Polynomisysteemiteoria elämäntyönä

Raimo Ylinen
Teknillinen korkeakoulu
Systeemiteorian laboratorio

Yleistä

- Hans Blombergin tutkimustyö kattoi laaja-alaisesti systeemi- ja säätöteorian eri alueita.
- Kansainvälisesti merkittävin on lineaaristen differentiaali- ja differenssisysteemien *polynomisysteemiteoria*, jota hän kehitti 1960 luvulta aina vuosituhannen vaihteeseen.
- Itse osallistuin tähän työhön valmistumisestani v.1968 alkaen.
- Yhteenveto polynomisysteemiteoriassa kehitetyistä tuloksista julkaistiin kirjana Blomberg-Ylinen: Algebraic Theory for Multivariable Linear Systems, Academic Press, 1983.
- Perusteoria on aikainvarianteille systeemeille mutta yleistetty aikavarianteille ja jakautuneille systeemeille.

Varhaishistoriaa

- Tutkimus alkoi siirtofunktiotekniikan alkuarvo- ja supistusongelmista jo 1950-luvulta.
- Tärkeänä oppaana polynomisysteemiteoriaan ja yleisemmin joukko-opilliseen systeemiteoriaan toimi kirjan Zadeh-Desoer: Linear System Theory kriittinen läpikäynti lisensiaattiseminaareissa.
- Matemaattista pohjaa loi Sampo Salovaara (myöh. Ruuth) tilakäsitettä joukko-opillisella tasolla tarkastelevalla väitöskirjallaan ja polynomisysteemiteorian perusteita käsittelevällä raportilla yhdessä Hansin kanssa .
- Ryhmään liittyivät 1960 luvun loppupuolella Jyrki Sinervo, Aarne Halme ja viimeksi Raimo Ylinen.
- Ryhmä julkaisi 1969 Acta Polytechnicassa yhteenvedon tuloksistaan , jonka Jan Williams tuomitsi arvostelussaan ”matemaattiseksi voimisteluksi”.

Mitä polynomisysteemiteoria on?

- Polynomisysteemiteorialla tarkoitetaan lineaaristen differentiaali- tai differenssioperaattorimallien teoriaa,

$$(p^2+3p+2)y=(p+1)u\,,\; py=\frac{dy}{dt}\;,\;(q+0.2)y=5u\,,\; qy(k)=y(k+1)$$

- *Systeemi* on niiden input-output-parien (u,y) joukko S, jotka toteuttavat yhtälön. *Signaaliavaruus* määriteltävä.
- Ositettu matriisi nk. *generaattori* $[(p^2+3p+2)\ |\ -(p+1)]$ on systeemin *kuvaus* (*descriptio*).
- Monimuuttujasysteemit: $\begin{bmatrix} A(p) & \vdots & -B(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = 0$
- Rationaalilauseke $(p+1)/(p^2+3p+2)=1/(p+2)$ vastaa Laplace-tason siirtofunktiota mutta ilman *nollattuja* alkuarvoja ei voida kirjoittaa $y=(1/(p+2))u$, ts. *polynomilla ei saa jakaa*. Vaikeuttaa matriisien käsittelyä.

Miksi polynomisysteemiteoriaa?

- Alkuarvot ovat ongelmallisia

$$Y(s)=\frac{s+1}{s^2+3s+2}U(s)+\frac{sy(0)}{s^2+3s+2}+\frac{(py)(0)+3y(0)-u(0)}{s^2+3s+2}$$

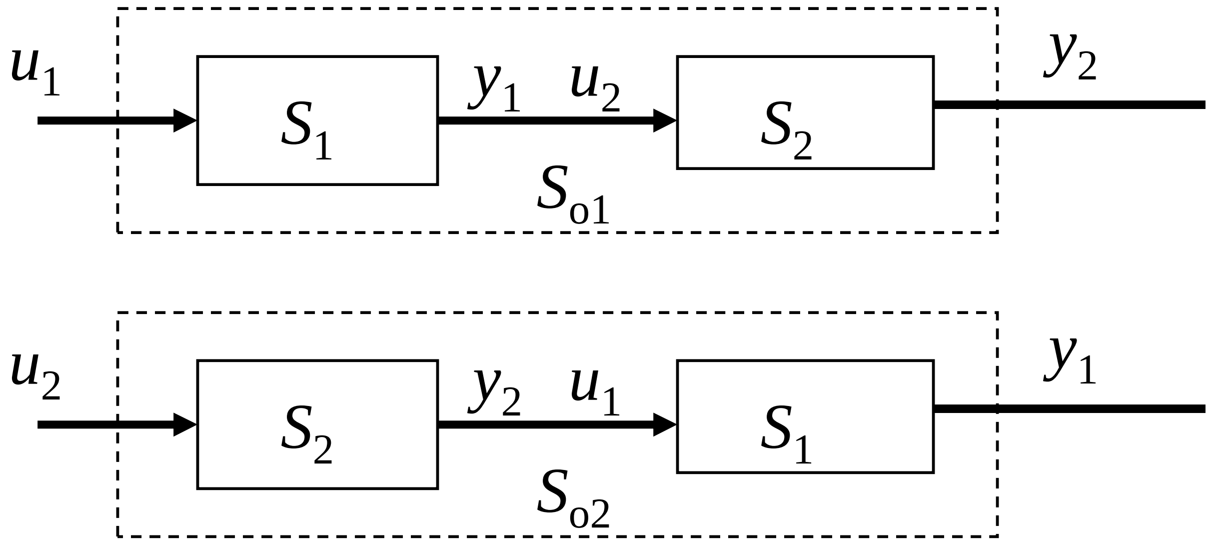
$$=\frac{1}{s+2}U(s)+\frac{y(0)}{s+2}$$

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\end{cases}\qquad \begin{cases}x_1(0)=y(0)\\ x_2(0)=(py)(0)+3y(0)-u(0)\end{cases}$$

- Miten määritellään alkuarvot paloittain jatkuville signaaleille, $u(0+)$ vai u(0-) ?

Miksi polynomisysteemiteoriaa?

- Kytkennät ovat ongelmallisia



S_1: $(p+1)y_1=u_1$ $\qquad \dfrac{1}{s+1} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u_1 \\ y_1 = x_1 \end{cases}$

S_2: $(p+2)y_2=(p+1)u_2$ $\qquad \dfrac{s+1}{s+2} \qquad \begin{cases} \dot{x}_2 = -2x_2 - u_2 \\ y_2 = x_2 + u_2 \end{cases}$

Miksi polynomisysteemiteoriaa?

- Kytkentä siirtofunktioilla

$$S_{o1}: \quad \frac{s+1}{s+2}\frac{1}{s+1}=\frac{1}{s+2}$$

$$S_{o2}: \quad \frac{1}{s+1}\frac{s+1}{s+2}=\frac{s+1}{(s+1)(s+2)}$$

Miksei saa supistaa?

- Kytkentä tilaesityksillä

$$S_{o1}: \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 \\ y_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Ei-tarkkailtava

$$S_{o2}: \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u_2 \\ y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

Ei-ohjattava

Miksi polynomisysteemiteoriaa?

- Kytkentä polynomisysteemiteorialla

$$S_{o1}: \begin{bmatrix} p+1 & 0 \\ -(p+1) & p+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u_1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} p+1 & 0 \\ 0 & p+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_1$$

$$1(p+2)y_2 = 1u_1$$

y_1 ei tarkkailtava

ohjattava

$$S_{o2}: \begin{bmatrix} 1 & -(p+1) \\ -(p+2) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ p+1 \end{bmatrix} u_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -(p+1) \\ 0 & (p+1)(p+2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ p+1 \end{bmatrix} u_2$$

$$(p+1)(p+2)y_1 = (p+1)u_2$$

ei ohjattava

y_2 tarkkailtava

Rinnakkaisia lähestymistapoja

- Samanaikaisesti oman tutkimuksemme kanssa mm. Howard Rosenbrock, William Wolovich ja Vladimir Kučera julkaisivat lukuisia lehtiartikkeleita ja kirjoja tältä alueelta.
- Oma teoriamme perustuu input-output-parien joukkoihin ja niihin liitettyihin polynomimatriisimalleihin eli deskriptioihin, ja *joukko-opillisen tarkastelun pohjalta* on kehitetty polynomimatriisien muokkaamiseen perustuvia analyysi- ja suunnittelumenetelmiä.
- Rosenbrock, Wolovich ja Kučera *lähtivät suoraan deskriptioista*, jolloin näiden muokkauksen vaikutus systeemin käyttäytymiseen pitää tarkistaa jälkikäteen.

Analyysimenetelmiä

- Ekvivalentit ja kanoniset descriptiot

$$\left[A(p) \;\vdots\; -B(p)\right] = L(p)\left[A_1(p) \;\vdots\; -B_1(p)\right]$$

$$\deg(\det L(p)) = 0 \Leftrightarrow \text{riviekvivalenssi} \Leftrightarrow S = S_1$$

  - Kanoninen yläkolmiomuoto (CUT)
  - Kanoninen rividredusoitu muoto (CRP)

- Ohjattavuus

$$\left[A(p) \;\vdots\; -B(p)\right] = L(p)\left[A_1(p) \;\vdots\; -B_1(p)\right]$$

$$\deg(\det L(p)) > 0 \Rightarrow \text{ei ohjattava}$$

- Tarkkailtavuus

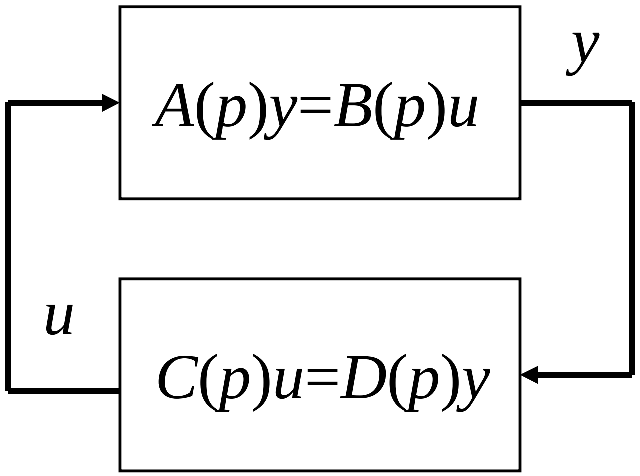
$$\begin{bmatrix} A_1(p) & A_2(p) \\ A_3(p) & A_4(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1(p) \\ B_2(p) \end{bmatrix} u \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \tilde{A}_1(p) & \tilde{A}_2(p) \\ 0 & \tilde{A}_4(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1(p) \\ \tilde{B}_2(p) \end{bmatrix} u$$

$$\deg(\det \tilde{A}_1(p)) > 0 \Rightarrow \text{ei tarkkailtava}$$

Suunnittelumenetelmiä/säätö

- Säädin

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p+1 & 0 \\ -(p+1) & p+2 \end{bmatrix}}_{A(p)} \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B(p)} u$$



$$\underbrace{\begin{bmatrix} A(p) & \vdots & -B(p) \\ -D(p) & \vdots & C(p) \end{bmatrix}}_{\det = \det T_4(p)} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}$$

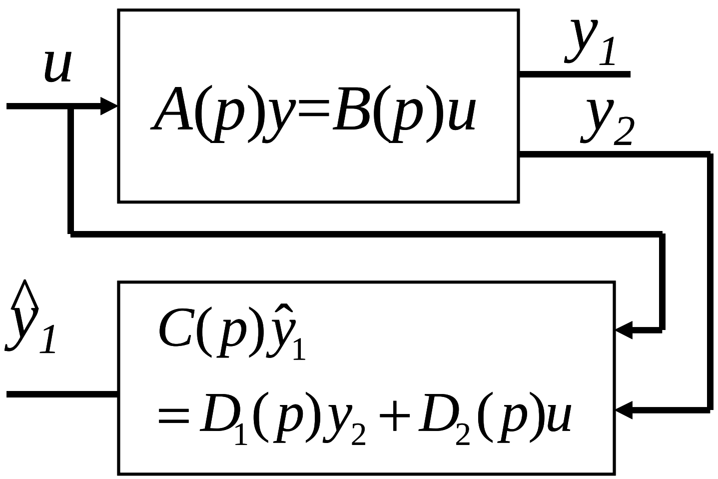
$$= \begin{bmatrix} I & \vdots & 0 \\ T_3(p) & \vdots & T_4(p) \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} A(p) & \vdots & -B(p) \\ X(p) & \vdots & Y(p) \end{bmatrix}}_{\det = 1} \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}$$

Esim. $T_3(p) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad T_4(p) = p + 2 \Rightarrow u = -0,5y$

Suunnittelumenetelmiä/tarkkailija

- Tarkkailija

$$\begin{bmatrix} 1 & -(p+1) \\ 0 & (p+1)(p+2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ p+1 \end{bmatrix} u \Leftrightarrow \begin{bmatrix} I & A_2(p) \\ 0 & A_4(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1(p) \\ B_2(p) \end{bmatrix} u$$



$$\begin{bmatrix} C(p) & \vdots & -D_1(p) & -D_2(p) \\ 0 & \vdots & A_4(p) & -B_2(p) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} T_1(p) & T_2(p) \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \vdots & A_2(p) & -B_1(p) \\ 0 & \vdots & A_4(p) & -B_2(p) \end{bmatrix}$$

Virhe $T_1(p)(y_1 - \hat{y}_1) = 0$

Esim. $T_1(p) = p+2, T_2(p) = 1 \Rightarrow (p+2)\hat{y}_1 = (p+1)u$

Avoin tarkkailija

Kirja

- Polynomisysteemiteorian tutkimuksessa oli 70-luvun alkupuolella saatu huomattavia tuloksia, joten päätimme julkaista kirjan aiheesta.
- Muut ryhmästä olivat jo siirtyneet professorin virkoihin toisiin korkeakouluihin, joten lopulta ryhdyimme kirjoitustyöhön kahdestaan Hansin kanssa.
- Työ aloitettiin vuonna 1974 ja se kesti kaikkine tarkistus- ja korjausvaiheineen lähes kahdeksan vuotta. Kirja Blomberg-Ylinen: Algebraic Theory for Multivariable Linear Systems ilmestyi vuonna 1983.
- Aluksi kirjaa myytiin kohtalaisesti, mutta myöhemmin vuotuiset tekijänpalkkiot olivat niin pieniä, ettei shekkejä kannattanut lunastaa, koska kulut olivat suuremmat.

Behaviorismi

- Jan Willems arvosteli taas kirjan ja tällä kertaa se sai huomattavasti paremman arvostelun.
- Jo hiukan ennen hän alkoi kutsua systeemiämme ”käyttäytymiseksi” (behavior) ja generaattoriamme systeemiksi ja näin hän ”perusti” *behavioristisen systeemiteorian*, joka on saanut oman pienen koulukuntansa.
- Behavioristinen systeemiteoria on kuitenkin selvästi tunnetumpi kuin meidän teoriamme ja monet ovat ihmetelleet, miksi emme nostaneet asiasta meteliä. Liittynee suomalaiseen vaatimattomuuteen!
- Olen tavannut Willemsin useamman kerran ja keskustellut joistakin probleemeista, mutta tästä terminologisesta kysymyksestä emme ole puhuneet.

Jatkotutkimuksia

- Pauli Sipari kehitti suunnitteluohjelmiston ja tässä yhteydessä korostui *symbolisen laskennan* tarve, ts. numeerisen laskennan pyöristysvirheet hävittävät tiedon aidosti yhtä suurista suureista.
- Ongelmaa yritettiin ratkaista käyttämällä nk. *rakenteellisia ominaisuuksia* numeerisen laskennan tukena.
- *Hansin viimeinen tutkimus* liittyi suurten järjestelmien, esim. sähköpiirien *rakenteelliseen mallittamiseen* lähtien nk. *descriptor* esityksestä.
- Itse olen johtanut mm. polynomisysteemien *separaatio-periaatteen*, jolla output-takaisinkytkentä voidaan jakaa *yleistetyn tilan* tarkkailijaksi ja tällä tavoin estimoidun tilan takaisinkytkennäksi.
- Vastaavaa menettelyä olen soveltanut *vikasietoiseen säätöön*, jossa estimoitava signaali on tuntematon input.

Yleistyksiä

- Rinnan kirjan kirjoittamisen kanssa yleistin teoriaa vakiokertoimisista malleista aikavariantteihin ja operaattorikertoimisiin malleihin. Lisensiaattityö yleisestä teoriasta valmistui 1975 ja väitöskirja aikavarianteista differentiaalisysteemeistä 1980.
- Aikavarianteille systeemeille on Kai Zengerin kanssa kehitetty tilatakaisinkytkettyä säätöä.
- Nikolai Vatanski väitöskirjassaan (2011) sovelsi säätöön verkon yli, jolloin aikavariantteja diskreettejä viiveitä.
- Lisensiaattityöni jatkoksi kehitin myöhemmin myös jakautuneille systeemeille eli nD-systeemeille analyysi- ja säätömenetelmiä, joita Jari Hätönen sovelsi väitöskirjassaan (2003).

Aikavariantit systeemit

- Aikavariantti differentiaalisysteemi

$$(p^2 + a_1(t)p + a_0(t))y = (b_1(t)p + b_0(t))u, \quad p = \frac{d}{dt}$$

Aikavariantti differenssisysteemi

$$(q^2 + a_1(k)q + a_0(k))y = (b_1(k)q + b_0(k))u, \quad (qy)(k) = y(k+1)$$

- Ongelma 1: Kertolasku ei ole kommutatiivinen sillä

$$pa(t) = a(t)p + a^{(1)} \qquad qa(k) = a(k+1)q$$

Vaikeuttaa matriisien muokkausta.

- Ongelma 2: Kertoimet $a(t)$ (tai $a(k)$) eivät yleensä pisteittäin invertoituvia. Tätä tarvitaan matriisien muokkaamisessa, joten kertoimien käyttäytymistä joudutaan rajoittamaan.

Jakautuneet systeemit

- Jakautunut differentiaalisysteemi

$$(p_t + a_0 p_x^2) y = b_0 u, \quad p_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad p_x = \frac{\partial}{\partial x}$$

- Ongelma:Polynomeja, joiden kertoimet ovat toisen operaattorin polynomeja. Ilman *nollattuja reunaehtoja* kertoimilla ei voi jakaa. Vaikeuttaa matriisien muokkausta.

Aika- ja paikkavariantit systeemit

- Jakautunut differentiaalisysteemi, esim. Schrödingerin yhtälö

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}(x,t)+V(x,t)\Psi(x,t)-i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}(x,t)=0$$

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m}p_x^2+V(x,t)-i\hbar p_t\right)\Psi=0$$

- Sekä aika- että paikkavariantti.
- Kirjallisuudessa *virheellisesti*, että

$$\Psi(x,t)=Ce^{i(px-Et)/\hbar}$$

$$\frac{p^2}{2m}+V(x,t)=E$$

olisi ratkaisu. Itse yhtälö on virheellisesti yleistetty vakiopotentiaalitapauksesta!

Yhteenveto

- Polynomisysteemit ja tilaesitykset ovat ”tarkkoja” systeemi-malleja ja soveltuvat näin rakenteelliseen analyysiin.
- Säätösuunnittelu näillä on lähinnä napojen sijoittelua joko suoraan tai LQ tekniikalla.
- Approksimatiiviset ja/tai optimointiin perustuvat taajuus-tason graafiset menetelmät ovat havainnollisempia.
- Interaktiiviset suunnittelutyökalut (Matlab jne.) ovat mahdollistaneet näiden rinnakkaisen käytön.
- Aikavarianttien ja jakautuneiden systeemien teoriaa tarvi-taan tehtäviin, joissa aikainvariantit menetelmät eivät riitä.
- Prosessinsäädössä ei ole tapahtunut enää teoriakehitystä vaan jo 1960-luvulta peräisin oleva MPC on kasvaneen laskentatehon myötä vallannut markkinat.