Aalto-yliopisto
Perustieteiden
korkeakoulu

Kirjallisuuskatsaus sisäpistemenetelmiin ja niiden soveltamiseen eri optimointiluokille (valmiin työn esittely)

Ilari Vähä-Pietilä

28.04.2014

Ohjaaja: *TkT Kimmo Berg*

Valvoja: *Prof. Harri Ehtamo*

Systeemianalyysin laboratorio

Työn tavoite

- Tehdä kirjallisuuskatsaus sisäpistemenetelmiin
- Tutustua kolmeen algoritmiin
  - Logaritminen estefunktio
  - Primaali-duaali menetelmä
  - Predictor-corrector menetelmä
- Tutustua, kuinka sisäpistemenetelmiä voidaan käyttää lineaaristen komplementaarisuusongelmien sekä semidefiniittien ongelmien ratkaisussa.
- Mitä rajoitteita sisäpistementelmien soveltamisella on?

Tausta

- Danzig julkaisi ensimmäisen version SIMPLEX-menetelmästään 50-luvulla
- Khachiyan esitti 1979 ellipsoidimenetelmän lineaaristen ongelmien polynomiaikaiseksi algoritmiksi
- Karmarkar 1984 aloitti sisäpistemenetelmien laajamittaisen tutkimuksen
  - Polynomiaikainen sisäpistemenetelmä, jossa oli potentiaalia haastamaan SIMPLEX-menetelmä käytännössä
  - Algoritmin ja klassisen logaritmisen estefunktiomenetelmän välillä huomattavia yhtäläisyyksiä

Lineaariset ongelmat (LP)

- Lineaarinen tehtävä standardimuodossa
  - $\min c^T x, \quad s.e.\ Ax = b,\ x \geq 0.$
- SIMPLEX on ollut käytetyin menetelmä
- Sisäpistemenetelmiä
  - Logaritminen estefunktio
  - Primaali-duaali-algoritmi
  - Predictor-corrector-menetelmä

Logaritminen estefunktio

- Lähestytään optimia käyvän joukon sisäpuolelta
  - $\min_{x} f(x;\mu) = c^T x \; - \mu \Sigma_{i=1}^{n} \ln x_i \,, \quad s.e.\, Ax = b,\; \mathrm{x} \geq 0$
- Ratkaistaan Newton-menetelmän askel jollain μ, jonka jälkeen pienennetään μ arvoa.
  - Toistetaan, kunnes jokin lopetusehto täyttyy

Primaali-duaali-algoritmi

- Ottavat duaalimuuttujat eksplisiittisesti huomioon
  - $\min c^T x, \quad s.e.\ Ax = b,\ x \geq 0$
  - $\max b^T \lambda, \quad s.e.\ A^T\lambda + s = c,\ s \geq 0$
- Ratkaistaan KKT-ehdot Newtonin menetelmällä
  - Siirrytään Newton-askel ja päivitetään muuttujat
  - Toistetaan, kunnes jokin lopetusehto täyttyy

Primaali-duaali-algoritmi

- Karush-Kuhn-Tucker-ehdot:

$$Ax = b$$
$$A^T\lambda + s = c$$
$$XSe = \mu e$$
$$(x, s) > 0$$

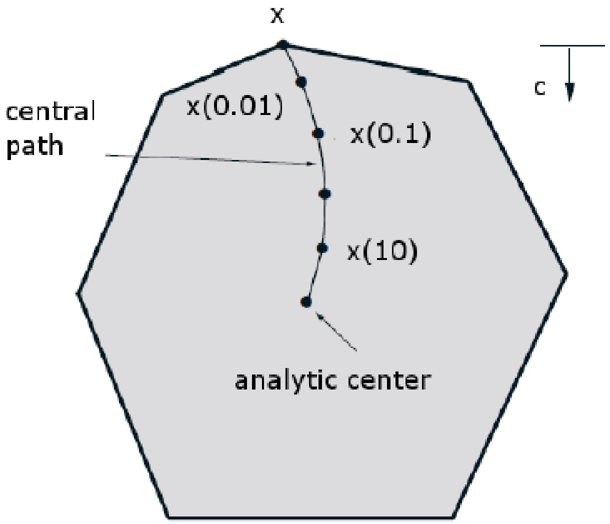
- Newton-askel

$$\begin{bmatrix} 0 & A & 0 \\ A^T & 0 & I \\ 0 & S & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\lambda \\ \Delta x \\ \Delta s \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ XSe - \sigma\mu e + r \end{bmatrix}$$

  - s surplus muuttuja, $\mu = {x^T s}/{n}$, $\sigma \in [0,1]$ keskitysparametri ja r on vakautustermi

Primaali-duaali-algoritmi

- Keskuspolku määritellään jononä ratkaisuja $\{x_\mu\}, \mu > 0$ ja kun $\mu \to \infty, x_\mu \to x^A$
  - x^A kutsutaan analyyttiseksi keskukseksi



Predictor-corrector-algoritmi

- Käytännössä tehokkaampi kuin primaali-duaali-menetelmä
- Pyrkii valitsemaan keskitysparametrin aggressiivisemmin
  – Käytetään suuntahakua keskuspolun läheisyydessä pysymiseen
- Otetaan ensin ”predictor”-askel, jonka jälkeen ”corrector”-askel keskuspolun suuntaan
  – Ratkaistaan suurin mahdollinen askel, jolla ratkaisu on keskuspolun läheisyydessä, jonka jälkeen otetaan korjaava askel keskuspolun suuntaan
  – Toistetaan kunnes jokin lopetusehto täyttyy

Lineaariset komplementaarisuusongelmat (LCP)

- Yleinen tehtäväluokka
  - Tutkimus tuottanut toimivia algoritmeja, joita voidaan laajentaa muihin optimointiluokkiin
- Pyritään löytämään vektorit w ja z siten että ne täyttävät
  - $w - Mz = q,\ (w, z) \geq 0,\ w_i z_i = 0,\ kaikille\ i$
  - Matriisissa M ja vektorissa q on tehtävän rajoitukset
- Primaali-duaali-algoritmi sekä monet sen sovellukset ovat identtisiä tämän kanssa.

Semidefiniitti ohjelmointi (SDP)

- Minimoidaan lineaarista funktiota rajoitusehtojen suhteen, joiden affiinikombinaatio symmetrisistä matriiseista on positiivisesti definiitti
  - $P \cdot Q$ on matriisien sisätulo
- SDP määritellään standardimuodossa
  - $\min_{x} C \cdot X,\ s.e.\ A_i \cdot X = b_i,\ \ X \geq 0, i = 1,2,\ldots,m$
- Ongelmana on keskuspolun ratkaiseminen Newton-askeleella

Semidefiniitti ohjelmointi (SDP)

- KKT-ehdoista kahden symmetrisen matriisin tulo ei välttämättä ole symmetrinen matriisi
  - Newton-askelta ei voida suoraan soveltaa
- Eri primaali-duaali algoritmit eroavat niiden tavassa sovittaa tulomatriisin rangi ja dimensio yhteen
  - Useimmat hakusuunna semidefiniitille ohjelmointitehtävälle on löydettävissä sijoittamalla tulomatriisin $XS = \mu I$ tilalle "symmetrinen" matriisi, jonka rangi on $\mathcal{R}^{n \times n}$

Sisäpistemenetelmien soveltamisen rajoitukset

- Sisäpistemenetelmät hyödyntävät hyvin tehtävän rakennetta
  - Systeemin rakenne ja ulottuvuudet säilyvät samana iteraatioiden ajan
- Sisäpistemenetelmillä ”warm start”-ominaisuudet ovat huonot
  - Muutokset kohdefunktiossa muuttavat keskuspolkua, jolloin sisäpistemenetelmä käyttää iteraatioita päästäkseen jälleen keskuspolun läheisyyteen

Sisäpistemenetelmien soveltamisen rajoitukset

- SDP tapauksessa matriisien symmetrisyysvaatimukset tuovat rajoituksia tehtävien soveltamiselle
  - Täytyy tehdä yksinkertaistavia oletuksia ja approksimaatioita esimerkiksi symmetrisyyden suhteen
- Kokonaislukuoptimoinnissa SIMPLEX:iä hyödyntävät menetelmät ovat ylivoimaisia ”warm start”-ominaisuuksien takia