Aalto-yliopisto
Perustieteiden
korkeakoulu

Monte Carlo -menetelmä optioiden hinnoittelussa
(valmiin työn esittely)

Niko Laakkonen

17.09.2015

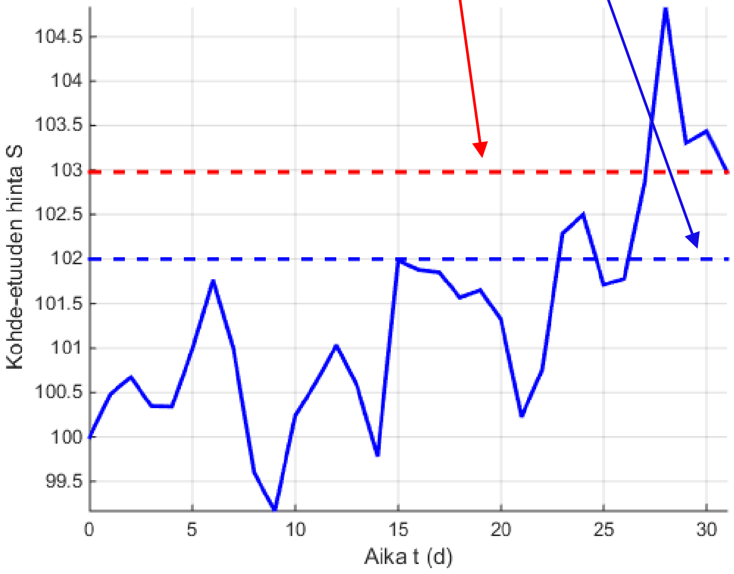
Ohjaaja: TkT *Eeva Vilkkumaa*
Valvoja: Prof. *Harri Ehtamo*

Systeemianalyysin
laboratorio

Tausta

- Optiolla tarkoitetaan oikeutta käydä kauppa kohde-etuudella ennalta määrätyin ehdoin
- Käytetään riskeiltä suojautumiseen tai voitontavoitteluun
- Johdannaismarkkina >> osakemarkkina (Hull, 2011)

$$f = \max(0, S_T - K)$$



Option hinnoittelu

- Option arvo f(S,t) riippuu kohde-etuuden hintakehityksestä S juoksuaikana ja ajasta t
- Hinta voidaan määrittää Black-Scholes-mallilla:
  - $\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$
- Hinnoittelu ratkaisemalla suoraan Black-Scholes-malli onnistuu vain perustapauksissa
  - Tarvitaan numeerisia menetelmiä

Monte Carlo -menetelmä

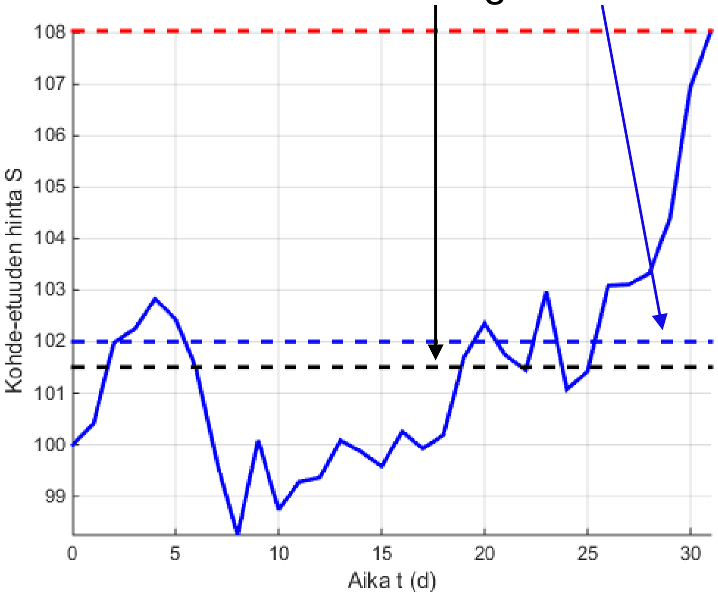
- Monte Carlo -simulointi optioiden hinnoittelussa
  - Yksinkertainen toteuttaa
  - Heikkoutena tehottomuus eli suuri vaadittu simulaatiotoistojen määrä
  - Tehottomuutta voidaa parantaa erilaisin keinoin

Tavoitteet

- Parannuksien vertailu aasialaisen option tapauksessa

- Tuotettujen hintojen vertailu markkinahintojen kanssa

$$f=\max(0,S_{avg} - K)$$



Menetelmä

- Kohde-etuuden hintapolun mallinnus geometrisella Brownin liikkeellä (Black-Scholes-oletus)

- Hintapolun diskretointi

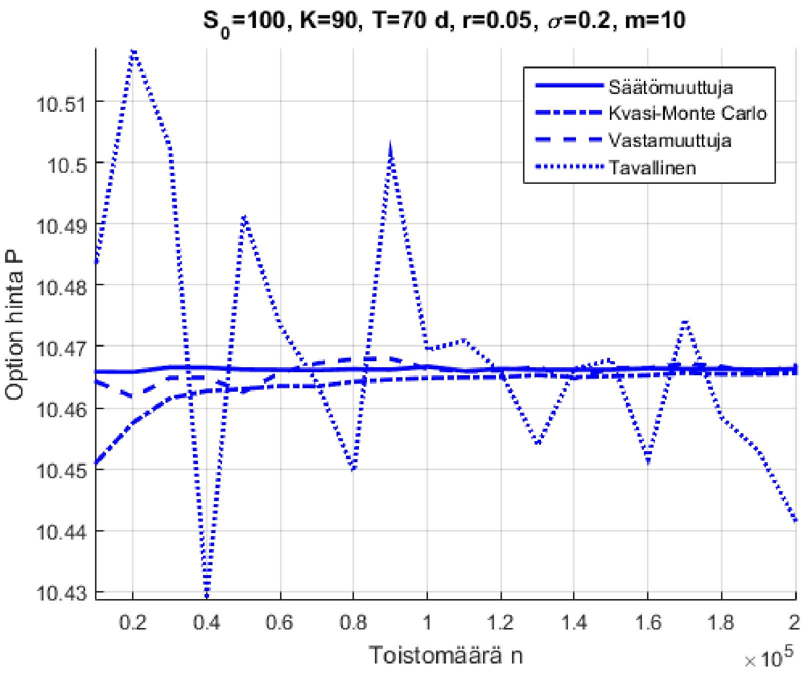
- Diskretoidun polun simulointi
  - Option arvo määritetään kullakin simuloidulla polulla
  - Arvon odotusarvon estimaatti saadaan simuloitujen arvojen keskiarvona
  - Option hinta saadaan diskonttaamalla keskiarvo nykyhetkeen

Menetelmä: Käytettävät parannukset

- Säätömuuttuja
  - Käytetään hyväksi korreloivaa optiota B, jonka analyyttinen ratkaisu P_B tiedetään
  - Estimaattori: $\hat{P}^{cv} = \hat{P}_A + \beta(P_B - \hat{P}_B)$, β skaalausparametri
- Vastamuuttuja
  - Muodostetaan kullakin simulaatiotoistolla kaksi hintapolkua käyttäen toisessa generoitujen satunnaislukujen vastalukuja
- Kvasi-Monte Carlo
  - Tuotetaan hintapolut käyttäen deterministisesti laskettuja lukuja, jotka edustavat satunnaislukujen jakaumaa mahdollisimman tasaisesti

Tulokset: Tehokkuus

- Aasialainen optio
- Kaikki parannukset lisäävät tehokkuutta huomattavasti
- Säätömuuttuja paras – tarkka jo pienimmällä käytetyllä toistomäärällä



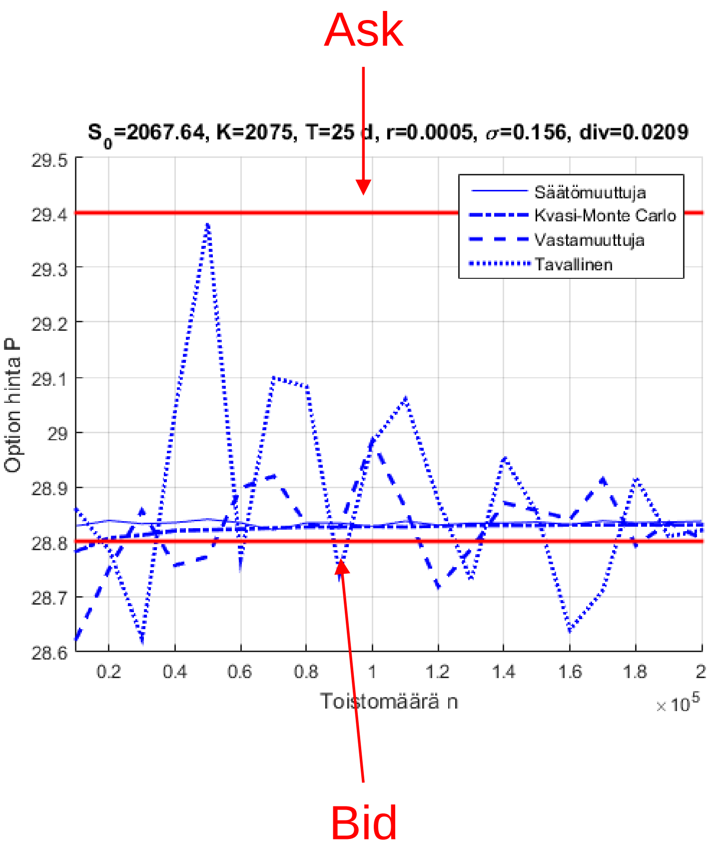
Tulokset: Laskenta-aika

- Parannukset vaikuttavat keskimääräiseen simulaatiotoiston aikaan
- Säätö- ja vastamuuttujat kasvattavat hieman
- Kvasi-Monte Carlo nopeampi – pisteistö valmiiksi laskettuna

Menetelmä	Simulaatiotoiston aika (10^{-4} s)
Tavallinen	1,07
Säätömuuttuja	1,19
Vastamuuttuja	1,38
Kvasi-Monte Carlo	0,17

Tulokset: Hinnoittelukyky

- S&P 500 -indeksioptio
- Volatiliteetti vakio
- Analyyttinen ratkaisu löytyy



Tulokset: Hinnoittelukyky

Toteutushinta K	2050	2060	2065	2070	2075	2100
Bid	45,50	38,80	35,40	32,10	28,80	15,10
Ask	46,60	39,50	36,10	32,80	29,40	15,70
Analyyttinen	41,40	36,02	33,51	31,11	28,83	19,16
Tavallinen	41,61	36,11	33,55	30,94	28,88	19,22
Säätömuuttuja	41,39	36,01	33,50	31,10	**28,83**	**19,16**
Vastamuuttuja	41,41	**36,02**	33,46	**31,11**	28,80	19,13
Kvasi-Monte Carlo	**41,40**	**36,02**	**33,51**	**31,11**	28,84	**19,16**

Johtopäätökset

- Parannusten käyttö kannattavaa
  - Säätömuuttuja kasvattaa tehokkuutta eniten
  - Kvasi-Monte Carlo nopeuttaa simulaatiota
- Hinnoittelukyky heikko
  - Parametrien valinta
  - Oletukset mallissa

Tärkeimmät lähteet

− Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. New York: Springer. ISBN 0-387-00451-3 (sid.), 596 ss.

− Hull, J. C. (2011). *Options, Futures and Other Derivatives.* 8th ed., global ed. Boston, Mass: Pearson Education. ISBN 978-0-273-75907-2, 888 ss.

− Boyle, P. (1977). Options: A Monte Carlo approach. *Journal of Financial Economics*, osa 4(6): 323-338.

− Boyle, P., Broadie, M., Glasserman, P. (1997). Monte Carlo methods for security pricing. *Journal of Economic Dynamics and Control*, osa 21(8-9): 1267-1321.