

Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu
Teknillisen fysiikan ja matematiikan koulutusohjelma

Monte Carlo -menetelmä optioiden hinnoittelussa

kandidaatintyö
10.9.2015

Niko Laakkonen

Työn saa tallentaa ja julkistaa Aalto-yliopiston avoimilla verkkosivuilla.
Muilta osin kaikki oikeudet pidätetään.

Tekijä Niko Laakkonen

Työn nimi Monte Carlo -menetelmä optioiden hinnoittelussa

Koulutusohjelma Teknillisen fysiikan ja matematiikan koulutusohjelma

Pääaine Matematiikka ja systeemitieteet

Pääaineen koodi SCI3029

Vastuuopettaja Prof. Harri Ehtamo

Työn ohjaaja(t) TkT Eeva Vilkkumaa

Päivämäärä 10.9.2015

Sivumäärä 22+6

Kieli suomi

Tiivistelmä

Optiot antavat oikeuden käydä kauppa jollakin kohde-etuudella (kuten osakkeella) ennalta määrätyillä ehdoilla tulevaisuudessa. Option hinta riippuu kohde-etuuden hintakehityksestä, ja sen määrittämiseen käytetään useimmiten Black-Scholes-mallia. Mallissa täytyy ratkaista osittaisdifferentiaaliyhtälö, mikä ei usein onnistu analyttisesti. Tällöin on tarpeen käyttää numeerisia menetelmiä, kuten Monte Carlo -menetelmää. Monte Carlo -menetelmässä kohde-etuuden hintapolkua simuloidaan moneen kertaan ja option hinnalle lasketaan estimaatti diskonttaamalla eri hintapolkua vastaavien option tuottamien rahavirtojen keskiarvo nykyhetkeen. Menetelmä on helppo toteuttaa, mutta se kärsii tehottomuudesta eli suuresta vaaditusta simulaatiotoistojen määrästä luotettavien hintaestimaattien saamiseksi. Monte Carlo -menetelmän tehokkuutta onkin pyritty parantamaan erilaisin keinoin.

Työssä keskitytään vertailemaan kolmea menetelmään esitettyä parannusta: vastamuuttujaa, säätömuuttujaa ja kvasi-Monte Carlo -menetelmää. Vertailu toteutetaan simuloimalla aasialaisen ja eurooppalaisen option hintoja ja tarkastelemalla luotettavan hintaestimaatin määrittämiseen tarvittavia toistomääriä eri parannuksilla. Lisäksi huomioidaan erot laskenta-ajoissa. Tulosten perusteella kaikki parannukset tuottavat tavallista Monte Carlo -menetelmää huomattavasti parempia hintaestimaatteja. Parannusten keskinäisessä vertailussa säätömuuttuja kasvatti menetelmän tehokkuutta eniten ja vastamuuttuja vähiten. Kvasi-Monte Carlo -menetelmä myös pienensi laskenta-aikaa hinnoittelun tehokkuudessa saavutetun edun lisäksi. Tulokset ovat odotettuja ja vastaavat aiempaa tutkimusta.

Monte Carlo -menetelmän hinnoittelukykyä testataan vertaamalla sillä tuotettuja hintoja S&P 500 -indeksioption markkinahintoihin. Tässä tapauksessa on myös käytössä Black-Scholes-mallin analyttinen ratkaisu, jota Monte Carlo -menetelmällä tuotetut hinnat vastasivat. Tuotetut hinnat poikkesivat kuitenkin markkinahinnoista. Poikkeavuus johtuu todennäköisesti käytetyistä parametreista ja oletuksista.

Avainsanat optioiden hinnoittelu, Monte Carlo -menetelmä, aasialainen optio, indeksioptio

Sisältö

1	Johdanto	1
2	Optiot	2
2.1	Optiotyyppejä	2
2.2	Optioiden hinnoittelu	4
3	Monte Carlo -menetelmä optioiden hinnoittelussa	6
3.1	Tavallinen Monte Carlo	7
3.2	Säätömuuttuja	8
3.3	Vastamuuttuja	9
3.4	Kvasi-Monte Carlo	9
4	Monte Carlo -menetelmien testaus	10
4.1	Aasianlaisen option hinnoittelu	11
4.2	S&P 500 -indeksioption hinnoittelu	16
5	Yhteenveto ja pohdinnat	19
A	Itôn lemma ja hintaprosessin tarkka diskretointi	23
B	Fauren jonon pisteiden tuottaminen	24
C	Herkkyystarkastelu	25

1 Johdanto

Optiot ovat markkinoilla vaihdettuja johdannaisia. Ne antavat oikeuden käydä ennalta määritelty kauppa sovittuna ajankohtana. Kaupan hinta sovitaan optiokauppaa tehdessä, ja se sidotaan jonkin kohde-etuuden, kuten osakkeen, hintaan. Tällöin optiosta saatavan voiton suuruus määräytyy kohde-etuuden hintakehityksen mukaan. Koska option ostajalla on oikeus eikä velvollisuus käydä kauppaa, jää tappio korkeintaan premion eli option hinnan suuruiseksi. Option myyjä taas on velvoitettu tekemään kauppa, ja periaatteessa myyjän tappio voikin kasvaa rajattomasti. Erilaisia optioita yhdistelemällä voidaan luoda strategioita, joita käytetään voitontavoitteluun tai riskeiltä suojautumiseen.

Optioiden hinnoittelu perustuu edelleen pitkälti 1970-luvulla kehitettyyn Black-Scholes-malliin, jossa option hinta ajan ja kohde-etuuden hinnan funktiona saadaan ratkaisemalla mallin osittaisdifferentiaaliyhtälö. Osittaisdifferentiaaliyhtälö voidaan kuitenkin ratkaista suljetussa muodossa vain muutamissa perustapauksissa, joten numeeriset menetelmät ovat tarpeen. Yksi näistä on Monte Carlo -menetelmä, jossa kohde-etuuden hinnan kehitystä simuloidaan moneen kertaan. Saaduista hintapoluista lasketaan option tuottamalle rahavirralle odotusarvo, joka diskontataan nykyhetkeen option hinnan määrittämiseksi. Menetelmä mukautuu erilaisiin optioihin ja on usein myös yksinkertainen toteuttaa. Sen heikkoutena on vaatimaton tehokkuus eli simulaatioistojen suuri vaadittu määrä luotettavan hinta-arvion muodostamiseksi. Tehokkuutta pyritäänkin usein kasvattamaan erilaisilla parannuksilla. Eri parannuksien vaikutus Monte Carlo -menetelmän tehokkuuteen riippuu option ominaisuuksista, ja sopivan parannuksen valinta tulee harkita tapauskohtaisesti.

Työssä vertaillaan erilaisten parannuksien tuomaa hyötyä sekä tehokkuuden että toteutettavuuden näkökulmasta. Parannuksia testataan soveltamalla Monte Carlo -menetelmää aasialaisen option hinnoitteluun, jonka tuotto riippuu kohde-etuuden hinnan keskiarvosta. Menetelmää sovelletaan myös S&P 500 -indeksioption hinnoitteluun. Tämä mahdollistaa Monte Carlo -menetelmän tuottamien hintojen vertailun S&P 500 -indeksioption laajalti saatavilla olevien markkinahintojen kanssa.

Työn rakenne on seuraavanlainen. Toisessa luvussa luodaan lyhyt katsaus optioihin, eri optiotyyppeihin ja optioiden hinnoittelun teoriaan. Kolmannessa luvussa käsitellään Monte Carlo -menetelmää optioiden hinnoittelussa ja esitellään työssä tarkasteltavat parannukset menetelmän tehokkuuteen. Neljännessä luvussa esitellään tehtävät simulaatiot ja niistä saadut tulokset. Viiden-

nessä luvussa tehdään tuloksista johtopäätöksiä ja pohditaan oliko tutkimus toteutettu hyvin.

2 Optiot

Optiot ovat johdannaisia, jotka antavat oikeuden tehdä kauppa jollakin kohde-etuudella ennalta määritellyyn hintaan tiettyinä ajanjaksona. Erilaisia kohde-etuuksia ja optioita on lukemattomia. Yleinen kohde-etuus on esimerkiksi jonkin yrityksen osake. *Osto-optio* antaa sen ostajalle oikeuden ostaa kohde-etuus tiettyinä ajanjaksona ennalta määritellyyn hintaan. *Myynti-optio* taas vastaavasti antaa oikeuden myydä kohde-etuus tiettyinä ajanjaksona ennalta määritellyyn hintaan. (Hull, 2011, s. 7.)

Option oikeuttaman kaupan toteuttamisen kannattavuus riippuu kohde-etuuden hintakehityksestä. Koska optio ei velvoita kaupan tekemiseen, on option tuottama rahavirta ostajalle aina ei-negatiivinen. Option myyjälle taas velvoite kaupan tekemiseen pätee, ja tappio voikin periaatteessa olla rajattoman suuri.

Optiosta maksettavaa hintaa kutsutaan *preemioksi*. Se riippuu muun muassa kohde-etuuden odotetusta hintakehityksestä ja määrätyistä toteutushinnasta. Lisäksi optiolla on aika-arvoa. Mitä pidempi aika option oikeuttaman kaupan mahdolliseen toteutukseen on, sitä suurempi mahdollisuus kohde-etuuden hinnalla on ehtiä kehittyä otolliseen suuntaan.

2.1 Optiotyyppejä

Tavallisimpia optioita ovat eurooppalaiset ja amerikkalaiset optiot. Näistä eurooppalainen optio voidaan toteuttaa vain erääntymispäivänään (Hull, 2011, s. 7). Toteutettaessa option tuottama rahavirta riippuu kohde-etuuden hinnasta S_t toteutuksen ajankohtana t ja option toteutushinnasta K . Eurooppalaisen myyntioption tuottama rahavirta f on siis

$$f = \max(0, K - S_T) ,$$

jossa T tarkoittaa erääntymispäivää. Vastaavasta eurooppalaisesta osto-optiosta saadaan rahavirta

$$f = \max(0, S_T - K) . \tag{1}$$

Amerikkalaisen option tapauksessa toteutus voidaan tehdä milloin tahansa voimassaoloaikana (Hull, 2011, s. 7). Amerikkalainen myyntioptio tuottaa siis toteutettaessa rahavirran

$$f = \max_{0 \leq t \leq T} (0, K - S_t) .$$

Vastaavasti amerikkalainen osto-optio tuottaa rahavirran

$$f = \max_{0 \leq t \leq T} (0, S_t - K) .$$

Amerikkalaista ja eurooppalaista optiota monimutkaisempia optioita kutsutaan eksoottisiksi optioiksi. Ne ovat usein erityisiin käyttötarkoituksiin räätälöityjä, eikä niille tästä syystä ole järjestyneitä markkinoita toisin kuin amerikkalaisille ja eurooppalaisille optioille. Tässä työssä keskitytään hinnoitteluun aasialaista optiota, joka on yksi eksoottisista optioista. Aasialaiset optiot perustuvat kohde-etuuden keskiarvoiseen hintaan voimassaoloaikana ja ovat täten riippuvaisia kohde-etuuden koko hintapolusta. Käyttäjälleen ne tarjoavat mahdollisuuden suojata pidemmälle aikavälille jakautuneiden rahavirtojen riskejä ja ovat lisäksi halvempia kuin vastaavat tavalliset optiot (Hull, 2011, s. 584-585).

Aasialaisesta optiosta on erilaisia variaatioita. Kohde-etuuden hinnan keskiarvoa voidaan käyttää joko toteutushintana ($K = S_{avg}$) tai kohde-etuuden erääntymishintana ($S_T = S_{avg}$). Ensin mainitussa tapauksessa optio voidaan toteuttaa joko rahalla tai todellisella kohde-etuuden kaupalla, mutta jälkimmäisessä tapauksessa toteutus onnistuu vain rahalla. Lisäksi keskiarvo voidaan laskea jatkuvasti tai diskreetisti käyttäen joko aritmeettista tai geometrista keskiarvoa.

Diskreettiä geometrista keskiarvoa kohde-etuuden erääntymishintana käytävän osto-option tuottama rahavirta f erääntymispäivänä T on

$$f = \max(0, S_{avg} - K) = \max \left(0, \left(\prod_{i=1}^m S \left(\frac{iT}{m} \right) \right)^{1/m} - K \right) , \quad (2)$$

missä K on toteutushinta ja m on keskiarvon laskemiseen käytettyjen kohde-etuuden hintojen määrä. Tämän option hinnalle löytyy analyyttinen ratkaisu olettamalla kohde-etuuden hinnan noudattavan geometristä Brownin liikettä (Turnbull and Wakeman, 1991).

Aritmeettista keskiarvoa kohde-etuuden erääntymishintana käyttävän option tuottama rahavirta f erääntymispäivänä T saadaan kaavalla

$$f = \max(0, S_{avg} - K) = \max\left(0, \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S\left(\frac{iT}{m}\right) - K\right), \quad (3)$$

missä m on keskiarvon laskemisessa käytettyjen kohde-etuuden hintojen määrä ja K on ennalta määrätty toteutushinta. Tällaisen option hintaa ei saada ratkaistua suljetussa muodossa (Boyle et al., 1997). Niiden hinnoitteluun käytetäänkin approksimaatioita ja simulaatioita.

2.2 Optioiden hinnoittelu

Optioiden hinnoittelussa tarvitaan arvio kohde-etuuden hinnan muutoksista tulevaisuudessa. Yleensä oletetaan kohde-etuuden hintaprosessin noudattavan geometrista Brownin liikettä. Siinä yksittäisen kohde-etuuden hinnan S muutos infinitesimaalisella aikavälillä dt on

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz, \quad (4)$$

missä μ on odotettu tuotto, σ on tuoton volatilitteetti ja z on Wienerin prosessi. Lisäksi tässä työssä oletetaan, että σ ja μ ovat vakioita. (Hull, 2011, s. 287.)

Kohde-etuuden hinnan noudattaman mallin lisäksi tarvitaan oletuksia markkinoista, jotta voidaan muodostaa riskitön portfolio kohde-etuudesta ja siihen liittyvästä optiosta. Lyhyeksi myynnin rajattomuus varmistaa kaikki mahdolliset kombinaatiot kohde-etuutta ja optiota portfolion sisällä. Markkinoiden kitkattomuudella taataan, että portfolion järjestelystä ei synny kuluja, jotka tulisi ottaa huomioon hinnoittelussa. Arbitraasittomuus vaatii riskittömän portfolion tuoton olevan riskitön tuotto, joka oletetaan vakioksi. Jatkuva kaupankäynti mahdollistaa portfolion päivittämisen riskittömäksi jatkuvasti. Tämän lisäksi oletetaan tässä vaiheessa, että kohde-etuus ei maksa osinkoa hinnoiteltavan option voimassaoloaikana. Näillä oletuksilla voidaan johtaa Black-Scholes-osittaisdifferentiaaliyhtälö eurooppalaistyyllisille optioille

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf, \quad (5)$$

missä $f(S, t)$ on option hinta, $S(t)$ on kohde-etuuden hinta, r on riskitön tuotto ja σ on kohde-etuuden volatilitteetti. (Hull, 2011, s. 307-310.)

Kaavan (5) osittaisdifferentiaaliyhtälön ratkaisuna saadaan option hinta muodossa $f(S, t)$. Asettamalla eurooppalaisen osto-option tuottama kaavan (1) mukainen rahavirta reunaehdoksi erääntymispäivälle T on option hinta nykyhetkellä $t = 0$ Black-Scholes-osittaisdifferentiaaliyhtälöstä ratkaistuna

$$P = f(S_0, 0) = S_0\Phi(d) - Ke^{-rT}\Phi(d - \sigma\sqrt{T}), \quad (6)$$

missä

$$d = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

S_0 on kohde-etuuden nykyhintaa, r on riskitön tuotto, T on erääntymispäivä, Φ on standardinormaalijakauman kertymäfunktio ja σ on kohde-etuuden volatiliteetti (Hull, 2011, s. 313).

Kaavan (2) mukaista geometriseen keskiarvoon perustuvaa rahavirtaa tuottavan aasialaisen option hinnalle löytyy myös analyyttinen ratkaisu. Vorst (1992) esittää ratkaisun muodossa

$$P = e^{-rT} \left[e^{M + \frac{V}{2}} \Phi\left(\frac{M - \ln K + V}{\sqrt{V}}\right) - K \Phi\left(\frac{M - \ln K}{\sqrt{V}}\right) \right], \quad (7)$$

mihin sijoitetaan

$$M = \ln(S_0) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{T+h}{2},$$

$$V = \sigma^2 \left(h + (T-h)\frac{2m-1}{6m} \right),$$

missä m on keskiarvon laskemiseen käytettyjen ajankohtien lukumäärä ja h on aika-askelen pituus eli $\frac{T}{m}$.

Kaavan (5) Black-Scholes-differentiaaliyhtälö ei riipu kohde-etuuden odotetusta tuotosta μ . Odotetun tuoton μ käyttäminen olisikin ongelmallista, koska se riippuu kohde-etuuden riskistä ja toisaalta myös sijoittajan riskiasenteesta. Voidaan siis käyttää mitä tahansa riskiasennetta. Näistä yksinkertaisin on oletus riskineutraaleista sijoittajista. Tätä kutsutaan riskineutraaliksi hinnoitteluksi, missä kaikki sijoituskohteet ovat riskittömiä ja niiden tuoton oletetaan olevan riskitön korko r (Hull, 2011, s. 311-312). Tällöin option arvo eli hinta nykyhetkellä P saadaan diskonttaamalla

$$P = e^{-rT} \mathbb{E}[f(S, T)], \quad (8)$$

missä $f(S, T)$ on option tuottama ja kohde-etuuden satunnaisesta hintapolusta S riippuva rahavirta erääntymispäivänä T (Luenberger, 2009, s. 363).

3 Monte Carlo -menetelmä optioiden hinnoittelussa

Black-Scholes-osittaisdifferentiaaliyhtälön ratkaiseminen onnistuu helposti vain yksinkertaisissa perustapauksissa, joissa option tuottaman rahavirran $f(S, T)$ jakauma on tiedossa. Monimutkaisempien optioiden tapauksissa analyttiset ratkaisut ovat usein kuitenkin huomattavasti mutkikkaampia kuin eurooppalaisen option ratkaisu ja monissa tapauksissa ratkaisua ei edes löydetä (Hull, 2011, s. 593). Tästä syystä option hinta määritetäänkin usein jollakin numeerisella menetelmällä.

Yksi vaihtoehto on käyttää Monte Carlo -menetelmää. Se perustuu riskineutraaliin hinnoitteluun ja on usein yksinkertainen toteuttaa. Option hinnan estimoimiseksi simuloidaan kohde-etuuden hintapolkua S riskineutraalissa maailmassa. Simuloiduista hintapoluista lasketaan option tuottamien rahavirtojen keskiarvo, joka estimoi option tuottaman rahavirran odotusarvoa $\mathbb{E}[f(S, T)]$. Saatu estimaatti diskontataan riskittömällä korolla kaavan (8) mukaisesti nykyhetkeen ja saadaan option hinta. (Hull, 2011, s. 446-447.)

Kaavan (4) jatkuvan prosessin käyttö hintapolun simuloinnissa ei onnistu Monte Carlo -menetelmän tapauksessa. Menetelmää varten prosessi on diskretoitava. Pienellä diskreetointivälillä Δt kohde-etuuden hinnan muutokselle ΔS pätee

$$\Delta S = rS\Delta t + \sigma S\epsilon\sqrt{\Delta t} , \quad (9)$$

missä ϵ on standardinormaalijakaumaa $N(0, 1)$ noudattava satunnaismuuttuja (Hull, 2011, s. 287). Odotetuksi tuotoksi μ on asetettu riskitön tuotto r riskineutraalin hinnoittelun mukaisesti.

Kaavan (9) hintamuutos on kuitenkin tarkka vain pienillä Δt :n arvoilla. Eri-tyisesti ΔS riippuu S :n arvosta kyseisellä ajanhetkellä. Se on ongelmallista, koska simuloitavasta hintapolusta tarvitaan useimmiten hintoja vain yksittäisillä ajanhetkellä. Esimerkiksi eurooppalaisen option tapauksessa rahavirran estimaatin laskemiseen riittää kohde-etuuden hinta erääntymispäivänä T , jolloin optimaalisessa tapauksessa sijoitettaisiin diskreetointivälin paikalle suoraan option erääntymispäivä eli $\Delta t = T$. Tällöin pienen diskreetointivälin Δt käyttäminen tarkkuuden säilyttämiseksi kasvattaa simulointiaikaa tarpeettomasti muun muassa siksi, että jokaisella askeleella tarvitaan luku normaalijakaumasta satunnaismuuttujaa ϵ varten.

Muutoksen riippuvuus kohde-etuuden hinnasta kyseisellä ajanhetkellä saadaan kuitenkin poistettua soveltamalla Itô'n lemmaa prosessiin $F(S) = \ln S$.

Tällöin saadaan kohde-etuuden hinnaksi seuraavalla askeleella

$$S(t + \Delta t) = S(t) \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t} \right], \quad (10)$$

joka on tarkka kaikilla diskreetointiväleillä Δt . Itön lemma ja kaavan (10) johtaminen sen avulla on esitetty liitteessä A.

3.1 Tavallinen Monte Carlo

Sovellettaessa tavallista Monte Carlo -menetelmää (eli Crude Monte Carloa) optioiden hinnoitteluun kohde-etuuden hintapolkua S simuloidaan riskineutraalissa maailmassa kaavan (10) avulla siten, että jokaisella simulaatiotoistolla lasketaan option tuottama rahavirta $f := f(S, T)$. Saadut f :n arvot ovat nyt samalla tapaa jakautuneita riippumattomia satunnaismuuttujia, joihin voidaan soveltaa keskeistä raja-arvolauseetta.

Määritelmä 1 (Keskeinen raja-arvolause). *Olkoot X_i , $i = 1, \dots, n$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia siten, että*

$$\mathbb{E}(X_i) = \mu \text{ ja } \text{Var}(X_i) = \sigma^2 \quad \forall i.$$

Keskeisen raja-arvolauseen perusteella näiden satunnaismuuttujien aritmeettinen keskiarvo

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

noudattaa asympotoottisesti normaali-jakaumaa parametreilla μ ja σ^2/n (Mellin, 2010, s. 93-94).

Keskeisen raja-arvolauseen perusteella eri simulaatiotoistoja vastaavien rahavirtojen f aritmeettinen keskiarvo estimoi option tuottaman rahavirran odotusarvoa $\mathbb{E}[f(S, T)]$ suurilla toistomäärillä n . Monte Carlo -menetelmän suurilla toistomäärillä ($n > 1000$) on perusteltua olettaa keskiarvo normaali-jakautuneeksi (Boyle, 1977). Option nykyarvon estimaatti saadaan diskonttaamalla kaavan (8) mukaisesti tämä keskiarvo riskittömällä korolla nykyhetkeen (Hull, 2011, s. 447).

Option tuottaman rahavirran estimaatin keskihajontaa voidaan käyttää tarkkuuden mittarina. Keskeisen raja-arvolauseen mukaisesti rahavirran estimaatin varianssi on kääntäen verrannollinen toistomäärään, joten keskihajonta on kääntäen verrannollinen toistomäärän n neliöjuureen. Myös kaavan (8)

mukaan diskontatun option hinnan P virhe riippuu tällöin termistä $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Tämä on Monte Carlo -menetelmän ongelma ja johtaa huonoon tehokkuuteen. Jos esimerkiksi halutaan pienentää hajontaa kymmenesosaan toistomäärää kasvattamalla, täytyy toistomäärä kertoa sadalla. Pelkän toistomäärän kasvattamisen sijaan onkin mielekäästä tutkia muita keinoja menetelmän tarkkuuden parantamiseksi.

3.2 Säättömuuttuja

Boyle (1977) esittää säättömuuttujan mahdollisena parannuksena menetelmän vaatimattomaan tehokkuuteen. Parannus perustuu säättömuuttujana käytettävän option hinnan laskemiseen jokaisella simuloidulla hintapolulla. Käytettävän säättömuuttujan on korreloitava ratkaistavan option hinnan kanssa ja sen hinnalle on lisäksi tiedettävä analyttinen ratkaisu. Boyle et al. (1997) kehittävät edelleen parannusta ja esittävät estimaattorin \hat{P}^{cv} option hinnalle säättömuuttujan kanssa

$$\hat{P}^{cv} = \hat{P}_A + \beta(P_B - \hat{P}_B) , \quad (11)$$

missä \hat{P}_A on ratkaistavan option hinnan estimaattori laskettuna tavallisella Monte Carlo -menetelmällä, P_B on säättömuuttujan analyttinen ratkaisu, \hat{P}_B on säättömuuttujan estimaattori tavallisella Monte Carlo -menetelmällä ja β on skaalausparametri.

Parametrin β optimaalinen arvo voidaan määrittää siten, että estimaattorin \hat{P}^{cv} varianssi minimoituu. Estimaattorin \hat{P}^{cv} varianssi on

$$Var[\hat{P}^{cv}] = Var[\hat{P}_A] + \beta^2 Var[\hat{P}_B] - 2\beta Cov[\hat{P}_A, \hat{P}_B] ,$$

joka on toisen asteen yhtälö β :n suhteen. Koska toisen asteen termin kerroin on varianssina aina positiivinen, on kyseessä ylöspäin aukeava paraabeli. Derivoimalla siis β :n suhteen ja asettamalla derivaatta nolaksi voidaan ratkaista varianssin $Var[\hat{P}^{cv}]$ minimoiva β :n arvo β^* :

$$\left. \frac{dVar[\hat{P}^{cv}]}{d\beta} \right|_{\beta=\beta^*} = 0 \Rightarrow \beta^* = \frac{Cov[\hat{P}_A, \hat{P}_B]}{Var[\hat{P}_B]} .$$

Option hintojen estimaattorien välinen kovarianssi ei kuitenkaan yleensä ole tiedossa. Tästä syystä se on joko estimoitava simuloimalla tai vain valittava jokin arvo β :lle. Usein tämä arvo on yksi (Boyle et al., 1997).

Aasialaisen, aritmeettiseen keskiarvoon perustuvan option tapauksessa säätömuuttujana voidaan käyttää geometriseen keskiarvoon perustuvaa optiota. Geometrisen aasialaisen option analyyttinen ratkaisu löytyy kaavasta (7). Toinen vaihtoehto on käyttää säätömuuttujana samaan kohde-etuuteen liittyvää eurooppalaista optiota. Glasserman (2004) esittää tapauksen aritmeettiseen keskiarvoon perustuvan option korrelaatiosta eurooppalaisen ja geometriseen keskiarvoon perustuvan option kanssa, ja geometriseen keskiarvoon perustuvan option korrelaatio osoittautuu huomattavasti voimakkaammaksi.

3.3 Vastamuuttuja

Toinen mahdollinen parannus tavalliseen Monte Carlo -menetelmään on käyttää vastamuuttujaa. Vastamuuttujan käyttö perustuu siihen, että kohde-etuuden hintapolun simuloinnissa kullakin aika-askeleella käytetyn normaali-jakautuneen satunnaisluvun ϵ vastaluku $-\epsilon$ on myös normaalijakautunut (ks. kaava (10)). Tällöin yhden hintapolun generoinnissa käytetyn satunnaislukujonon perusteella voidaan muodostaa myös toinen hintapolku, jossa ensimmäiseen hintapolkuun liittyvät satunnaisluvut on korvattu vastaluvuillaan. Näistä kahdesta polusta saadaan laskettua option hinnat P^+ ja P^- , joista otetaan keskiarvo. Simuloimalla n kertaa saadaan laskettua estimaattori option hinnalle

$$\hat{P}^{av} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{P_i^+ + P_i^-}{2} . \quad (12)$$

Vastamuuttujan käytön puolesta argumentoidaan sillä, että jos P^+ on oikean arvon yläpuolella, niin P^- on yleensä sen alapuolella (Hull, 2011, s. 453). Menetelmässä saadaan myös yhden satunnaislukujonon generoinnin työllä kaksi hintapolkua, jolloin keskihajonta pienenee kertoimella $\frac{1}{\sqrt{2}}$ pienemmällä laskentatyöllä kuin toistomäärän kaksinkertaistamisella.

3.4 Kvasi-Monte Carlo

Joy et al. (1996) esittelevät kvasi-Monte Carlo -menetelmän optioiden hinnoitteluun. Menetelmä poikkeaa tavallisesta Monte Carlo -menetelmästä siten, että kaavassa (10) käytetään satunnaislukujen ϵ :n paikalla täysin deterministisesti tuotettuja lukuja. Näiden lukujen tarkoitus on edustaa ϵ :n jakaumaa mahdollisimman tasaisesti ja siten parantaa menetelmän suppenemisnopeutta.

Lukujen ϵ tuottamisessa käytetään hyväksi satunnaismuuttujan kertymäfunktion F käänteiskuvaukseen liittyvää tulosta: mille tahansa jatkuvan satunnaismuuttujan X kertymäfunktiolle F pätee $X = F^{-1}(U)$, jos U noudattaa tasajakautusta välillä $[0, 1]$ (Devroye, 1986, s. 28). Tuloksesta seuraa, että tasainen otos normaalijakautuneen satunnaismuuttujan ϵ arvoista saadaan generoimalla tasajakautuneen satunnaismuuttujan $U \sim \text{Uniform}(0, 1)$ arvoja mahdollisimman tasaisesti ja laskemalla kullakin u normaalijakauman kertymäfunktion käänteiskuvauksen arvo $\epsilon = \Phi^{-1}(x)$.

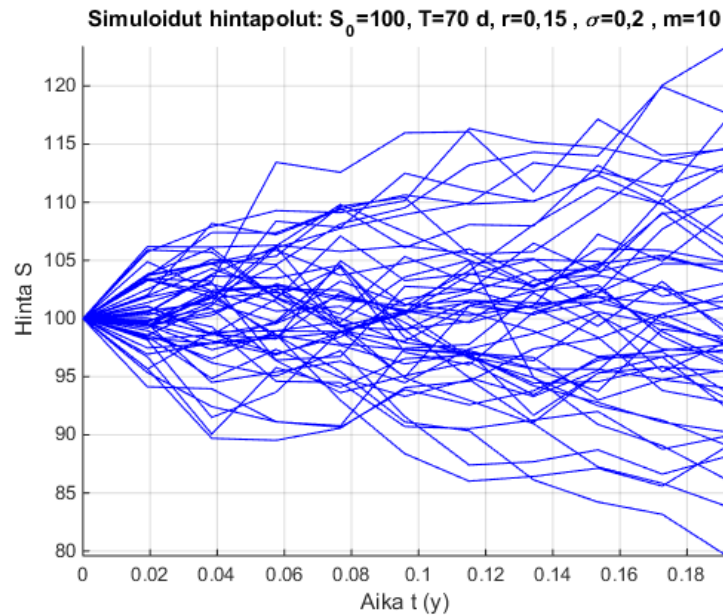
Aasialaisen option tapauksessa tarvitaan kohde-etuuden hinta $m > 1$ ajanhetkenä option voimassaoloaikana hinnan keskiarvon laskemiseksi. Tällöin $\epsilon \in \mathbb{R}^m$ on m -ulotteista normaalijakaumaa noudattava vektori, jonka alkio ϵ_i noudattavat standardinormaalijakaumaa ja ovat toisistaan riippumattomia. Vektoriarvoisten muuttujien generointi tapahtuu kuten yksiulotteisessa tapauksessa, mutta nyt X :n arvoilla pyritään täyttämään välin $[0, 1]$ asemasta hyperkuutio $[0, 1]^m$ tasaisesti.

Tasajakautuneiden satunnaismuuttujien tasaiseen generointiin käytetään vähäisen poikkeavuuden jonoja. Yksi tällainen jono on Fauren jono. Sen pisteet luodaan esittämällä pisteen järjestysnumero alkuluvun b kannassa. Kantaluvuksi b valitaan alkuluku, joka on suurempi tai yhtä suuri kuin täytettävän avaruuden dimensio m . Tämän jälkeen alkulukuesityksen avulla luodaan ensimmäinen koordinaatti, ja muut pisteen koordinaatit saadaan kertomalla alkulukuesityksen kertoimia sopivalla matriisilla. Fauren jonon pisteiden luominen on esitetty tarkasti liitteessä B.

Toinen vastaava jono on Sobolin jono. Se on samankaltainen Fauren jonon kanssa, mutta käyttää kantalukua $b = 2$ kaikilla dimensioilla m . Kantaluvun 2 käyttö mahdollistaa nopeampien bittiopeeraatioiden käytön jonon pisteiden laskennassa (Glasserman, 2004, s.303). Laskenta-ajassa saatavan edun lisäksi Sobolin jonon käyttö kvasi-Monte Carlo -menetelmässä johtaa Fauren jonoa pienempään virheeseen option hinnassa (Boyle et al., 1997).

4 Monte Carlo -menetelmien testaus

Luvussa 3 esiteltyä Monte Carlo -menetelmää ja sen parannuksia testattiin ajamalla simulaatioita. Parannuksia testattiin pääpainoisesti polkuriippuvaisen aasialaisen aritmeettiseen keskiarvoon perustuvan option hinnoittelussa. Menetelmän tuottamien hintojen vastaavuutta markkinahintoihin testattiin hinnoittelemalla indeksioptio, joka käyttää eurooppalaista toteutus-



Kuva 1: Geometristä Brownin liikettä noudattavan kohde-etuuden hintapolkuja S ajan t funktiona. Aika-askelia on otettu kullakin polulla 10.

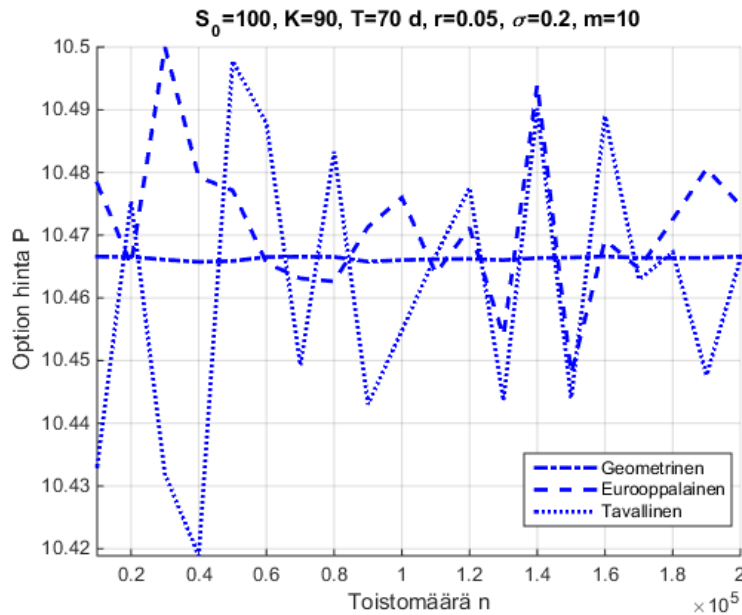
ta ja jatkuvaa osingon maksua. Hinnoittelu toteutettiin käyttäen Matlab-ohjelmistoa.

Molempien optioiden tapauksessa hintapolun simuloimiseksi sovellettiin kaavaa (10). Kuvassa 1 on esimerkkinä viisikymmentä simuloitua hintapolkua. Niiden tuottamiseksi käytettiin kymmentä yhtä suurta aika-askelta, joka vastaa aasialaisen option hinnoittelussa käytettyä määrää. Indeksioption hinnoittelussa aika-askelia oli vain yksi, koska sen tapauksessa tarvittiin vain kohde-etuuden hinta erääntymispäivänä T .

4.1 Aasialaisen option hinnoittelu

Monte Carlo -menetelmän parannusten vertailemiseksi niitä sovellettiin aasialaisen osto-option hinnoittelun tapauksessa, jossa option tuottama rahavirta määräytyi kohde-etuuden hinnan aritmeettisesta keskiarvosta kaavan (3) mukaisesti.

Säätömuuttujana käytettiin geometrista keskiarvoa hyödyntävää vastaavaa optiota sekä vain kohde-etuuden erääntymishinnasta S_T riippuvaa eurooppalaista optiota. Geometriseen keskiarvoon perustuvan option tuottama

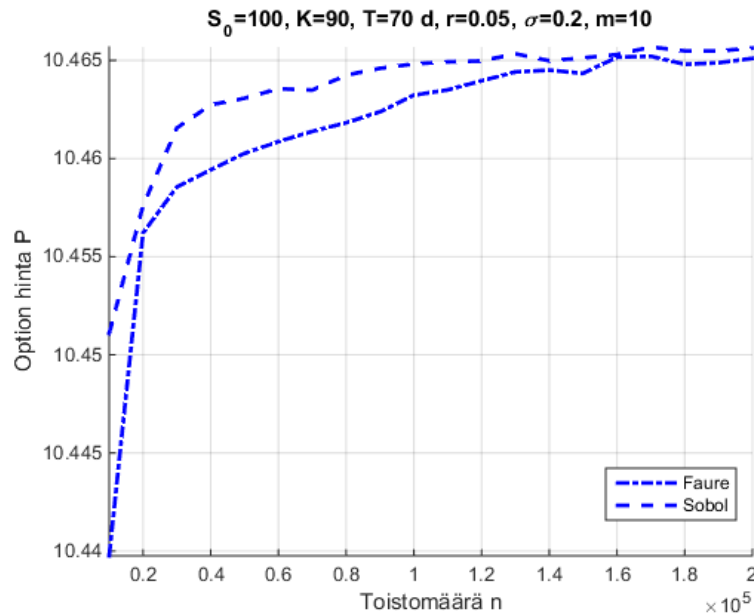


Kuva 2: Aasialaisen aritmeettiseen keskiarvoon perustuvan option hinta P simuloituna käyttäen säätömuuttujana geometriseen keskiarvoon perustuvaa aasialaista optiota sekä eurooppalaista optiota.

rahavirta laskettiin kaavan (2) mukaan ja sen analyttinen ratkaisu on esitetty kaavassa (7). Aritmeettisen ja geometrisen keskiarvon laskemiseen kohdeetuuden hinnalle käytettiin samoja ajanhetkiä. Eurooppalaisen osto-option toimiessa säätömuuttujana laskettiin sen tuottama rahavirta kaavan (1) mukaan ja sen analyttinen ratkaisu kaavasta (6). Option hinnan estimaatti laskettiin molempien säätömuuttujien tapauksessa kaavan (11) mukaan, jossa parametriksi β sijoitettiin 1.

Näitä kahta säätömuuttujaa vertailtiin simuloimalla, ja saatu tulos on kuvassa 2. Eurooppalaista optiota käyttävän estimaatin varianssi on näistä selkeästi suurempi ja kuvan perusteella vain hieman tavallista Monte Carlo -estimaattia pienempi. Tämän perusteella korrelaatio eurooppalaisen option hinnan ja aritmeettiseen keskiarvoon perustuvan aasialaisen option hinnan välillä ei siis ole kovin suuri. Toisaalta taas geometriseen keskiarvoon perustuvalla optiolla korrelaatio on suuri, koska sen avulla tuotettu estimaatti stabiloituu lähes välittömästi tasolle $P \approx 10,465$. Sen käyttäminen säätömuuttujana menetelmien välisessä vertailussa on siis perusteltua.

Kvasi-Monte Carlo -menetelmää sovellettiin Sobolin ja Fauren jonojen avulla. Sobolin jonon tapauksessa käytettiin Matlabin funktiota *sobolset* luo-

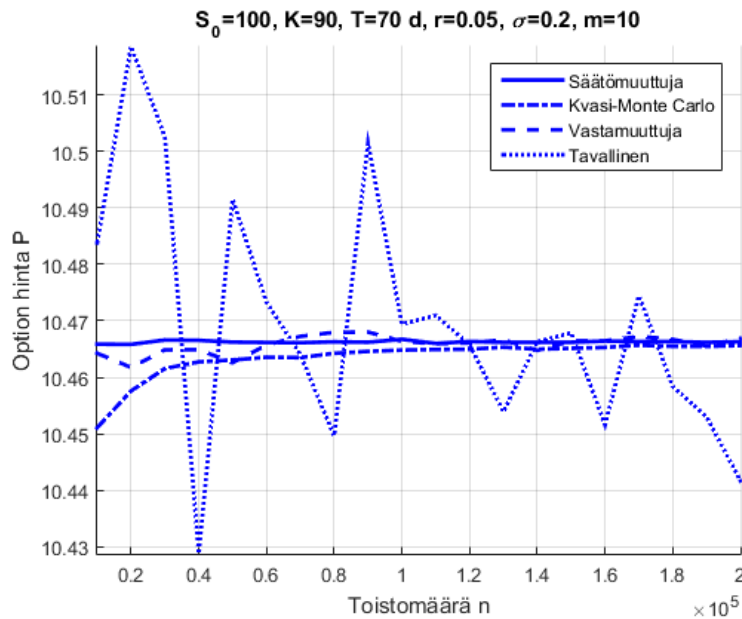


Kuva 3: Aasialaisen aritmeettiseen keskiarvoon perustuvan option hinta P simuloituna kvasi-Monte Carlo -menetelmällä käyttäen Sobolin ja Fauren jonoja.

maan haluttu joukko, josta saatiin tarvittava jono ulos funktiolla *net*. Fauren jonon tapauksessa pisteet laskettiin liitteessä B kuvatulla tavalla. Muodostetut pistejonot syötettiin normaalijakauman kertymäfunktion käänteisfunktion, ja saadut arvot sijoitettiin muissa simulaatioissa käytetyn $\epsilon:n$ paikalle.

Eri jonojen toimivuutta kvasi-Monte Carlo -menetelmässä testattiin simuloimalla estimaatteja aritmeettisen aasialaisen option hinnalle. Saadut hinnat P toistomäärän n funktiona ovat kuvassa 3. Kuvasta huomataan, että jonojen avulla tuotetut estimaatit käyttäytyvät samankaltaisesti. Sobolin jono näyttää lähestyvän tasoa $P \approx 10,465$ hieman nopeammin, joten tämän simulaation perusteella se toimii paremmin. Lisäksi Matlab-ohjelmiston valmiit funktiot Sobolin jonon luontiin olivat suoritusajaltaan huomattavasti nopeampia kuin käytetty koodi Fauren jonon luomiseen. Myös Boyle et al. (1997) päätyivät samaan tulokseen tarkasteluissaan. Näillä perusteilla päätettiin käyttää menetelmien väliseen vertailuun Sobolin jonoon perustuvaa kvasi-Monte Carlo -menetelmää.

Vastamuuttujan tapauksessa laskettiin hintapolku kahteen kertaan jokaisella simulaatiotoistolla. Toisella kerralla hintapolun laskemiseen tarvittu vektori riippumattomia standardinormaalijakaumaa noudattavia satunnais-



Kuva 4: Aasianlaisen aritmeettiseen keskiarvoon perustuvan option hinta P simuloituna eri toistomäärillä n ja eri parannuksia käyttäen.

muuttujia muutettiin vastaluvuikseen.

Kuvassa 4 on nähtävissä saatuja option hintoja P eri toistomäärillä n . Kuvan tuottamisessa on käytetty tavallista Monte Carlo -menetelmää ja sen parannuksista säätö- ja vastamuuttujia sekä kvasi-Monte Carloa. Toistomäärää kasvatettiin kymmentuhannen välein aina kahteensataantuhanteen asti. Käytetyt parametrit näkyvät kuvan 4 yläosassa. Keskiarvo laskettiin kymmenen kohde-etuuden hinnan perusteella. Ensimmäinen keskiarvoon vaikuttava hinta oli viikon jälkeen ja viimeinen oli hinta erääntymispäivänä T . Kuvasta 4 voidaan nähdä, että kaikki käytetyt parannukset vähensivät hinnan estimaatin varianssia huomattavasti verrattuna tavalliseen Monte Carlo -menetelmään, joka näkyy kuvassa pisteviivana.

Säättömuuttujan antama estimaatti hinnalle pysyy lähes samalla tasolla kaikilla toistomäärillä ja kasvattaakin kuvan 4 perusteella menetelmän tehokkuutta eniten. On kuitenkin huomattava, että tässä tapauksessa geometrisen keskiarvoon perustuva säätömuuttuja on harvinaisen hyvä ja sen tuottaman rahavirran f korrelaatio aritmeettisen keskiarvon tuottaman rahavirran kanssa on hyvin lähellä yhtä (Glasserman, 2004, s. 190). Myös kahden muun parannuksen tuottamat estimaatit ovat kahden desimaalin tarkkuudessa, kun taas tavallisen Monte Carlo -menetelmän estimaatin tapauksessa

tarkkuus on lähempänä yhtä desimaalia.

Monte Carlo -menetelmä eri parannuksilla laskee eri asioita, joten myös simulaatioon kuluva aika muuttuu. Taulukossa 1 on esitetty yhteen simulaatiotoistoon kuluva keskimääräinen aika kunkin parannuksen tapauksessa. Simulaatiotoisto tässä tapauksessa tarkoittaa kohde-etuuden hintapolun simuloimista ja sen perusteella tarvittujen option tuottamien rahavirtojen f laskemista. Lisäksi ajassa on otettu huomioon kvasi-Monte Carlo -menetelmän tapauksessa pisteistön laskemiseen kulunut aika ja säätömuuttujan tapauksessa analyttisen ratkaisun laskemiseen kulunut aika.

Taulukon 1 perusteella säätömuuttujan käyttö kasvatti simulaatiotoiston aikaa noin kymmenesosan ja vastamuuttujan käyttö noin kolmasosan. Molemmilla parannuksilla lasketaan kullakin simulaatiotoistolla ylimääräinen option tuottama rahavirta. Vastamuuttujan tapauksessa lasketaan lisäksi hintapolku kaksi kertaa. Nämä lisäykset kasvattavat aikaa, ja voidaankin kysyä, onko saavutettu hyöty suurempi kuin mitä laskenta-ajan kasvun kautta menetetään. Tässä tapauksessa kuitenkin on selvää, että hyöty on huomattavasti suurempi. Kuvan 4 mukaan tavallisen Monte Carlo -menetelmän hajonta on selvästi vähintään kertaluokkaa suurempi kaikilla toistomäärillä. Vaikka jonkin parannuksen toistomäärä olisi vain puolet tavallisen Monte Carlo -menetelmän toistomäärästä, saataisiin silti parannuksen käytöllä tarkempia tuloksia. Tällöin myös parannuksen käyttämä laskenta-aika simulaatiotoistoa kohden voisi olla kaksinkertainen.

Samasta taulukosta huomataan, että kvasi-Monte Carlon tapauksessa simulaatiotoistoon kuluva aika pienenee lähes yhdellä kertaluokalla. Tämä johtuu deterministisesti lasketusta pisteistöstä, joka tuotettiin ennakkoon nopeilla Matlabin funktioilla. Näin päästään eroon normaalijakautuneiden satunnaislukujen tuottamisesta hintapolun simuloinnissa ja pienennetään laskentaan kuluva aikaa. Tämän lisäksi saavutettiin huomattava hyöty myös saadun hinnan tarkkuudessa.

Taulukko 1: Monte Carlo -menetelmän eri parannuksien keskiarvoisesti kuluttama aika yhden simulaatiotoiston suorittamiseen.

Menetelmä	Simulaatiotoiston aika (10^{-4} s)
Tavallinen	1,07
Säätömuuttuja	1,19
Vastamuuttuja	1,38
Kvasi-Monte Carlo	0,17

Menetelmiä on tähän mennessä vertailtu vain yksillä parametrien arvoilla. Herkkyyden tarkastelemiseksi pidettiin kuvan 4 parametreja perustasona ja parametrien arvoja muutettiin yksitellen pienemmäksi ja suuremmaksi. Saadut tulokset löytyvät liitteestä C.

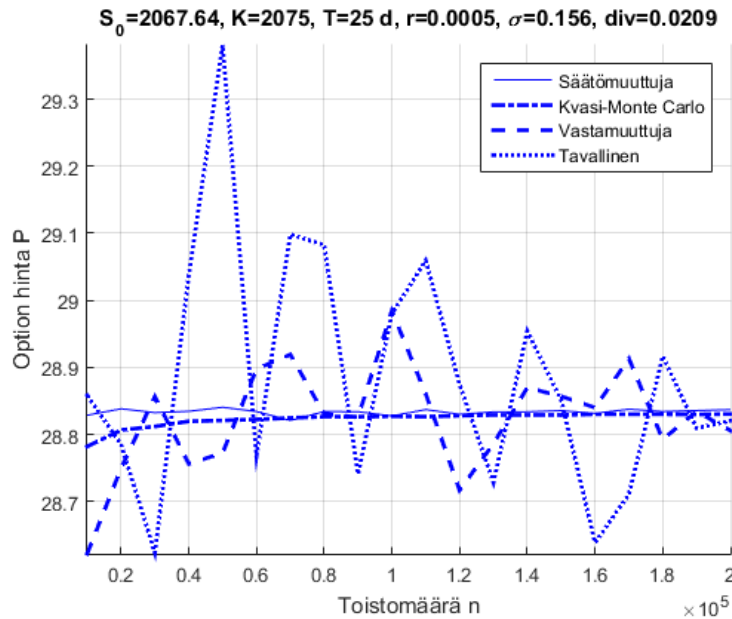
Toteutushinnan K ja kohde-etuuden lähtöhinnan S_0 suhteen K/S_0 pienentäminen suurensi menetelmän parannuksien vaikutusta ja kasvattaminen vastaavasti heikensi sitä. Suhteen kasvaessa todennäköisyys kyseessä olevan ostooption toteuttamiseen pienenee, koska pienempi osa simuloituista hintapoluista tuottaa toteutukseen vaaditun suuruisen keskiarvon kohde-etuuden hinnalle. Tällöin parannusten vaikutus pienenee, koska suurin osa simuloituista rahavirroista on joka tapauksessa nolla. Silloin pienempi määrä toisistaan poikkeavia hintoja määrää estimaattina käytetyn keskiarvon, joka johtaa estimaatin heikentyneeseen tarkkuuteen.

Eräntymispäivän T tai riskittömän tuoton r muuttaminen ei juurikaan vaikuttanut menetelmään ja sen parannuksiin. Kohde-etuuden volatilitietin σ pienentäminen johti nopeampaan stabiloitumiseen eri parannuksilla ja kasvattaminen taas hieman heikensi sitä varsinkin vastamuuttujan tapauksessa. Volatilitietin suurentaminen kasvattaa kohde-etuuden hinnanmuutoksen varianssia, joka heikentää option tuottaman rahavirran estimaatin tarkkuutta. Keskiarvon laskemiseen käytettyjen laskentapisteiden määrän m (eli tehtävän dimension) kasvattaminen vaikutti kvasi-Monte Carlo -menetelmän suppenemiseen, kun taas muut parannukset pysyivät ennallaan. Boyle et al. (1997) saivat vastaavan tuloksen suhteellisen virheen tarkastelussaan.

Liitteen C herkkyydeltarkasteluissa huomioitiin myös parametrimuutosten vaikutus keskimääräiseen laskenta-aikaan. Ainoa selkeä ero syntyi laskentapisteiden määrän m muutoksilla. Niiden lisääminen kasvatti varsinkin vastamuuttujan keskimääräistä aikaa, kun taas vähentäminen pienensi sitä.

4.2 S&P 500 -indeksioption hinnoittelu

Monte Carlo -menetelmän tuottamien hintojen vertailemiseksi markkinahintoihin hinnoiteltiin S&P 500 -indeksiin liityvä eurooppalainen optio. Hinnoittelussa oletettiin indeksin arvon noudattavan geometrinen Brownin liikettä. Lisäksi otettiin huomioon indeksiin kuuluvien osakkeiden maksamat osingot olettamalla jatkuva osingon maksu kurssilla δ . Tällöin osingot tulevat huomioiduksi sijoittamalla kaavan (4) geometrisen Brownin liikkeen odotetuksi tuotoksi μ riskineutraalissa hinnoittelussa $\mu = r - \delta$ (Glasserman, 2004, s. 32).



Kuva 5: S&P 500 -indeksioption hinta P simuloituna eri toistomäärillä n ja eri parannuksia käyttäen.

Indeksioption hinta saadaan ratkaistua myös analyttisesti. Tällöin kaavassa (6) esitetty eurooppalaisen osto-option ratkaisu muokataan ottamaan huomioon jatkuva osingon maksu. Osto-option hinta P saadaan nyt kaavasta

$$P = e^{-\delta T} S_0 \Phi(d) - K e^{-rT} \Phi(d - \sigma\sqrt{T}),$$

missä

$$d = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \delta + \frac{1}{2}\sigma^2\right) T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

S&P 500 -indeksin arvo oli 27.7.2015 pörssin sulkeutuessa 2067,64, ja osinkotuotto oli kesäkuun 2015 lopussa laskettuna 2,09% (S&P Dow Jones Indices, 2015). Hinoittelussa tarvitaan myös kohde-etuuden volatilitteetti. S&P 500 -indeksin volatilitteettiä mittaa VIX-indeksi, jonka arvo oli 27.7.2015 15,60 (Chicago Board Options Exchange, 2015a). Kyseessä on optioiden hinnoista laskettu implisiittinen volatilitteetti. Riskittömänä tuottona käytettiin Yhdysvaltojen joukkovelkakirjojen kolmen kuukauden tuottoa, joka oli 27.7.2015 0,05% (U.S. Department of the Treasury, 2015).

Kuvassa 5 on indeksioption hinta simuloituna eri parannuksia käyttäen. Säättömuuttujana käytettiin vastaavaa eurooppalaista optiota ilman jatkuvaa

osingon maksua. Kuvasta huomataan, että käytetyillä toistomäärillä säätömuuttujan ja kvasi-Monte Carlon tuottamat estimaatit stabiloituvat nopeasti hinnan arvioimiseksi. Sen sijaan tavallisen Monte Carlon ja vastamuuttujan tuottamista estimaateista ei voida käytetyillä toistomäärillä sanoa hintaa luotettavasti yhden desimaalin tarkkuudella.

Taulukossa 2 on indeksioption markkinahintoja sekä simuloituja hintoja. Markkinahinnoista haettiin viimeisimmän toteutuneen kaupan hinta sekä tarjotut ja kysytyt hinnat (Chicago Board Options Exchange, 2015b). Huomataan, että käytetyn hinnoittelumallin analyttiset hinnat ovat kaikilla toteutushinnoilla viimeisimmän hinnan yläpuolella. Lisäksi analyttinen hinta laskee kysyttyä ja tarjottua hintaa hitaammin toteutushinnan K kasvaessa lähtien selvästi alemmalta tasolta ja päätyen selvästi ylemmälle tasolle. Käytetyt Monte Carlo -menetelmät käyttäytyivät kuten kuvassa 5. Säätömuuttujan ja kvasi-Monte Carlon tuottamat hinnat olivat hyvin lähellä analyttistä hintaa, kun taas tavallisen Monte Carlon ja vastamuuttujan tuottamat hinnat poikkesivat analyttisestä hinnasta enemmän.

Mallin tuottamien hintojen poikkeaminen markkinoiden hinnoista ei ole yllättävää. Käytettyyn menetelmään syötetään monia parametreja, joiden arvot eivät ole aivan yksiselitteisiä. Esimerkiksi jäljellä oleva aika option erääntymiseen laskettiin käyttäen kalenteripäiviä. Todellisuudessa viikonloppuisin hinnat eivät muutu ja voikin olla, että parempia arvioita saataisiin laskemalla esimerkiksi pelkkiä arkipäiviä. Lisäksi käytetty volatilitteetti VIX-indeksistä on keskiarvoinen implisiittinen volatilitteetti markkinoilla vallitsevista optioiden hinnoista (Chicago Board Options Exchange, 2015a). Todellisuudessa volatilitteetti on riippuu sekä toteutushinnasta K ja option jäljellä olevasta voimassaoloajasta (Hull, 2011, s. 409). Implisiittiset volatilitteetit muodostavatkin hymyn muotoisen käyrän eri toteutushinnoilla K laskettuna ja tässä käytetty keskiarvoinen volatilitteetti ei approksimoisi hymyä kovin hyvin.

Taulukko 2: Hintoja eri toteushintaa K käyttäville S&P 500 -indeksin osto-optioille toteutuspäivällä 21.8.2015. Monte Carlo -menetelmässä käytettiin toistomäärää $n = 100000$. Markkinahinnat luettu 28.7.2015.

Toteutushinta K	2050	2060	2065	2070	2075	2100
Markkinahinta (viimeisin)	39,48	33,33	30,60	28,50	22,85	12,40
Bid	45,50	38,80	35,40	32,10	28,80	15,10
Ask	46,60	39,50	36,10	32,80	29,40	15,70
Analyttinen	41,40	36,02	33,51	31,11	28,83	19,16
Tavallinen Monte Carlo	41,61	36,11	33,55	30,94	28,88	19,22
Säätömuuttuja	41,39	36,01	33,50	31,10	28,83	19,16
Vastamuuttuja	41,41	36,02	33,46	31,11	28,80	19,13
Kvasi-Monte Carlo	41,40	36,02	33,51	31,11	28,84	19,16

5 Yhteenveto ja pohdinnat

Työssä tutkittiin Monte Carlo -menetelmää optioiden hinnoittelussa Black-Scholes-mallin tapauksessa. Menetelmän vaatimattoman tehokkuuden kasvattamiseksi vertailtiin siihen tehtäviä kolmea erilaista parannusta – säätömuuttujaa, vastamuuttujaa ja kvasi-Monte Carloa. Kaikki parannukset pienensivät tarkkuuden kasvattamiseen vaadittavaa toistomäärää huomattavasti aasialaisen option tapauksessa. Säätö- ja vastamuuttujien käyttö parannuksena kasvatti yhden simulaatiotoiston viemää aikaa, mutta kvasi-Monte Carlo -menetelmä oli nopeampi kuin tavallinen Monte Carlo -menetelmä.

Monte Carlo -menetelmän tuottamien hintojen vertailemiseksi vastaavien markkinahintojen kanssa hinnoiteltiin S&P 500-indeksioptio. Optio on eurooppalainen ja sen hinnoittelussa otettiin huomioon myös indeksiin kuuluvien osakkeiden maksamat osingot olettamalla jatkuva osingonmaksu. Indeksioption hinnalle saatiin analyttinen ratkaisu Black-Scholes-mallilla, ja simuloidut hinnat vastasivat sitä. Käytetyllä mallilla ja parametreilla saadut hinnat kuitenkin poikkesivat jonkin verran vastaavista markkinahinnoista.

Tulosten perusteella menetelmään tehtävien parannusten käyttö oli kannattavaa molempien hinnoiteltujen optiotyyppien tapauksessa. Niistä saatava hyöty ylitti suuresti kasvaneen laskentatyön haitat. Myöskään toteuttaminen ei ollut teknisesti kovinkaan haastavaa, varsinkaan vastamuuttujan ja kvasi-Monte Carlo -menetelmän tapauksessa. Sopivan säätömuuttujan löytäminen saattaa olla joissain tapauksissa hankalaa tai jopa mahdotonta. Parametrien valinta ei muuttanut parannusten hyödyllisyyttä yleisellä tasolla.

Parametrien arvot kuitenkin vaikuttavat huomattavasti saatuihin hintoihin,

ja huonot valinnat tuovat helposti epäluotettavuutta tuloksiin. Hinnoittelukykyä testattaessa volatilitteettina käytettiin VIX-indeksin arvoa eli keskiarvoista implisiittistä volatilitteettia kaikilla toteutushinnoilla K , vaikka implisiittinen volatilitteetti riippuu vahvasti toteutushinnasta K . Lisäksi option erääntymiseen jäljellä olevaa aikaa laskettaessa käytettiin kalenteripäiviä, mutta optioiden vaihtaminen ei pörseissä ole jatkuvaa. Black-Scholes-mallia esiteltäessä tehtiin myös oletukset vakioista riskittömästä tuotosta ja volatilitteetista ajan suhteen. Luotettavaan hinnoittelukykyyn pääseminen vaatisikin suurempaa huomiota malliin syötettäviin parametreihin ja esimerkiksi niiden mahdollisen aikariippuvuuden huomioon ottamista.

Työssä käytettiin Black-Scholes-mallia hinnoitteluun. Se perustuu kohde-etuuden hintakehityksen mallintamiseen geometrisella Brownin liikkeellä. Myös muita malleja kohde-etuuden hintakehitykseen on olemassa. Lisäksi tässä työssä käytettyjä oletuksia Black-Scholes-mallissa voidaan lieventää. Eri mallien tuottamien hintojen vertailu olisikin mielenkiintoinen jatkotutkimuksen aihe. Monte Carlo -menetelmä ei myöskään ole ainoa keino option hinnan ratkaisuun, kun analyttinen ratkaisu ei onnistu. Yksi mahdollisuus on esimerkiksi differenssimenetelmä, jossa Black-Scholes-osittaisdifferentiaaliyhtälö ratkaistaan approksimoimalla derivaattoja hilapisteissä. Myös hinnoittelu binomi- (tai trinomi-)hilassa on mahdollista. Erilaiset menetelmät soveltuvat eri tilanteisiin, ja olisikin mielenkiintoista vertailla niiden ominaisuuksia keskenään.

Viitteet

- Boyle, P. (1977). Options: A Monte Carlo approach. *Journal of Financial Economics*, osa 4(6): 323–338.
- Boyle, P., Broadie, M., Glasserman, P. (1997). Monte Carlo methods for security pricing. *Journal of Economic Dynamics and Control*, osa 21(8-9): 1267–1321.
- Chicago Board Options Exchange (2015a). CBOE Volatility Index (VIX). Saatavilla: <http://www.cboe.com/micro/vix/vixintro.aspx>. Viitattu: 28.7.2015.
- Chicago Board Options Exchange (2015b). Delayed Option Chain. Saatavilla: <http://www.cboe.com/delayedquote/quotetable.aspx>. Viitattu: 28.7.2015.
- Devroye, L. (1986). Sample-based non-uniform random variate generation. New York: Springer-Verlag. ISBN 0-387-96305-7, 843 ss.
- Glasserman, P. (2004). Monte Carlo Methods in Financial Engineering. New York: Springer. ISBN 0-387-00451-3 (sid.), 596 ss.
- Hull, J. C. (2011). Options, Futures and Other Derivatives. 8th ed., global ed. painos. Boston, Mass: Pearson Education. ISBN 978-0-273-75907-2, 888 ss.
- Joy, C., Boyle, P., K.S., T. (1996). Quasi-Monte Carlo Methods in Numerical Finance. *Management Science*, osa 42(6): 926–938.
- Luenberger, D. G. (2009). Investment Science. Int. painos. New York: Oxford University Press. ISBN 978-0-19-510809-5, 494 ss.
- Mellin, I. (2010). Todennäköisyyslaskenta: Kaavat. Helsinki, 137 ss.
- S&P Dow Jones Indices (2015). S&P 500. Saatavilla: <http://us.spindices.com/indices/equity/sp-500>. Viitattu: 28.7.2015.
- Turnbull, S. M., Wakeman, L. M. (1991). A quick algorithm for pricing European average options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, osa 26(03): 377–389.
- U.S. Department of the Treasury (2015). Daily Treasury Yield Curve Rates. Saatavilla: <http://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/TextView.aspx?data=yield>. Viitattu: 28.7.2015.

Vorst, T. (1992). Prices and Hedge Ratios of Average Exchange Rate Options. *International Review of Financial Analysis*, osa 1(03): 179–193.

A Itön lemma ja hintaprosessin tarkka diskretointi

Määritelmä 2 (Itön lemma). *Olkoon x on stokastinen prosessi, jonka määrittää*

$$dx(t) = a(x, t) dt + b(x, t) dz , \quad (13)$$

missä z on standardi Wienerin prosessi. Tällöin prosessi $y(t) = F(x, t)$ toteuttaa Itô yhtälön

$$dy(t) = \left(\frac{\partial F}{\partial x} a + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial F}{\partial x} b dz , \quad (14)$$

missä z on sama Wienerin prosessi kuin kaavassa (13) (Luenberger, 2009, s. 312).

Käytetään Itön lemmaa prosessiin $F(S) = \ln S$, jossa S on kaavan (4) määrittämä geometrinen Brownin liike, joten $a = \mu S$ ja $b = \sigma S$. Lisäksi derivoimalla saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial S} &= \frac{1}{S} , \\ \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} &= -\frac{1}{S^2} , \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= 0 . \end{aligned}$$

Sijoittamalla nämä kaavaan (14) saadaan

$$d \ln S = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dz ,$$

jossa parametrit μ ja σ oletetaan vakioiksi. Huomataan, että muutos ei riipu enää kohde-etuuden hinnasta S kyseisellä ajanhetkellä. Tällöin pätee kaikilla Δt

$$\ln S(t + \Delta t) - \ln S(t) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t} ,$$

koska Wienerin prosessille z pätee $z(t) - z(s) \sim N(0, t-s)$ kaikilla $0 \leq s \leq t \leq T$ (Glasserman, 2004, s. 80). Nyt voidaan ratkaista logaritmin laskusäännöllä ja eksponentoimalla

$$S(t + \Delta t) = S(t) \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \epsilon \sqrt{\Delta t} \right] , \quad (15)$$

missä odotetuksi tuotoksi on sijoitettu riskitön tuotto r riskineutraalin hinnoittelun mukaisesti. Kaava (15) on tarkka kaikilla Δt . (Hull, 2011, s. 448.)

B Fauren jonon pisteiden tuottaminen

Fauren jonon luomiseksi valitaan kantaluvuksi r pienin mahdollinen alkuluku siten, että $r \geq s$, joka on täytettävän avaruuden dimensio, ja $r \geq 2$. Mikä tahansa kokonaisluku n voidaan esittää valitussa kannassa:

$$n = \sum_{j=0}^m a_j(n)r^j, \quad (16)$$

missä a_j :t ovat kyseiseen alkuluvun r potenssiin liittyvät kertoimet. Tämä käännetään desimaalierottimen kohdalta (esimerkiksi kymmenkantaisessa järjestelmässä $123 \rightarrow 0,321$), jolloin saadaan ensimmäinen koordinaatti kyseistä kokonaislukua n vastaavaan Fauren pisteeseen $\phi_r(n)$

$$\phi_r^1(n) = \sum_{j=0}^m a_j(n)r^{-j-1}. \quad (17)$$

Loput koordinaatit saadaan neliömatriisin \mathbf{C} avulla

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} {}^0C_0 & {}^1C_0 & {}^2C_0 & {}^3C_0 & \dots \\ 0 & {}^1C_1 & {}^2C_1 & {}^3C_1 & \dots \\ 0 & 0 & {}^2C_2 & {}^3C_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & {}^3C_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (18)$$

missä ${}^iC_j = \frac{i!}{j!(i-j)!}$ (Joy et al., 1996).

Matriisin \mathbf{C} potenssilla kerrotaan alkuperäisistä kertoimista $a_j(n)$ muodostettua pystyvektoria seuraavasti

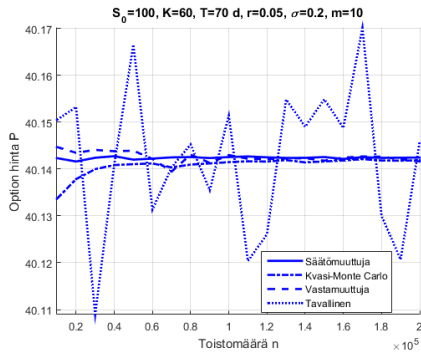
$$\begin{bmatrix} y_0^{(i)}(n) \\ y_1^{(i)}(n) \\ y_2^{(i)}(n) \\ \vdots \\ y_m^{(i)}(n) \end{bmatrix} = \mathbf{C}^{i-1} \begin{bmatrix} a_0(n) \\ a_1(n) \\ a_2(n) \\ \vdots \\ a_m(n) \end{bmatrix} \pmod{r}, \quad (19)$$

missä \mathbf{C} on kaavan (18) mukainen $m \times m$ -matriisi. Sijoittamalla saadun vektorin $\mathbf{y}^{(i)}(n)$ alkiot kaavassa (17) kertoimien $a_j(n)$ tilalle saadaan laskettua myös loput koordinaatit kyseistä kokonaislukua n vastaavaan Fauren pisteeseen $\phi_r(n)$

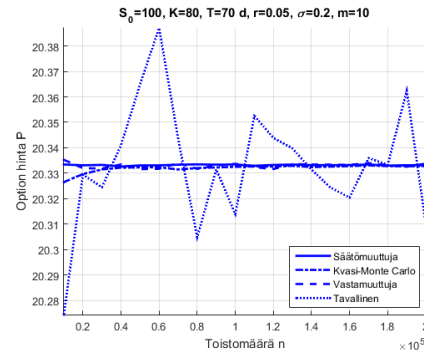
$$\phi_r^i(n) = \sum_{j=0}^m y_j^{(i)}(n)r^{-j-1}.$$

(Glasserman, 2004, s. 298.)

C Herkkyystarkastelu

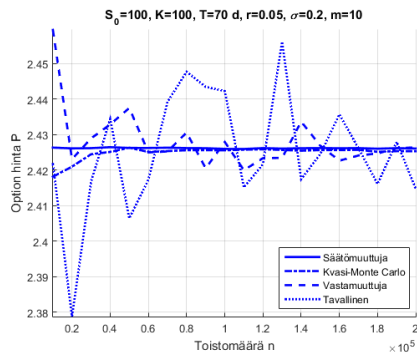


(a) Pienin suhde ($K/S_0=0.6$)

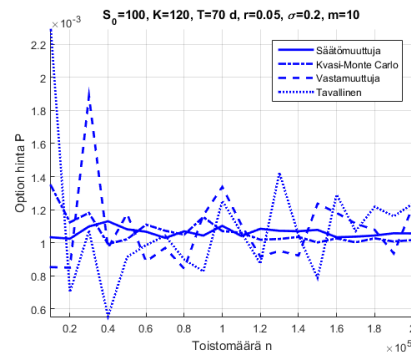


(b) Pienempi suhde ($K/S_0=0.8$)

Kuva 6: Aasialaisen option hinta simuloituna Monte Carlo -menetelmällä käyttäen pienempää toteutushinnan K ja kohde-etuuden nykyhinnan S_0 suhdetta K/S_0 .

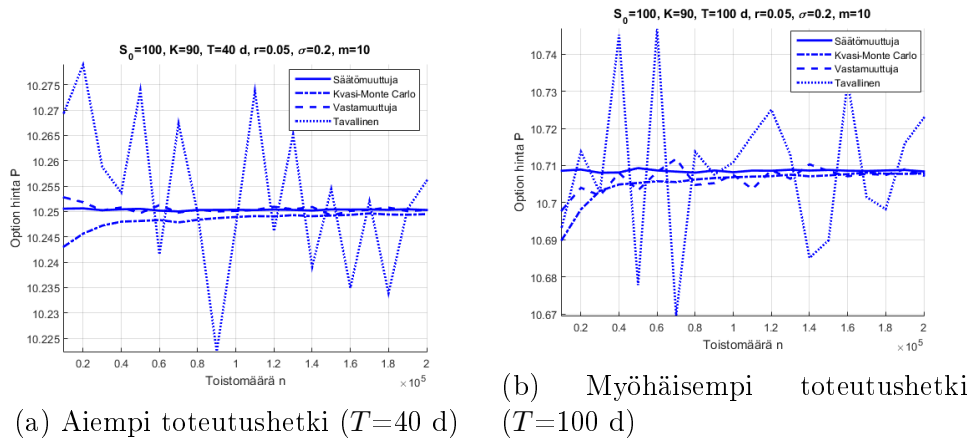


(a) Suurempi suhde ($K/S_0=1$)

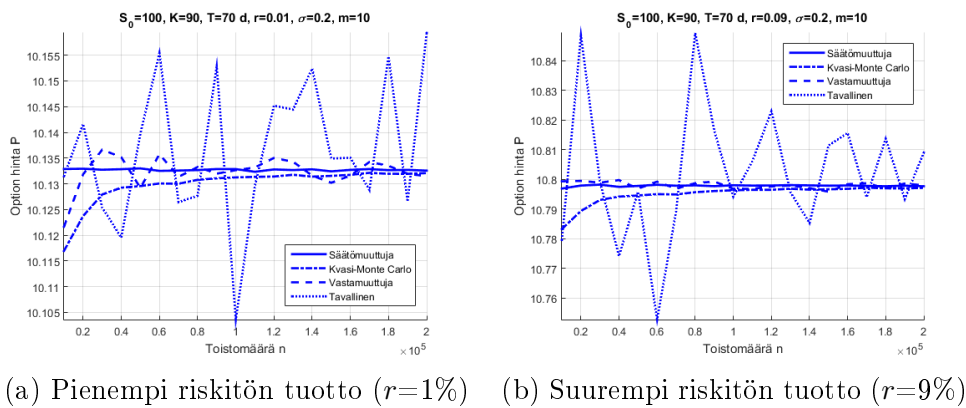


(b) Suurin suhde ($K/S_0=1.2$)

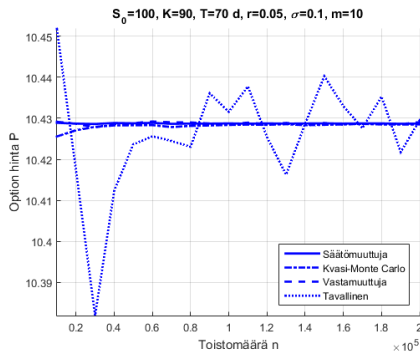
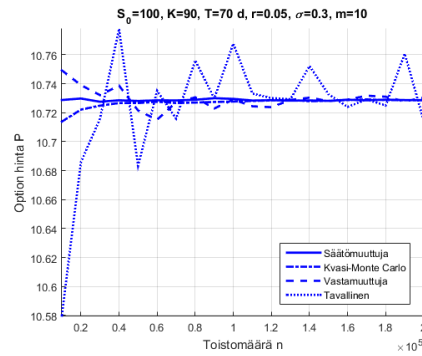
Kuva 7: Aasialaisen option hinta simuloituna Monte Carlo -menetelmällä käyttäen suurempaa toteutushinnan K ja kohde-etuuden nykyhinnan S_0 suhdetta K/S_0 .



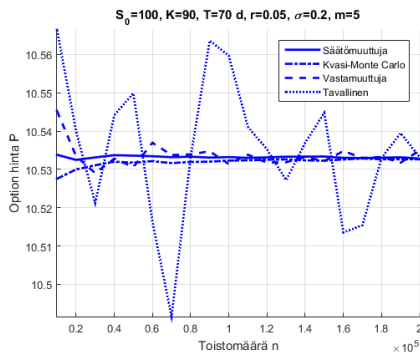
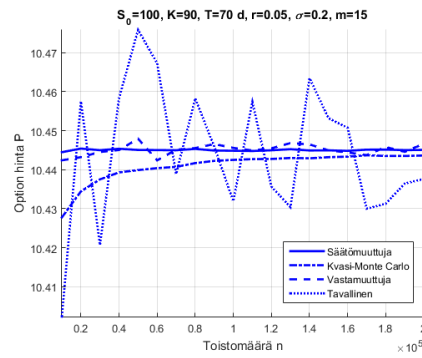
Kuva 8: Aasianlaisen option hinta simuloituna Monte Carlo -menetelmällä käyttäen aiempaa ja myöhempää toteutushetkeä T .



Kuva 9: Aasianlaisen option hinta simuloituna Monte Carlo -menetelmällä käyttäen suurempaa ja pienempää riskitöntä tuottoa r .

(a) Pienempi volatilitteetti ($\sigma=10\%$)(b) Suurempi volatilitteetti ($\sigma=30\%$)

Kuva 10: Aasialaisen option hinta simuloituna Monte Carlo -menetelmällä käyttäen suurempaa ja pienempää kohde-etuuden volatilitteettiä σ .

(a) Vähemmän laskentapisteitä ($m=5$)(b) Enemmän laskentapisteitä ($m=15$)

Kuva 11: Aasialaisen option hinta simuloituna Monte Carlo -menetelmällä käyttäen pienempää ja suurempaa lukumäärää kohde-etuuden hintoja keskiarvon laskemiseen.

Taulukko 3: Keskimääräinen suoritus aika aasianlaisen option tapauksessa käytetyillä parametrimuutoksilla. Aikojen yksikkö on (10^{-4} s).

Parametrit	Tavallinen	Säätö	Vasta	Kvasi
$m=15$	1,07	1,19	1,47	0,18
$m=5$	1,05	1,17	1,26	0,15
$T=100$ d	1,07	1,21	1,41	0,17
$T=40$ d	1,04	1,19	1,38	0,17
$\sigma=10\%$	1,03	1,17	1,36	0,17
$\sigma=30\%$	1,07	1,22	1,40	0,17
$r=1\%$	1,07	1,22	1,41	0,17
$r=9\%$	1,06	1,20	1,39	0,17
$K/S_0=0,6$	1,02	1,14	1,32	0,16
$K/S_0=0,8$	1,04	1,17	1,33	0,16
$K/S_0=1$	1,07	1,22	1,39	0,17
$K/S_0=1,2$	1,07	1,21	1,39	0,17