Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu

Lineaaristen monitavoiteoptimointitehtävien ratkaiseminen Bensonin algoritmilla

Juho Andelmin

21.01.2013

Ohjaaja: *TkT Juuso Liesiö*

Valvoja: *Prof. Raimo P. Hämäläinen*

Systeemianalyysin laboratorio

Lineaarinen monitavoiteoptimointi (MOLP*) -tehtävä

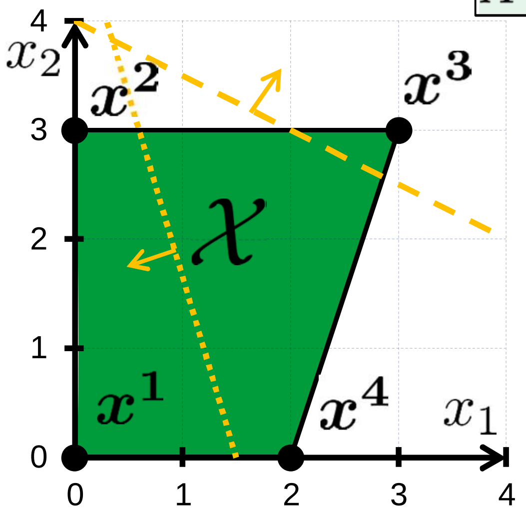
- Lineaariset **kohdefunktiot**, lineaariset rajoitteet

$$\min_{x \in \mathcal{X}} Px$$

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b\}$$

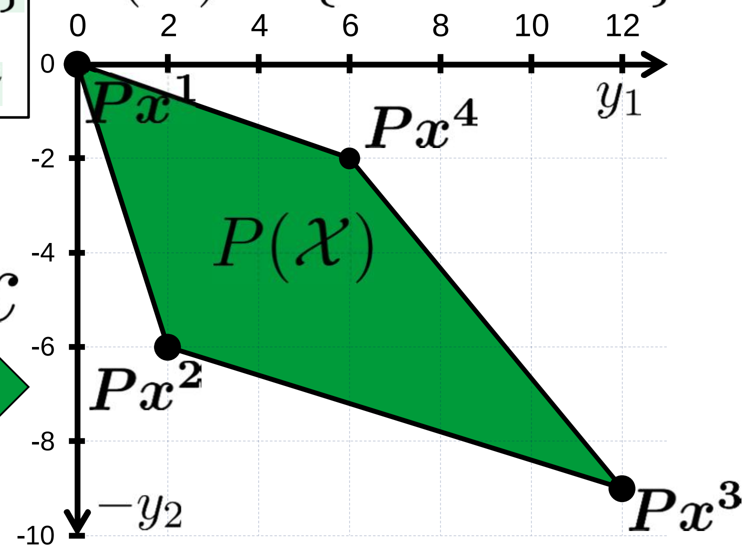
$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, \; P \in \mathbb{R}^{p \times n}$$

Päätösavaruus



$$x \longrightarrow Px$$

$$P(\mathcal{X}) = \{Px : x \in \mathcal{X}\}$$



Tavoiteavaruus

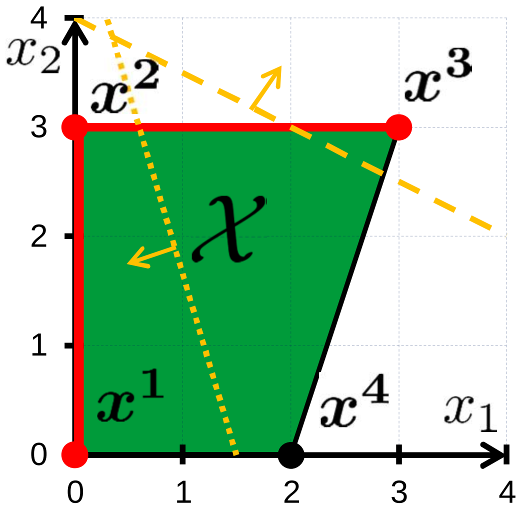
*) MOLP = Multiple Objective Linear Programming

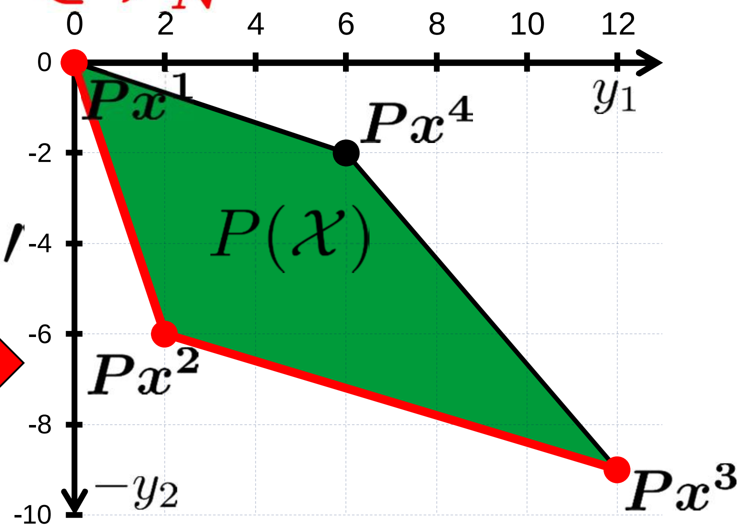
Kalvon tehtävä: Ehrgott: *Multicriteria Optimization,* 2005, s. 154.

MOLP-tehtävän ratkaisut

- Päätösavaruudessa **tehokkaat pisteet** $\mathcal{X}_E$
- Piste $x' \in \mathcal{X}$ on **tehokas**, jos ei ole toista $x \in \mathcal{X}$ siten, että $Px \leq Px'$ ja $Px \neq Px'$
  - Piste $y' = Px'$ on **ei-dominoitu:** $y' \in \mathcal{P}_N$

Päätösavaruus





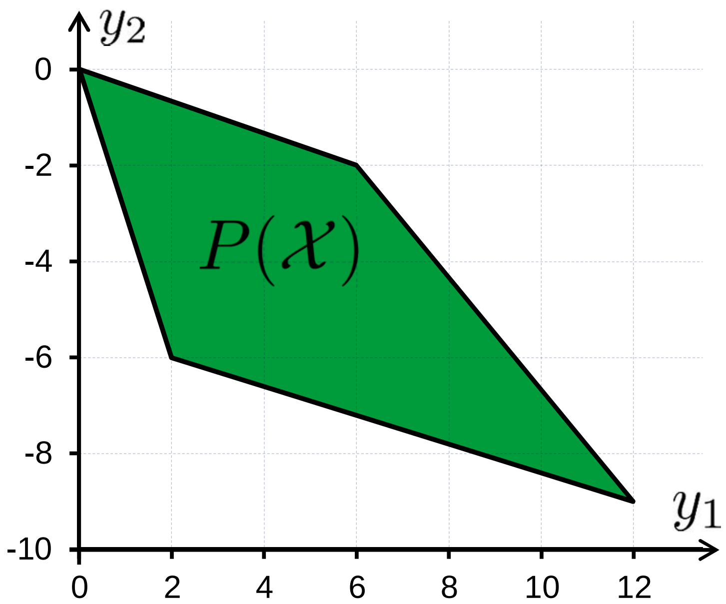
Tavoiteavaruus

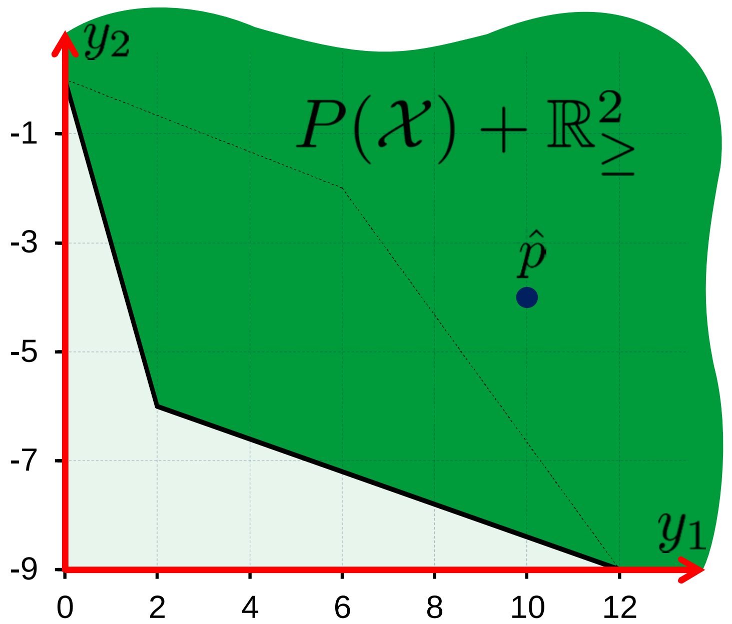
*) MOLP = Multiple Objective Linear Programming

Kalvon tehtävä: Ehrgott: *Multicriteria Optimization,* 2005, s. 154.

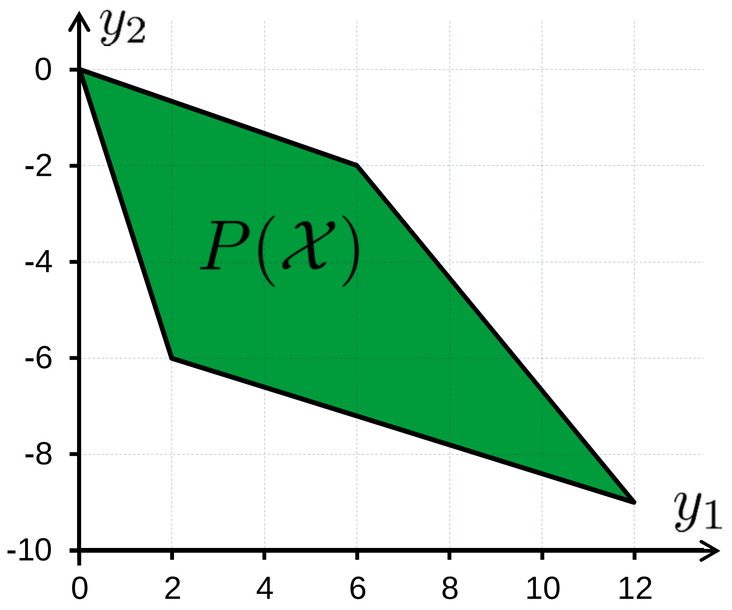
Bensonin algoritmi

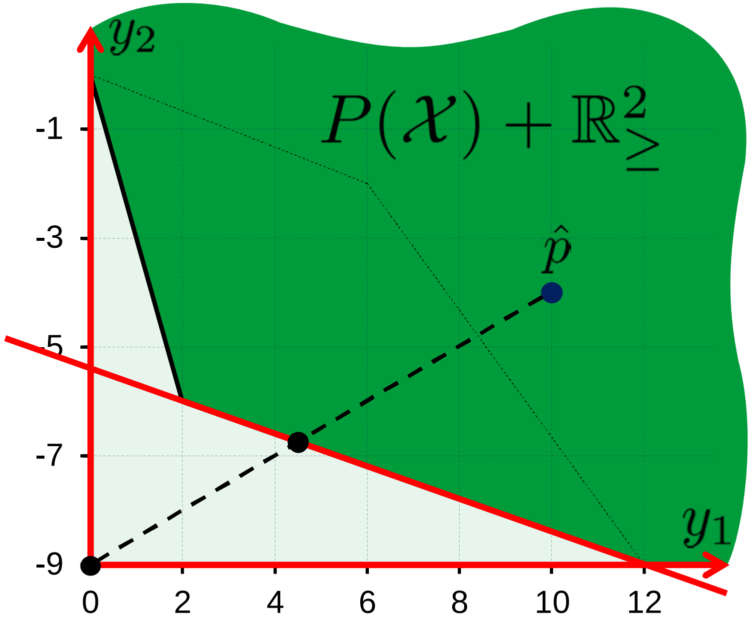
- Standardialgoritmi monitavoite-Simplex ratkaisee MOLP-tehtävät päätösavaruudessa
- Bensonin algoritmi operoi suoraan tavoiteavaruudessa



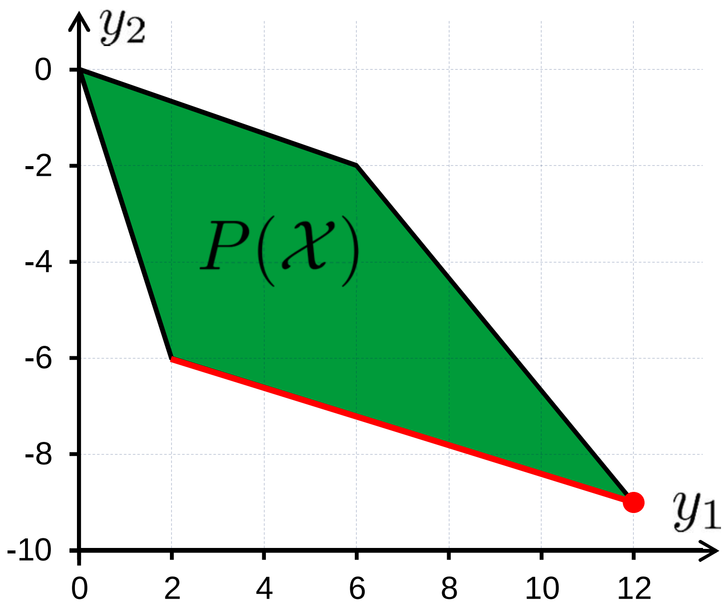


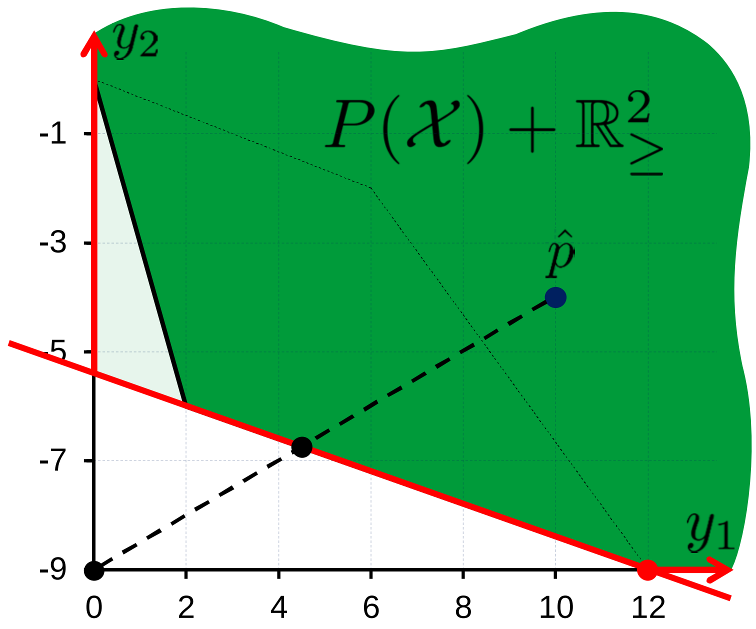
Bensonin algoritmi



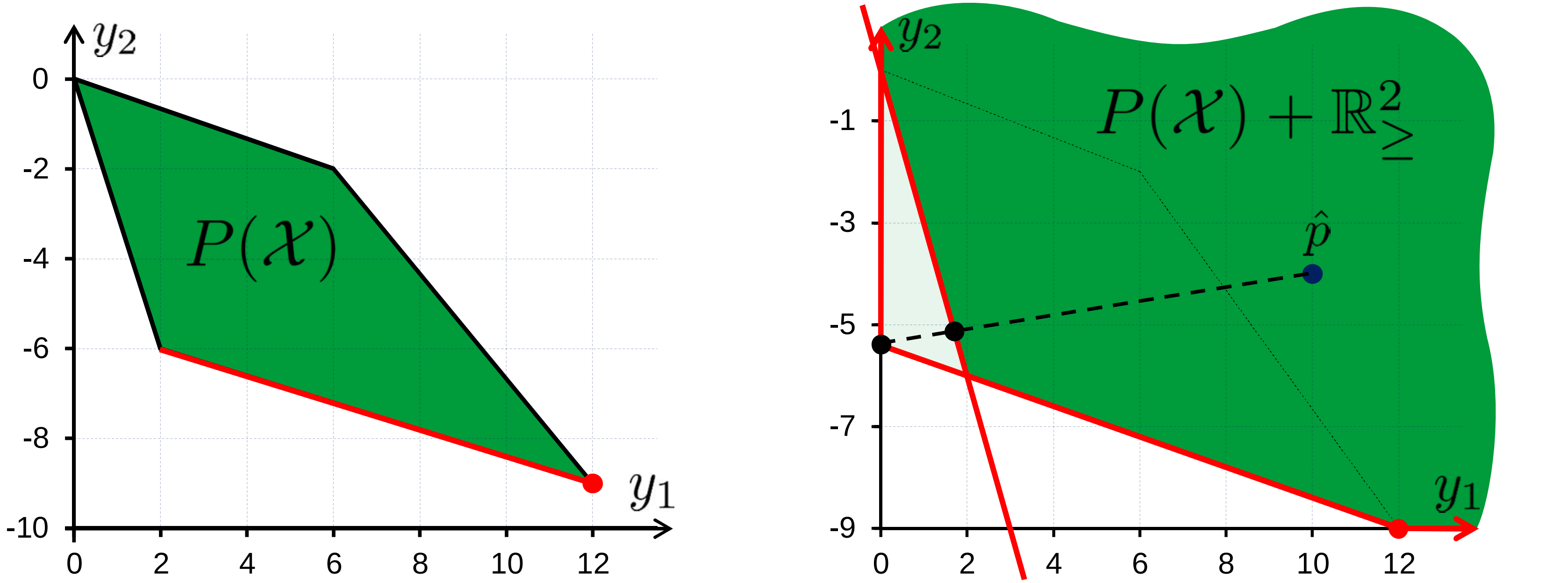


Bensonin algoritmi

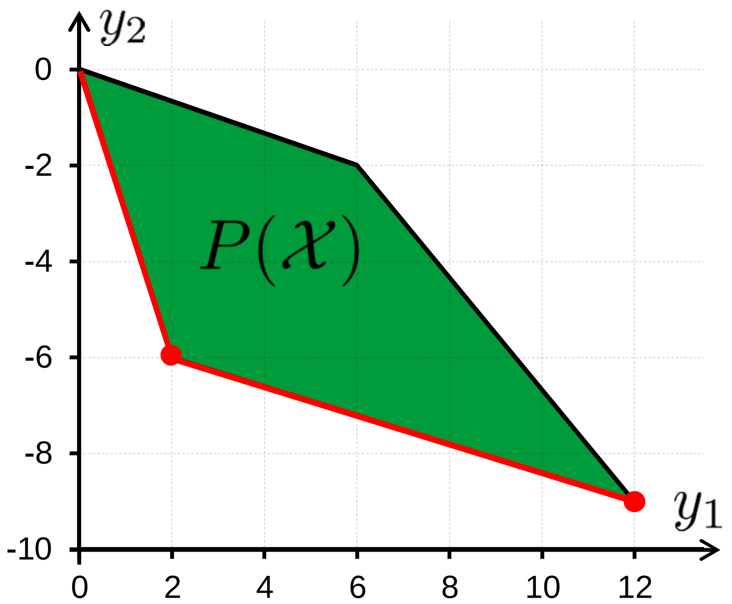


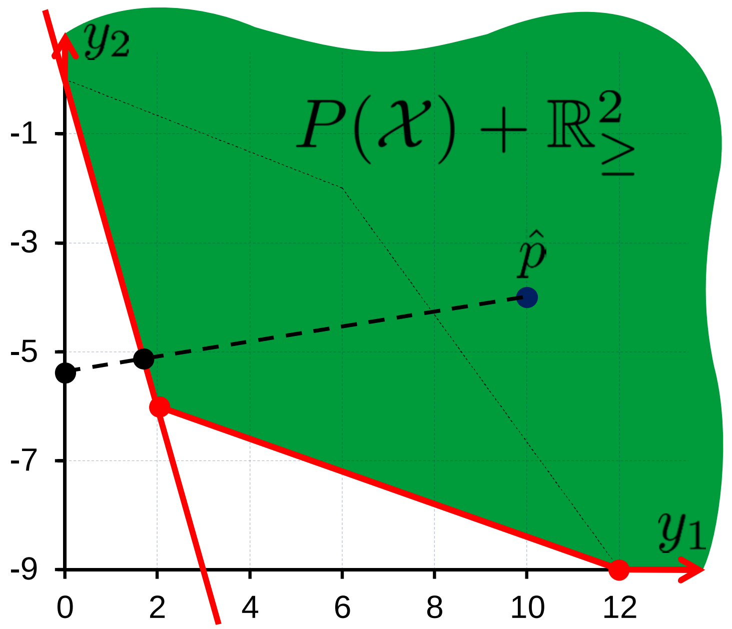


Bensonin algoritmi

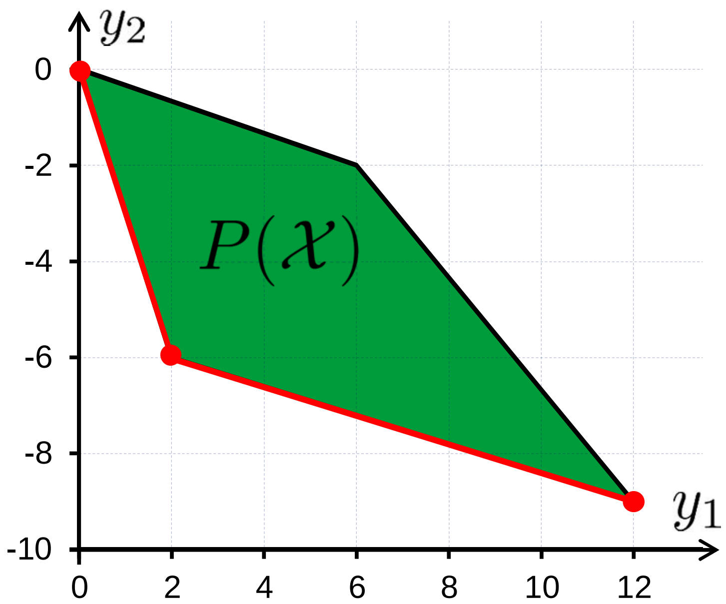


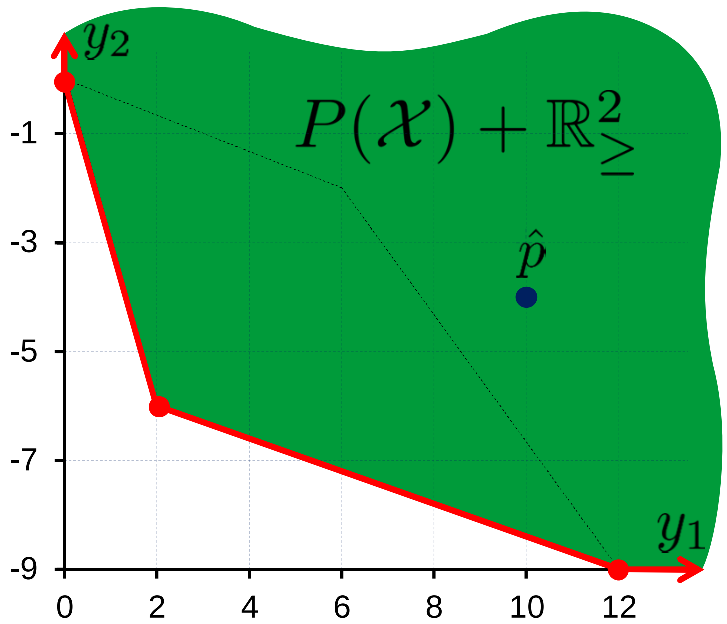
Bensonin algoritmi





Bensonin algoritmi





Sovellus: Resurssien tehokas allokointi*

- Suomalainen kauppaketju, 25 kauppaa (päätöksenteko-yksikköä)
  - 2 resurssia $\boldsymbol{x}$: henkilötyötunnit (h) ja kaupan koko (m^2)
  - 2 tuotosta $\boldsymbol{y}$: myynti ja voitto (Mk)
- Tavoitteena allokoida kasvaneet resurssit **tehokkaasti** yksiköiden kesken siten, että kokonaistuotokset maksimoituvat
- Oletetaan yksiköiden resurssien ja tuotosten muuttuvan samassa suhteessa

*) Korhonen & Syrjänen: *Resource allocation based on efficiency analysis*, 2004

Sovellus: Resurssien tehokas allokointi

$$
\begin{array}{lll}
\max & \Delta y = \Delta y_1 + \cdots + \Delta y_n & \\
\text{s.e.} & \Delta y_i \leq \delta_i y_i, & i = 1, \ldots, n \\
& \Delta x_i \geq \delta_i x_i, & i = 1, \ldots, n \\
& \Delta x_i \geq -0.1 x_i, & i = 1, \ldots, n \\
& \Delta x_i \leq 0.3 x_i, & i = 1, \ldots, n \\
& \Delta x_1 + \cdots + \Delta x_n \leq 0.01 \sum_{i=1}^{n} x_i. &
\end{array}
$$

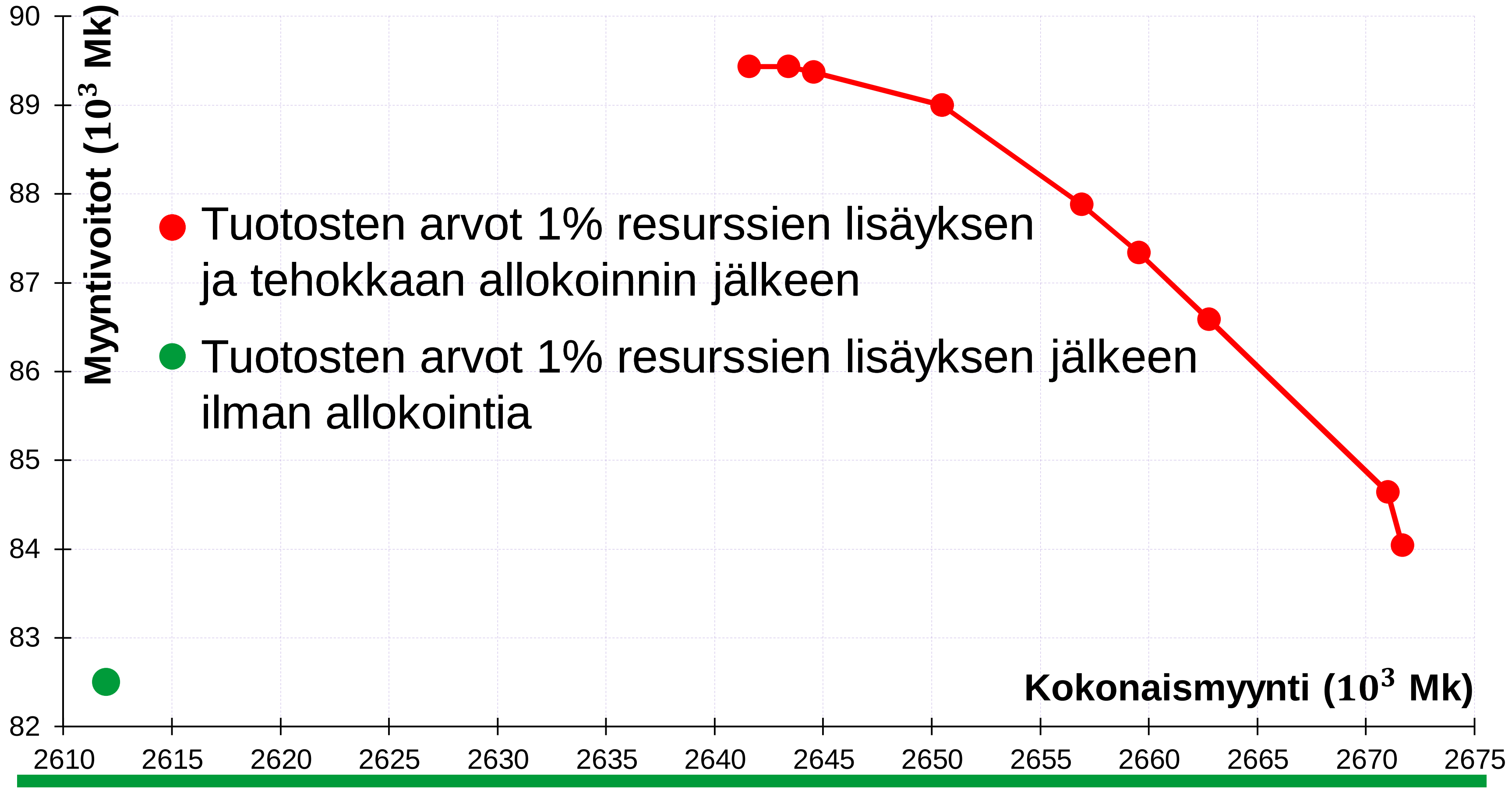
- Yksikölle (kaupalle) i:
  - Δy_i on tuotosten muutos
  - Δx_i on resurssien muutos
  - δ_i on resurssien/tuotosten muutosten skaalauskerroin

Ratkaiseminen Bensonin algoritmilla

- Bensonin algoritmi ratkaisee resurssien allokointitehtävän noin **0.1 sekunnissa** kun taas monitavoite-Simplexillä ratkaisemiseen kuluu useita päiviä
- Tehtävän päätösmuuttujien lukumäärä (125 kpl) on huomattavasti suurempi kuin kohdefunktioiden lukumäärä 2; lisäksi monet tehokkaista pisteistä $\mathcal{X}_E$ kuvautuvat samoiksi ei-dominoiduiksi pisteiksi $\mathcal{P}_N$
  - Tyypillistä käytännön ongelmissa
  - Merkittävä vaikutus Bensonin algoritmin tehokkuuteen

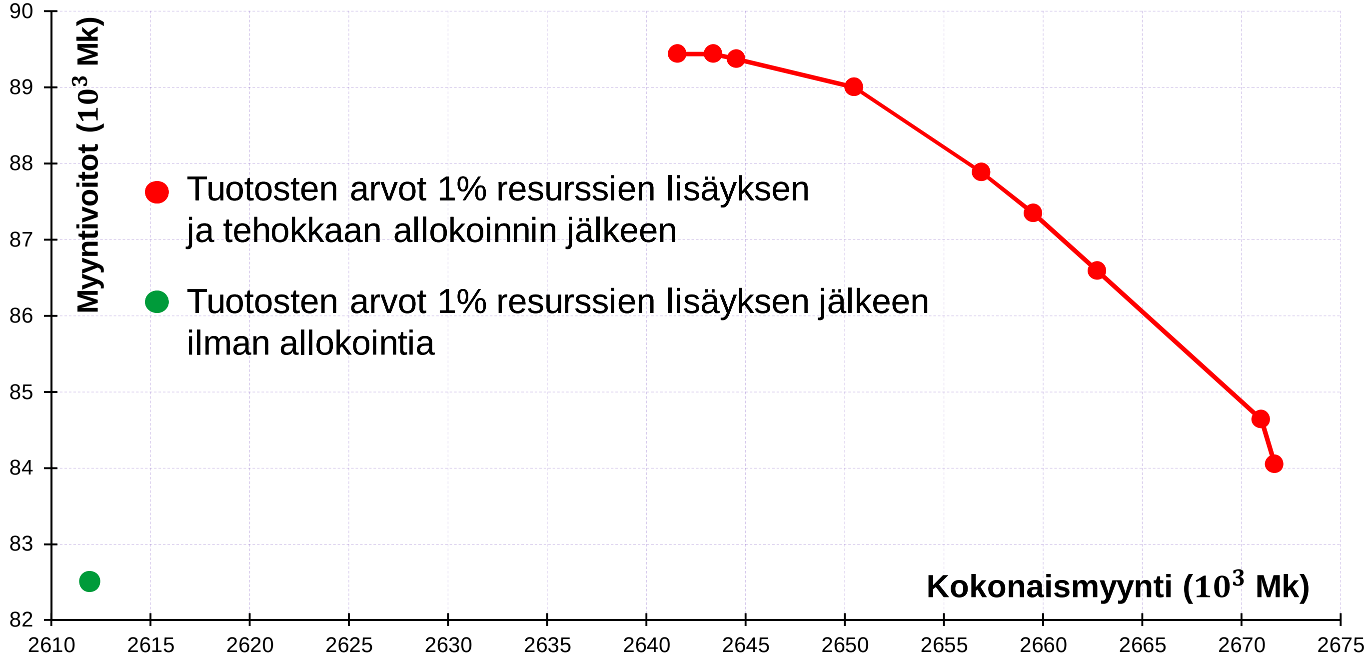
*) Korhonen & Syrjänen: *Resource allocation based on efficiency analysis*, 2004

Resurssien allokoinnin tulokset: Tuotosten arvot (ei-dominoidut pisteet)



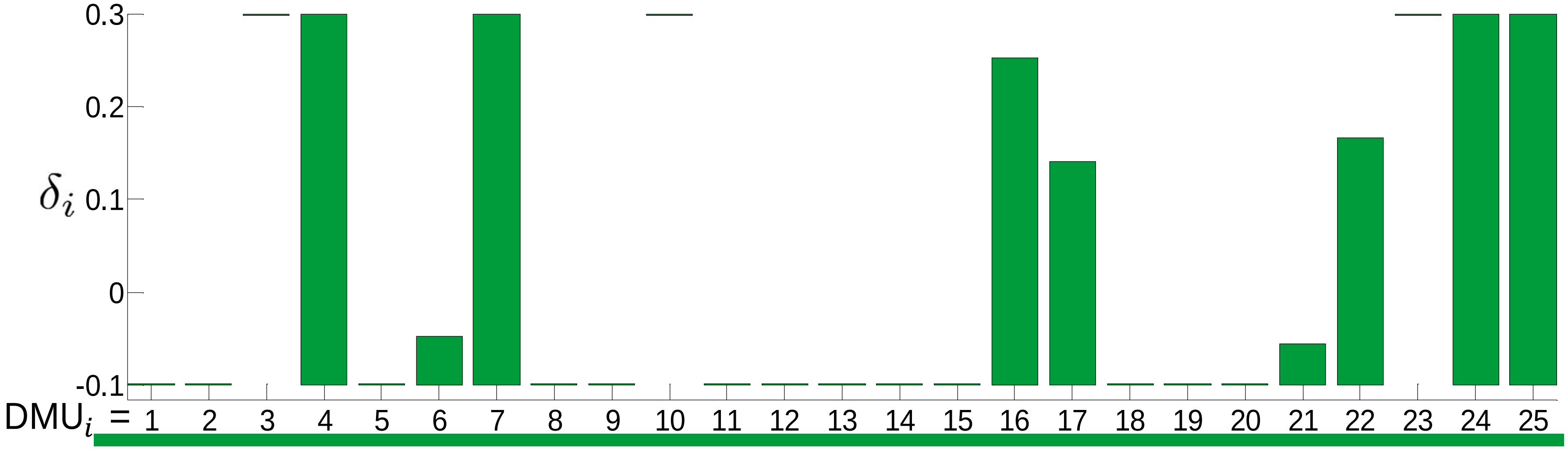
Resurssien allokoinnin tulokset: Tuotosten arvot (ei-dominoidut pisteet)

- Tehokkaalla resurssien allokoinnilla voidaan parantaa kokonaismyyntiä 2.3% tai myyntivoittoa 8.4% verrattuna kaikkien yksiköiden resurssien 1% kasvattamiseen



Skaalauskertoimien δ_i vaihteluvälit

- Skaalauskertoimien δ_i arvoista nähdään yksiköiden resurssien muutokset tehtävän ratkaisuille
- Useimmista kaupoista poistetaan resursseja tehokkaampien kauppojen käyttöön
  - Esim. kauppoihin 3, 10 ja 23 (tehokkuus 1) lisätään aina resursseja

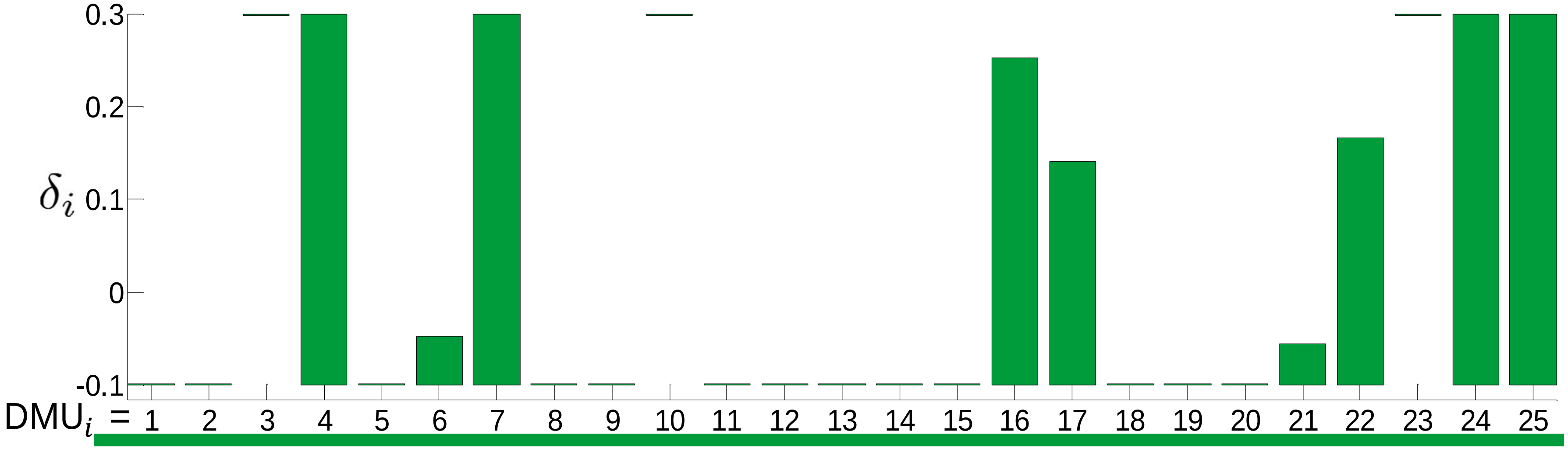


Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu

Systeemianalyysin laboratorio

Skaalauskertoimien δ_i vaihteluvälit

- Kaupoista 6 ja 21 poistetaan aina resursseja vaihtelevasti
- Kauppojen 4, 7, 16, 17, 22, 24 ja 25 resurssit voivat joko kasvaa tai laskea
  - Resurssien muutokset riippuvat siitä, panostetaanko enemmän kokonaismyyntiin vai myyntivoittoihin



Aalto-yliopisto
Perustieteiden korkeakoulu

Systeemianalyysin laboratorio

Yhteenveto

- Bensonin algoritmi ratkaisee MOLP-tehtävät tavoite-avaruudessa; standardialgoritmi monitavoite-Simplex taas päätösavaruudessa
- Käytännön ongelmissa kohdefunktioita on usein merkittävästi vähemmän kuin päätösmuuttujia (10-100x tai enemmän)
  - Päätösavaruudessa ratkaiseminen raskasta
  - Bensonin algoritmi varteenotettava vaihtoehto
- Työssä sovellettiin algoritmia käytännön ongelmaan, ja algoritmi osoittautui uskomattoman tehokkaaksi
- Jatkotutkimuksena algoritmia voitaisiin kehittää ratkaisemaan konvekseja monitavoiteoptimointitehtäviä likimääräisesti

Tietolähteet/Aineistot

- Benson, H. (1998). **An outer approximation algorithm for generating all efficient extreme points in the outcome set of a multiple objective linear programming problem**. Journal of Global Optimization, 13:1–24.
- Charnes, A., Cooper, W. W., Rhodes, E., (1978). **Measuring the efficiency of decision making units**, European Journal of Operational Research 2/6, s. 429-444.
- Ehrgott, M. (2005). **Multicriteria Optimization**. Springer Berlin, second edition.
- Korhonen, P., Syrjänen, M. (2004). **Resource allocation based on efficiency analysis**. Management Science, 50(8):1134–1144.

Tietolähteet/Aineistot

- Löhne, A. (2011). **Vector Optimization with Infimum and Supremum**. Springer Heidelberg, Dordrecht, London, Newyork, first edition.
- Löhne, A. (2012). bensolve-1.2. Matlab implementation of Benson's algorithm to solve linear vector optimization problems. http://ito.mathematik.uni-halle.de/~loehne/page_en/downloads.php. Accessed: 03/01/2013.
- Makhorin, A. (2006). GLPK (GNU Linear Programming Kit). http://www.gnu.org/software/glpk/. Accessed: 05/02/2013.