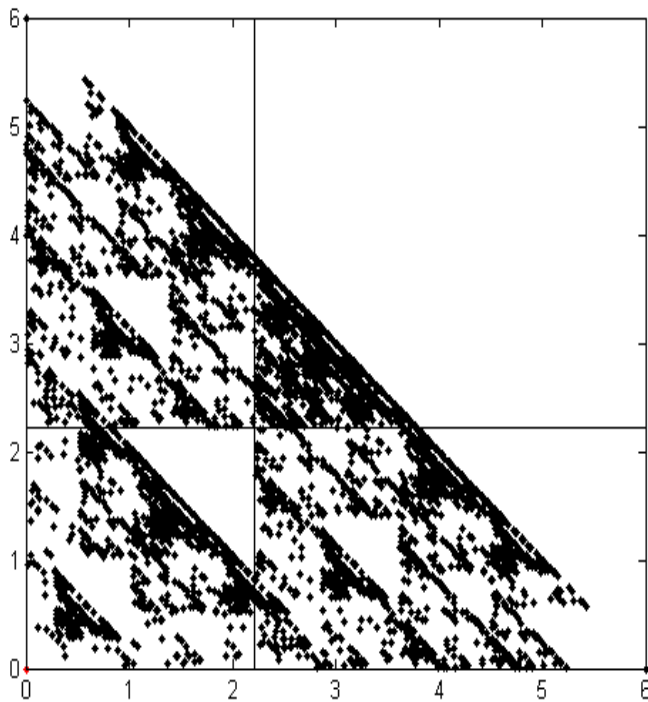
Kuvissa 8, 9 ja 10 on esitetty payoff-kuvaajat kolmelle eri diskonttauskerroimelle.



Kuva 8 Payoff-kuvaaja kun  $\delta = 0,43$



Kuva 9 Payoff-kuvaaja kun  $\delta = 0,53$



**Kuva 10** Payoff-kuvaaja kun  $\delta = 0,63$

Kuvissa akselit ovat molempien pelaajien odotetut tuotot. Kuvista nähdään siis selkeästi, miten tila täyttyy enemmän, kun diskonttausta kasvatetaan. Tämä sama nähtiin myös affiinisuusdimension kasvuna kuvassa 7. Taulukosta 2 nähdään, että kun  $\delta = 0,63$ , on affiinisuusdimensio yli 2. Kuvasta 10 havaitaan, että pisteiden (3,3) ja (4,2) ympärillä on paljon pisteitä, mutta muualla on vielä tyhjää tilaa. Tämä selittyy sillä, että Hausdorff dimensio kuvaa maksimaalista tiheyttä, eli payoff-joukko voi olla joissain kohdissa täysi ja joissain kohdissa on vielä tyhjää tilaa.

Seuraavaksi analysoitiin, miten pelaajien valintojen frekvenssit käyttäytyvät kun diskonttausta lisätään ja/tai elementaaristen osapolkujen maksimipituutta kasvatetaan. Tutkittavaksi valittiin kolme eri diskonttauskerrointa, ja kaikille kertoimille laskettiin frekvenssit kolmella eri polun maksimipituudella. Nämä saadut frekvenssit on esitetty taulukossa 3.



Taulukko 3 Frekvenssit prosentteina eri diskonttauskertoimilla ja polun maksimipituuksilla

Diskonttaus	Elementaaristen osapolkujen maksimipituus	Valinnat			
		a	b	c	d
0,68	10	18,46 %	27,08 %	27,08 %	27,37 %
0,68	8	18,65 %	26,73 %	26,73 %	27,90 %
0,68	6	21,62 %	25,20 %	25,20 %	27,99 %
0,53	15	11,88 %	31,56 %	31,56 %	25,00 %
0,53	10	12,06 %	31,25 %	31,25 %	25,44 %
0,53	5	12,65 %	30,61 %	30,61 %	26,14 %
0,50	18	19,53 %	22,01 %	22,01 %	36,46 %
0,50	12	19,53 %	22,00 %	22,00 %	36,47 %
0,50	6	19,35 %	21,58 %	21,58 %	37,49 %

Taulukosta nähdään, että pienimmällä diskonttauskertoimella frekvenssit painottuvat enemmän valintaan *d*, eli pelin alkuperäiseen Nash-tasapainoon. Tällä kertoimella ei elementaarisen osapolun maksimipituudella ole suurta merkitystä. Diskonttauskertoimella 0,53 frekvenssit painoutuivat valintoihin *b* ja *c*. Tässä elementaarisen osapolun maksimipituudella on suurempi merkitys kuin pienemmällä kertoimella, ei kuitenkaan erityisen merkittävä. Diskonttauskertoimella 0,68 ovat valinnat *b*, *c* ja *d* lähes yhtä suosittuja. Tässä pienellä lisäyksellä elementaarisen osapolun maksimipituuteen oli jo huomattavasti suurempi merkitys kuin muilla diskonttauskertoimilla.

## 5. Johtopäätökset

Työssä saatiin tulokseksi, että diskonttauskertoimen ja polun maksimipituuden kasvattaminen aiheuttaa toistetulle pelille enemmän tasapainotiloja. Tämä johtuu siitä, että mitä enemmän tulevaisuudessa saatavaa tuottoa arvotetaan, sitä kannattavampaa on pelata jotain muuta kuin alkuperäistä Nash-tasapainoa. Diskonttauskertoimen kasvattamisella oli suurempi vaikutus affiinisuusdimensioon kuin valintojen frekvensseihin. Affiinisuusdimension kasvu voitiin selkeästi nähdä payoff-kuvaajista. Polun maksimipituudella ei näyttänyt olevan suurta merkitystä frekvensseihin diskonttauskertoimilla 0,5 ja 0,53. Suuremmalla

diskonttauskerroimella 0,68 huomattiin maksimipituudella olevan vaikutusta frekvensseihin. Tämä vaikutus ei kuitenkaan ollut yhtä merkittävä kuin dimensioiden suhteen.

Tässä työssä tutkimus tehtiin vain yhdelle pelille, joten jatkossa samankaltainen analysointi olisi mielekäästä tehdä myös muille tunnetuille peleille. Mielenkiintoinen tutkimuksen kohde voisi olla pelaajien valintojen frekvenssien käyttäytyminen, kun diskonttausta ja/tai polun maksimipituutta kasvatetaan.

## 6. Lähteet

ABREU, D., 1988. On the Theory of Infinitely Repeated Games with Discounting. *Econometrica*, **56**(2), pp. 383-396.

ABREU, D., PEARCE, D. and STACCHETTI, E., 1990. Toward a Theory of Discounted Repeated Games with Imperfect Monitoring. *Econometrica*, **58**(5), pp. 1041-1063.

BERG, K. and KITTI, M., 2012. *Equilibrium Paths in Discounted Supergames*. Käsikirjoitus.

BERG, K. and KITTI, M., 2011. *Computing Equilibria in Discounted  $2 \times 2$  Supergames*. Springer Netherlands.

CVETKOVIC, D., ROWLINSON, P. and SIMIC, S., 1997. *Eigenspaces of graphs*. Cambridge University Press.

FALCONER, K.J., 1988. The Hausdorff dimension of self-affine fractals. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **103**(02), pp. 339-350.

FUDENBERG, D.A. and TIROLE, D.F.J., 1991. *Game Theory*. Mit Press.

GIBBONS, R., 1992. *A primer in game theory*. Harvester Wheatsheaf.

GINTIS, H., 2000. *Game theory evolving: A problem-centered introduction to modeling strategic interaction*. Princeton University Press.

MAULDIN, R.D. and WILLIAMS, S.C., 1988. Hausdorff Dimension in Graph Directed Constructions. *Transactions of the American Mathematical Society*, **309**(2), pp. 811-829.

NGAI, S. and WANG, Y., 2001. Hausdorff Dimension of Self-Similar Sets with Overlaps. *Journal of the London Mathematical Society*, **63**(3), pp. 655-672.

WIKIPEDIA. 2012. Vapaa tietosanakirja. Saatavissa:  
[http://fi.wikipedia.org/wiki/Kuuban\\_ohjuskriisi](http://fi.wikipedia.org/wiki/Kuuban_ohjuskriisi). Hakupäivä 28.11.2012

## 7. Liitteet

```
function [maxVector, dimension, maxValue, normit, X, frekvenssit]=
analyze(adj, names, diskonttaus)
%Etsi isoin ominaisvektori
adj=adj';
[V d]=eig(adj);
%Maksimi ominaisarvo ja sen indeksi
[maxValue, index] = max(diag(d));
%Vastaava ominaisvektori V:ssä
maxVector = V(:, index);
%Laske Haurdorffin dimensio
dimension=-log(maxValue)/log(diskonttaus);
%Pilko syklit
X=[];
[n m]=size(names);
for i=1:m
x=double(names(:, i));
eval(['x=[' sprintf('%c ', sprintf('%ld\n', x)) '] ']);
[k l]=size(x);
if l==1
X(end+1)=x;
else
    X(end+1)=x(end);
end
end
X=X';
%Laske frekvenssit
normit=maxVector/sum(maxVector);
frekvenssit=[0 0 0 0];
[o p]=size(X);
for h=1:o
    if X(h, :)==1
        frekvenssit(1, 1)=frekvenssit(1, 1)+normit(h, :);
    elseif X(h, :)==2
        frekvenssit(1, 2)=frekvenssit(1, 2)+normit(h, :);
    elseif X(h, :)==3
        frekvenssit(1, 3)=frekvenssit(1, 3)+normit(h, :);
    elseif X(h, :)==4
        frekvenssit(1, 4)=frekvenssit(1, 4)+normit(h, :);
    end
end
end
```