Aalto-yliopisto
Perustieteiden
korkeakoulu

Lineaaristen monitavoite-optimointitehtävien ratkaiseminen

Jerri Nummenpalo

17.09.2012

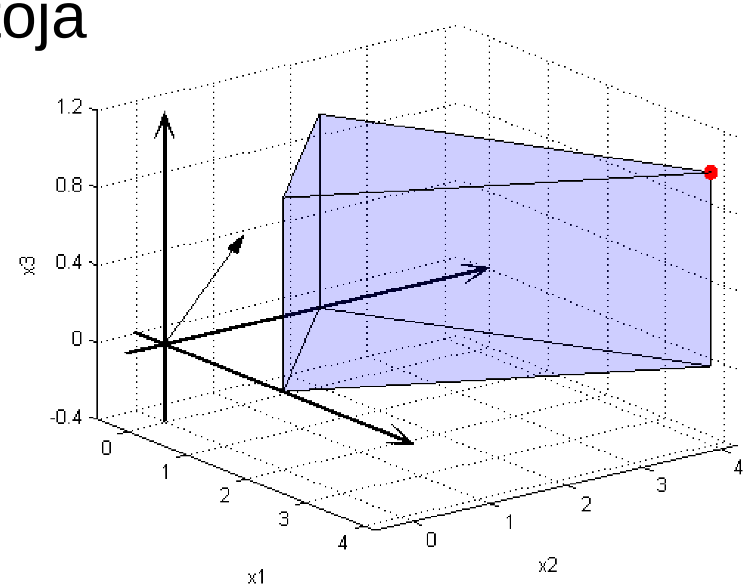
Ohjaaja: *TkT Juuso Liesiö*
Valvoja: *Prof. Ahti Salo*

Systeemianalyysin
laboratorio

Lineaarinen ohjelmointi (LP)

- Lineaarinen kohdefunktio
- Lineaariset rajoitteet
- Ratkaisuna optimipiste
- Tehokkaita ratkaisuohjelmistoja
- Lukuisia sovelluksia
  - Tuotannonsuunnittelu
  - Reitinsuunnittelu
  - Verkosto-ongelmat

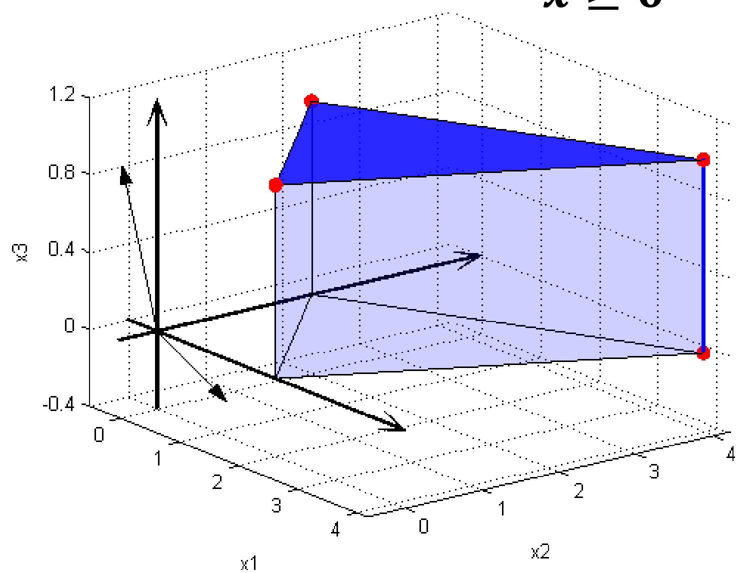
$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{s. e.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$



Monitavoitteinen lineaarinen ohjelmointitehtävä (MOLP)

- Useita kohdefunktioita
- Ratkaisuina tehokkaat pisteet
- Ei ratkaisuohjelmistoja
- Sovelluksia
  - Resurssien allokointi
  - Kauppatieteet
  - Hallinnointi

$$
\begin{array}{rr}
\max & \boldsymbol{c}_1^T \boldsymbol{x} \\
 & \vdots \\
\max & \boldsymbol{c}_n^T \boldsymbol{x} \\
\text{s.e.} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
 & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

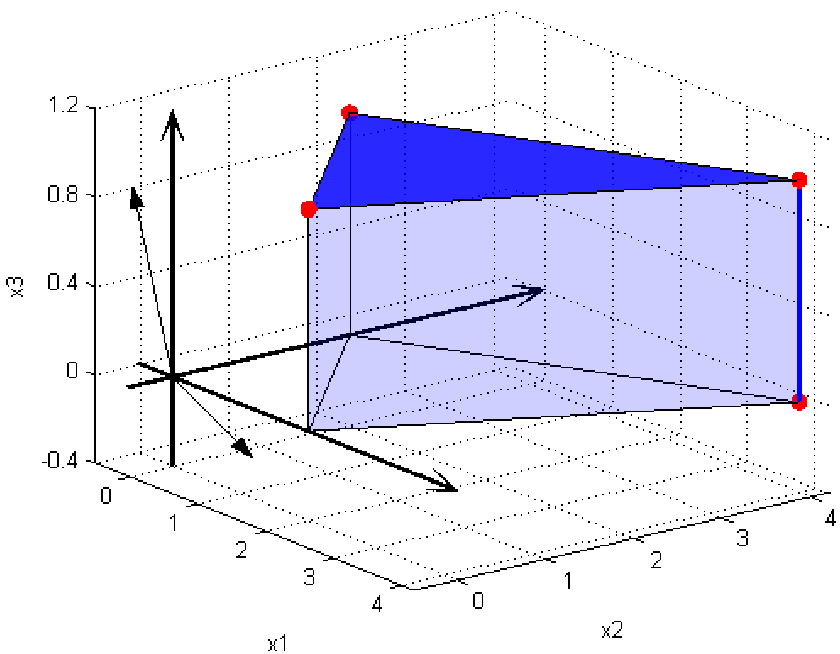


Käsitteiden määritelmiä

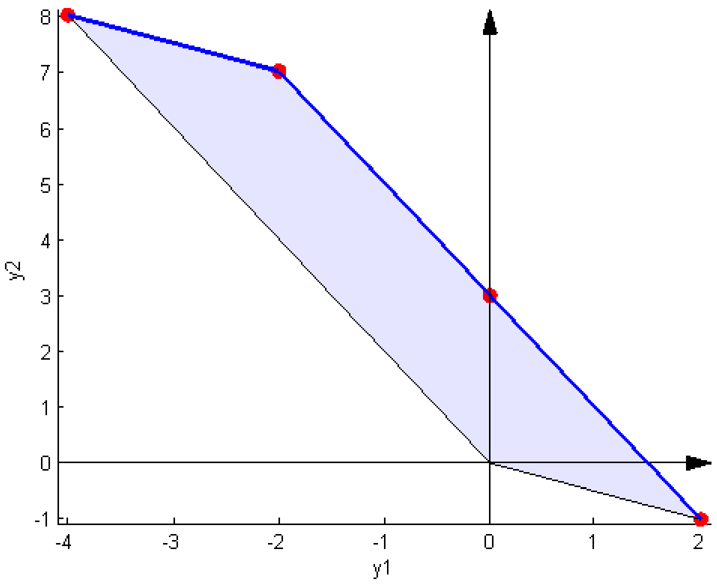
- Kohdefunktiot esitettän usein matriisina **C**
- Rajoitushtojen $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ rajaamaa aluetta P sanotaan käyväksi alueeksi *päätösavaruudessa*
- *Tavoiteavaruuden* käypä alue on $T = \{\mathbf{Cx} : \mathbf{x} \in P\}$
- Rajoitusehdot toteuttavaa pistettä $\mathbf{x}'$ sanotaan *tehokkaaksi*, jos ei ole olemassa käypää pistettä $\mathbf{x}$ siten, että $\mathbf{Cx} \leq \mathbf{Cx}'$
- Tehokasta pistettä vastaavaa tavoiteavaruuden pistettä $\mathbf{y}' = \mathbf{Cx}'$ sanotaan *ei-dominoiduksi*

Esimerkki MOLP-tehtävästä

Päätösavaruus



Tavoiteavaruus



Haasteita MOLP-tehtävien ratkaisemisessa

- Satunnaisissa tehtävissä tehokkaiden kulmapisteiden määrän havaittu riippuvan eksponentiaalisesti
  - Päätösmuuttujien lukumäärästä
  - Rajoitefunktioiden lukumäärästä
  - Kohdefunktioiden lukumäärästä
- Laskenta-aika verrannollinen tehokkaiden kulmapisteiden määrään
- Ei juurikaan ratkaisuohjelmistoja
  - ADBASE kirjallisuudessa eniten viitattu ratkaisualgoritmi
  - Ohjelmistot vaikeasti saatavilla

Monitavoitteinen Simplex-algoritmi

- Etsii tehokkaat kulmapisteet
- Toteutettiin Matlab-ohjelmistolla
- Hyödyntää vapaan lähdekoodin Lp_solve-kirjastoa
- Esimerkkitehtävä: hyperkuutio
  - *2n* rajoitetta
  - 2^n tehokasta kulmapistettä

n	7	8	9	10	11	12	13	14
aika (s)	0.51	0.99	2.1	4.7	10.1	23.6	62.9	143
kulmapisteitä	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384

Resurssien allokointi kauppakeskuksille (Korhonen ja Syrjänen, 2004)

- Tilasto 25 suomalaista kauppakeskusta
- Tehtävänä maksimoida myyntiä ja voittoa uudelleenallokoimalla miestyötunteja ja liikkeiden kokoja
  - Lisäresursseja jaettavana 1%
- Muutokset kauppakeskuksissa suhteessa nykytilaan
  - Käytännön rajoina -10% ja +30%
- Taustalla tehokkuusanalyysissä (DEA, Data Envelopment Analysis) usein käytetyn CCR-mallin ehdot

Korhonen P. ja Syrjänen, M. Resource allocation based on efficiency analysis. Management Science, 2004

Resurssien allokointi – tehtävän muodostaminen

i	Resurssit Miestyötunnit (10^3 h) $\mathbf{x}_1$	Liikkeen koko (10^3 m^2) $\mathbf{x}_2$	Tuotot Myynti (10^6 Mk) $\mathbf{y}_1$	Voitto (10^6 Mk) $\mathbf{y}_2$
1	79.1	4.99	115.3	1.71
2	60.1	3.3	75.2	1.81
3	126.7	8.12	225.5	10.39
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
23	80.1	3.79	135	4.73
24	68.7	2.99	98.9	1.86
25	62.3	3.1	66.7	7.41
Yht	1901.5	102.97	2586.1	81.72

$$\max_{\hat{\mathbf{x}}^i, \hat{\mathbf{y}}^i, \delta_i} \sum_{i=1}^{25} \hat{\mathbf{y}}_1^i$$

$$\max_{\hat{\mathbf{x}}^i, \hat{\mathbf{y}}^i, \delta_i} \sum_{i=1}^{25} \hat{\mathbf{y}}_2^i$$

$$\hat{\mathbf{x}}^i \geq \delta_i \mathbf{x}^i, \qquad i = 1, \ldots, 25$$

$$\hat{\mathbf{y}}^i \leq \delta_i \mathbf{y}^i, \qquad i = 1, \ldots, 25$$

$$\hat{\mathbf{x}}^i \geq 0.9 \cdot \mathbf{x}^i, \qquad i = 1, \ldots, 25$$

$$\hat{\mathbf{x}}^i \leq 1.3 \cdot \mathbf{x}^i, \qquad i = 1, \ldots, 25$$

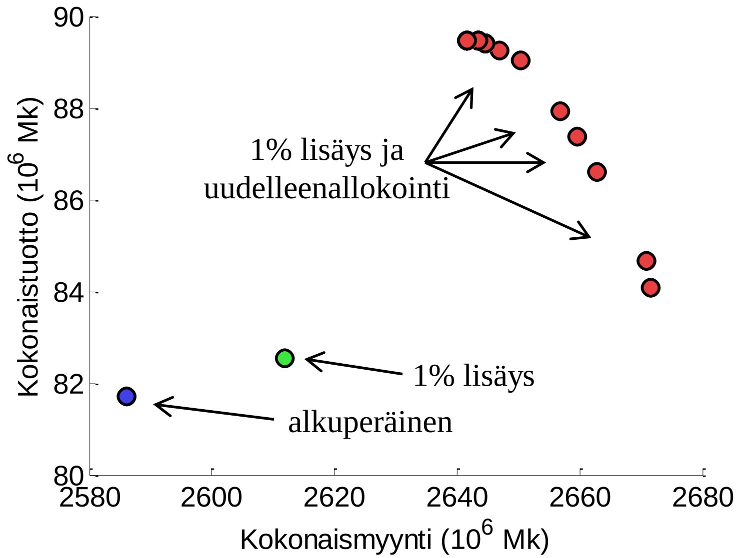
$$\sum_{i=1}^{25} \hat{\mathbf{x}}^i \leq 1.01 \cdot \sum_{i=1}^{25} \mathbf{x}^i,$$

- Päätösmuuttujina
  - Uudet resurssit $\hat{\mathbf{x}}^i$
  - Uudet tuotot $\hat{\mathbf{y}}^i$
  - Skaalauskertoimet δ_i

Resurssienallokointitehtävä – tulokset 1/2

- Ratkaisuja 42114 kappaletta
- Apumuuttujien takia lopullisia ratkaisuja ainoastaan 67 erialaista päätösavaruudessa
- Tavoiteavaruudessa vain 10 eri ratkaisua
- Resurssien uudelleenallokoin-nilla saadaan merkittävä etu verrattuna ainoastaan 1% lisäykseen

Tavoiteavaruuden ratkaisut

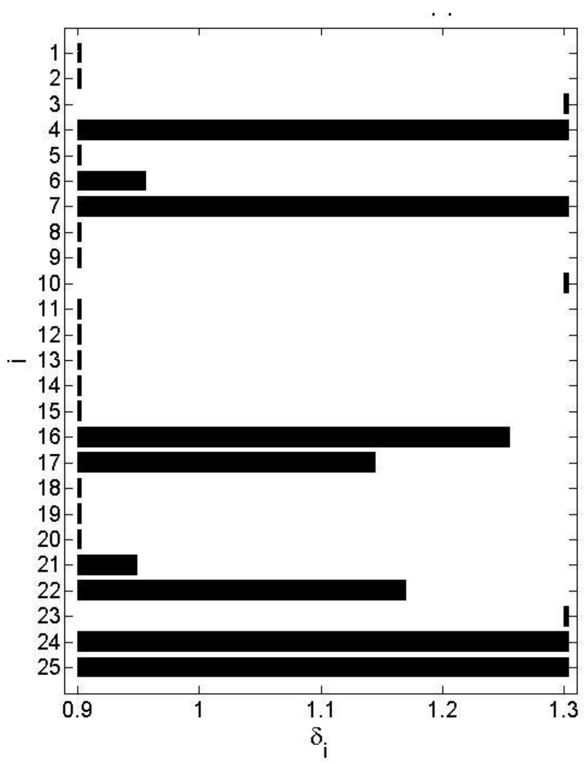


Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu

Systeemianalyysin laboratorio

Resurssienallokointitehtävä – tulokset 2/2

- Kiinnostavana tietona saadaan myös kertoimien δ_i vaihteluvälit eri ratkaisuissa
- Toisia kauppakeskuksia kannattaa aina pienentää – toisia aina suurentaa
- Mielenkiintoinen tieto päätöksentekijälle
- -10% ja +30% rajat näkyvät kertoimien δ_i arvoissa



Yleisiä havaintoja MOLP-tehtävistä resurssienallokointiongelmissa

- Monitavoitteisella Simplex-algoritmilla on mahdollista ratkaista käytännön resurssienallokointiongelmia
- Päätösmuuttujien määrä vaikuttaa ratkaisevasti tehokkaiden pisteiden määrään ja siten laskenta-aikaan
- Tavoiteavaruudessa ratkaisujen määrä on huomattavasti pienempi kuin päätösavaruudessa
  - Suoraan tavoiteavaruudessa MOLP-tehtävän ratkaisevat algoritmit kiinnostava tutkimuskohde
  - Tehtävän kannalta epäolennaiset muuttujat lisäävät turhaan päätösmuuttujien määrää ja siten laskenta-aikaa

Tärkeimpiä tietolähteitä

- Ehrgott, M. *Multicriteria Optimization* (2005)
- Steuer, R.E. *Multiple criteria optimization: Theory, computation, and application* (1985)
- Korhonen P. ja Syrjänen, M. *Resource allocation based on efficiency analysis*. Management Science, 2004

Kysymyksiä?