



Aalto-yliopisto
Perustieteiden
korkeakoulu

Lineaaristen monitavoiteoptimointitehtävien ratkaiseminen Bensonin algoritmilla

Juho Andelmin

21.01.2013

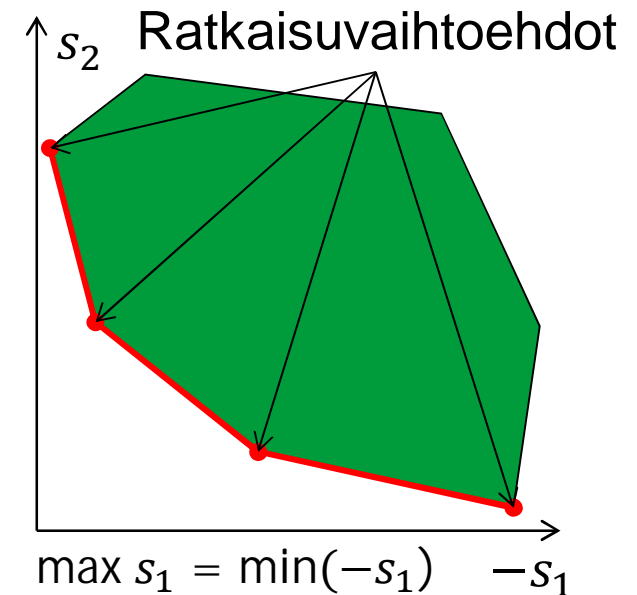
Ohjaaja: *TkT Juuso Liesiö*

Valvoja: *Prof. Raimo P. Hämmäläinen*

Työn saa tallentaa ja julkistaa Aalto-yliopiston avoimilla verkkosivuilla. Muilta osin kaikki oikeudet pidätetään.

Lineaarinen monitavoiteoptimointi (MOLP)

- ❑ MOLP: Lineaaristen kohdefunktioiden optimointia lineaaristen rajoitusehtojen määräämässä alueessa
- ❑ Esimerkki: Syöpäkasvaimen sädehoito
 - Maksimoi kasvaimen osuva säteily
 - Minimoi kriittisiin elimiin osuva säteily
- ❑ Tavallisesti ei yhtä optimiratkaisua
 - Useita ”kompromissiratkaisuja”
 - Päätöksentekijä valitsee parhaan



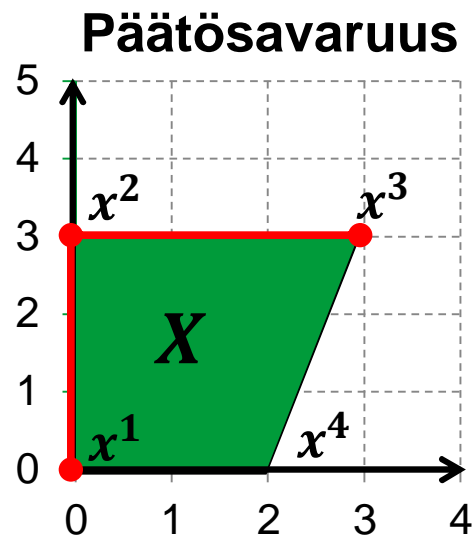
MOLP-tehtävän määrittely

- MOLP-tehtävä voidaan aina esittää minimointitehtävänä $\min_{x \in X} Px$, $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$; $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
 - X on päätösavaruuden käypä joukko $b \in \mathbb{R}^m$
 - $\mathcal{P} = \{Px : x \in X\}$ on tavoiteavaruuden käypä joukko
 - $P \in \mathbb{R}^{p \times n}$ rivit koostuvat kohdefunktioiden kertoimista
- Tehtävän ratkaisujoukko päätösavaruudessa muodostuu tehokkaista pisteistä X_E
 - Piste $x' \in X$ on tehokas, mikäli ei ole toista $x \in X$ siten, että $Px \leq Px'$ ja $Px \neq Px'$

Esimerkki MOLP-tehtävästä

□ Tehtävän ratkaisujoukko tavoiteavaruudessa muodostuu ei-dominoiduista pisteistä \mathcal{P}_N

- Piste $y' = Px'$ on ei-dominoitu, jos x' on tehokas

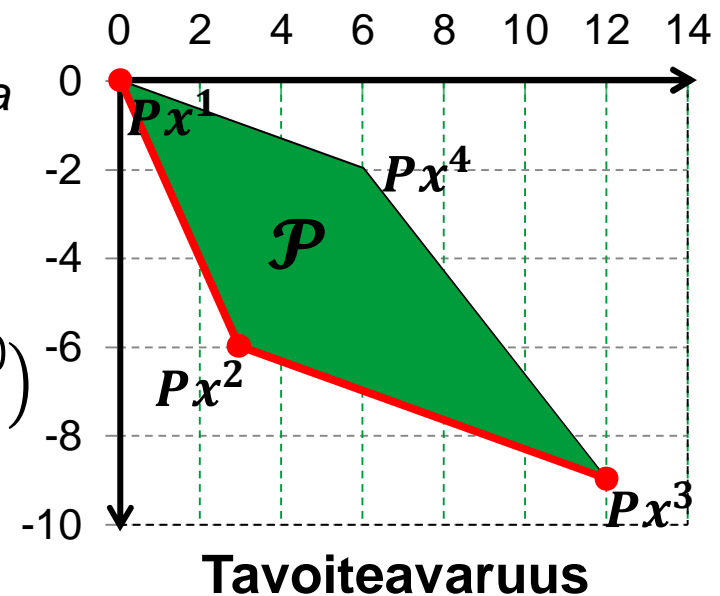


Esimerkki
(Ehrgott, *Multicriteria Optimization*, 2005)

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$



MOLP-tehtävän ratkaiseminen päätösavaruudessa

- ❑ Generoidaan tehokkaat pisteet X_E (esim. monitavoite-Simplex tai sisäpistemenetelmä)
- ❑ Esitetään X_E tai osa siitä päätöksentekijälle, joka valitsee parhaan vaihtoehdon
- ❑ Voidaan myös vertailla tavoitearvoja \mathcal{P}_N
 - Saadaan suoraan laskemalla $\mathcal{P}_N = \{P\mathbf{x} : \mathbf{x} \in X_E\}$
- ❑ Soveltuu hyvin pienille tai keskikokoisille tehtäville
- ❑ Suurempien tehtävien kanssa ongelmia

Päätösavaruudessa ratkaisemisen haasteet

- ❑ Tehokkaiden pisteiden X_E määrä kasvaa eksponentiaalisesti MOLP-tehtävän koon mukaan
- ❑ Algoritmit vaativat tavallisesti runsaasti kirjanpitoa ja perääntymistä (Backtracking)
- ❑ Paljon turhia laskutoimituksia
 - Monta tehokasta pistettä kuvautuu samaksi tavoiteavaruuden pisteeksi

Esimerkki (Benson, 1998)
4 kohdefunktiota:

n	m	X_E
30	25	7246
50	50	83 781
60	50	>200 000

Tavoiteavaruudessa ratkaisemisen hyödyt

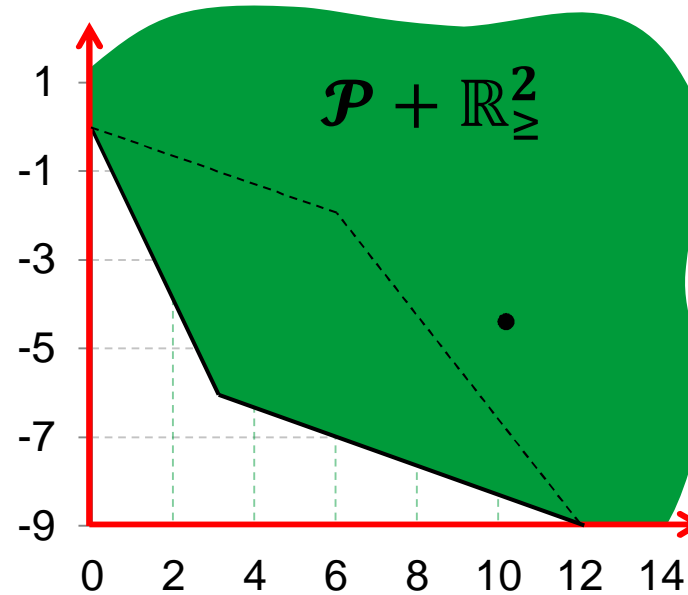
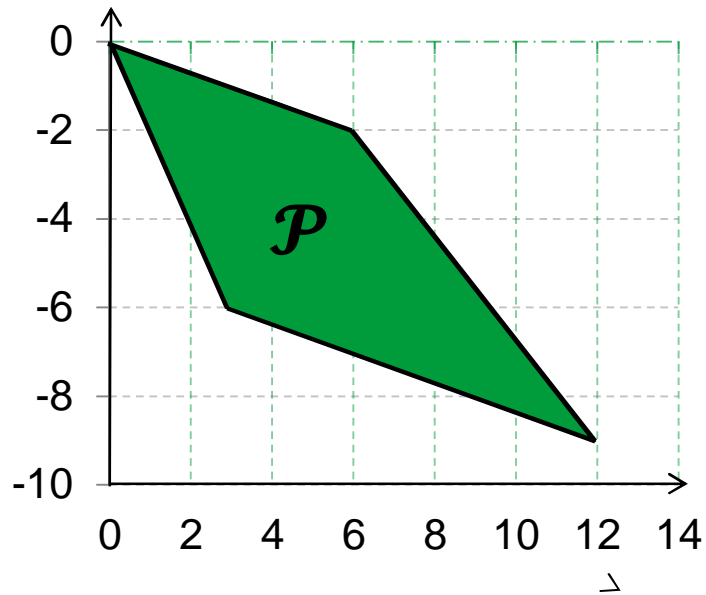
- ❑ Tehtävä voidaan ratkaista suoraan tavoiteavaruudessa generoimalla ei-dominoidut pisteet \mathcal{P}_N
- ❑ Käytännön ongelmissa tavoiteavaruuden dimensio usein merkittävästi pienempi kuin päätösavaruuden
 - Usein kertaluokkaa 10-100 (tai enemmän)
 - Ratkaiseminen on oletettavasti tehokkaampaa
- ❑ Päätöksentekijä vertailee mieluummin tavoitearvoja kuin niihin johtaneita päätöksiä
- ❑ Ei turhia laskutoimituksia (vertaa: päätösavaruudessa monta pistettä vastaa yhtä tavoiteavaruuden pistettä)

Kandidaatintyön tavoitteet

- ❑ Kandidaatintyössä tutkitaan **Bensonin algoritmia**
- ❑ Algoritmi muodostaa ei-dominoitujen pisteiden joukon suoraan tavoiteavaruudessa
- ❑ Tavoitteena on esittää algoritmin toiminta ja todentaa sen hyödyllisyys:
 1. **Testaamalla** satunnaisesti generoiduilla tehtävillä
 2. **Soveltamalla** johonkin käytännön ongelmaan
 3. **Vertaamalla** tuloksia monitavoite-Simplexin vastaaviin
- ❑ Lisäksi lasketaan tehokkaat pisteet vastaavista ei-dominoiduista pisteistä

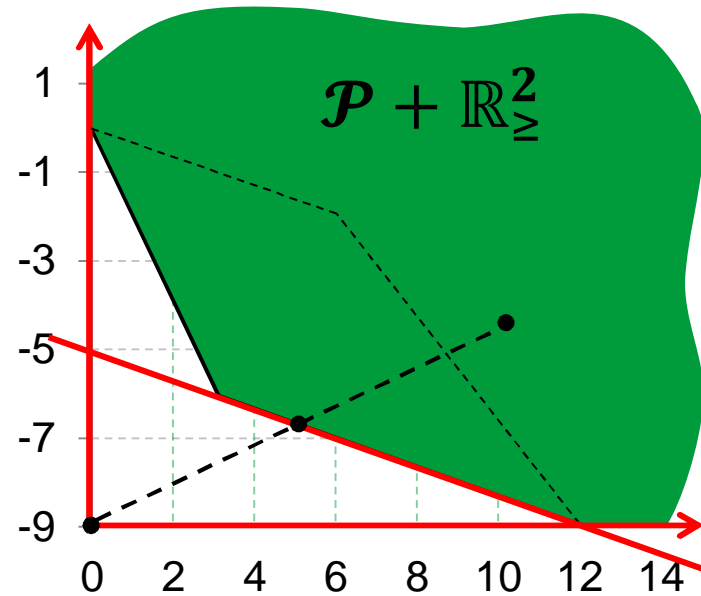
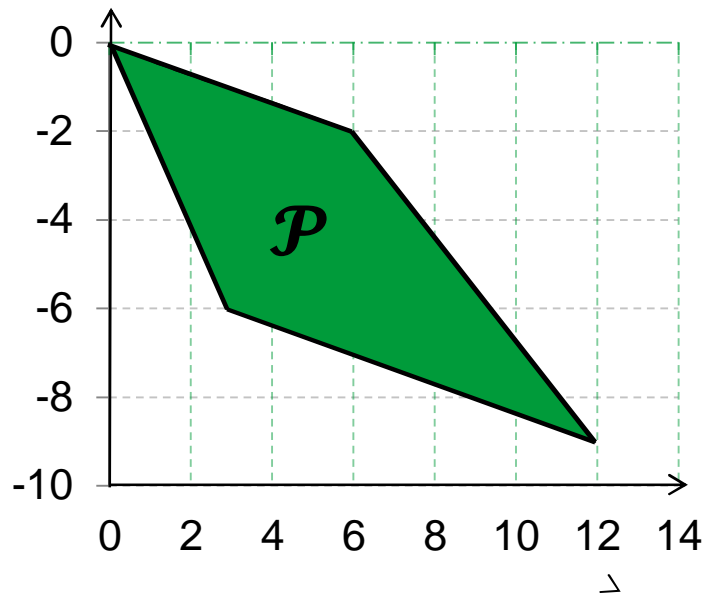
Bensonin algoritmi: Esimerkki

□ Esimerkki:



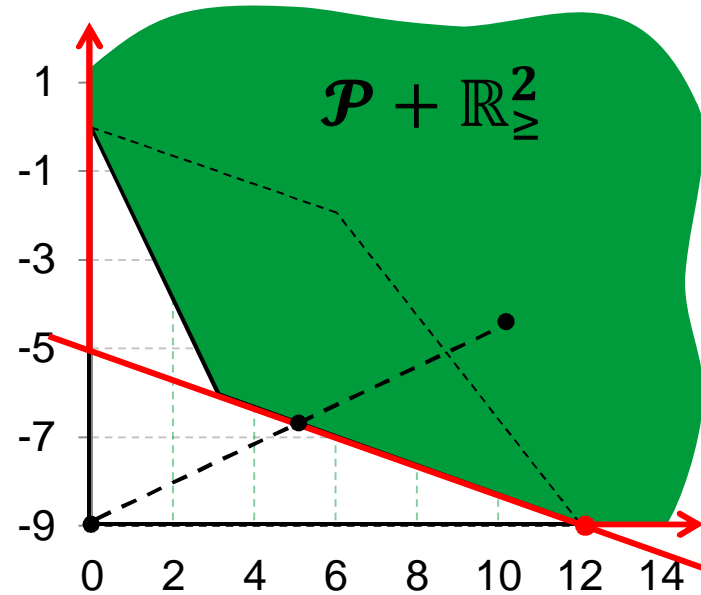
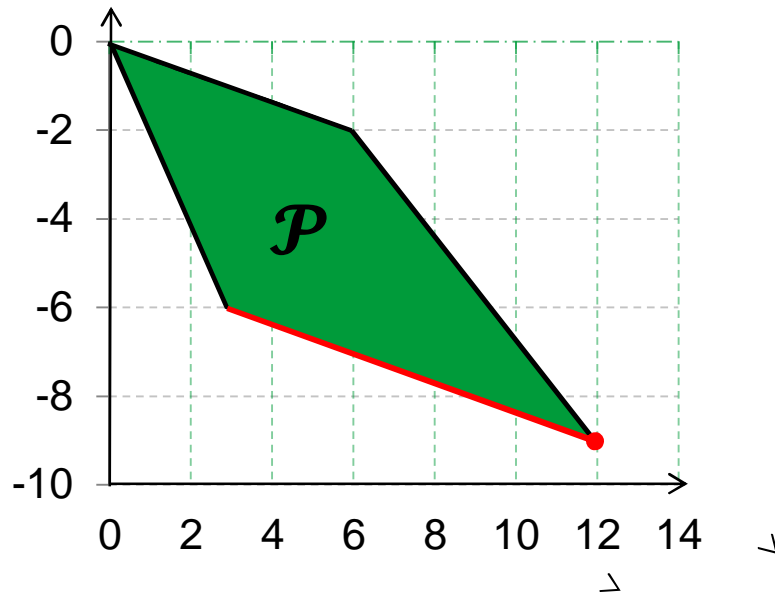
Bensonin algoritmi: Esimerkki

□ Esimerkki:



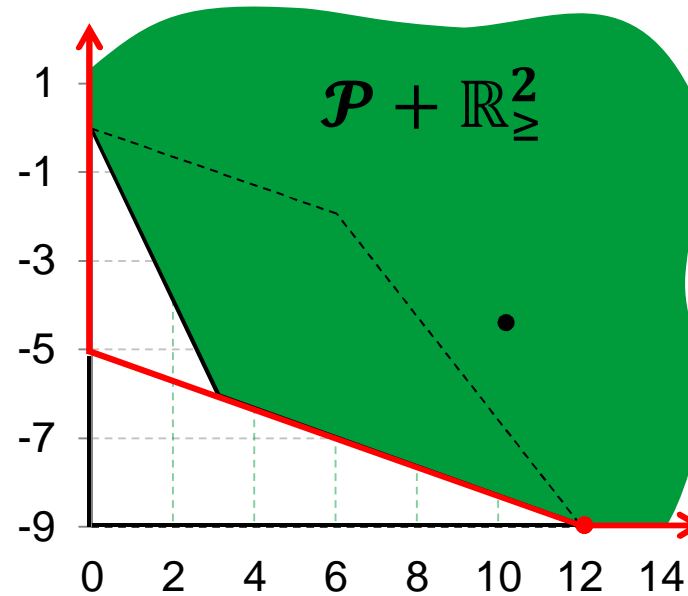
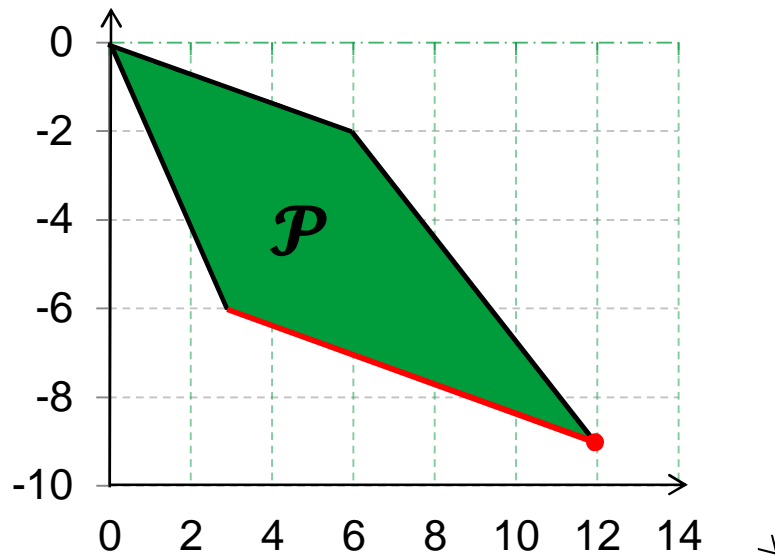
Bensonin algoritmi: Esimerkki

□ Esimerkki:



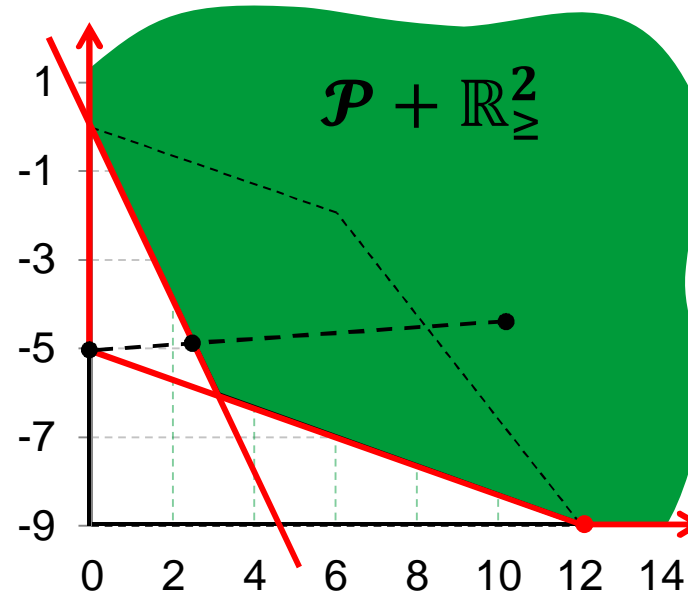
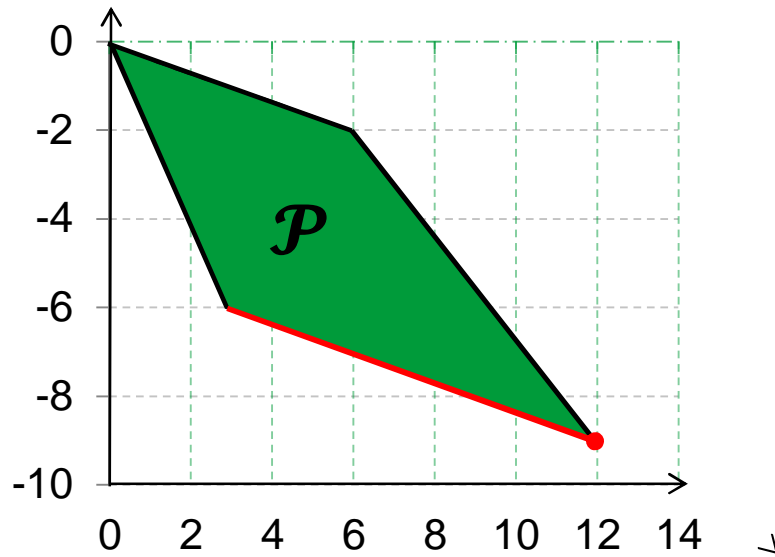
Bensonin algoritmi: Esimerkki

□ Esimerkki:



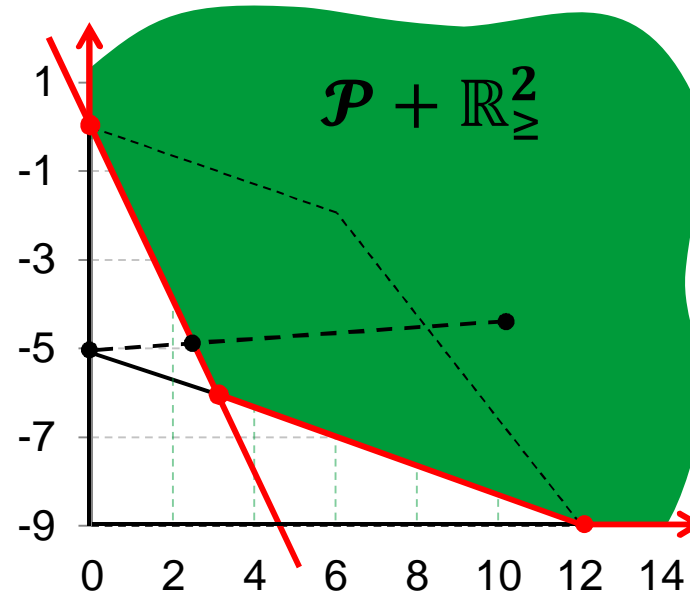
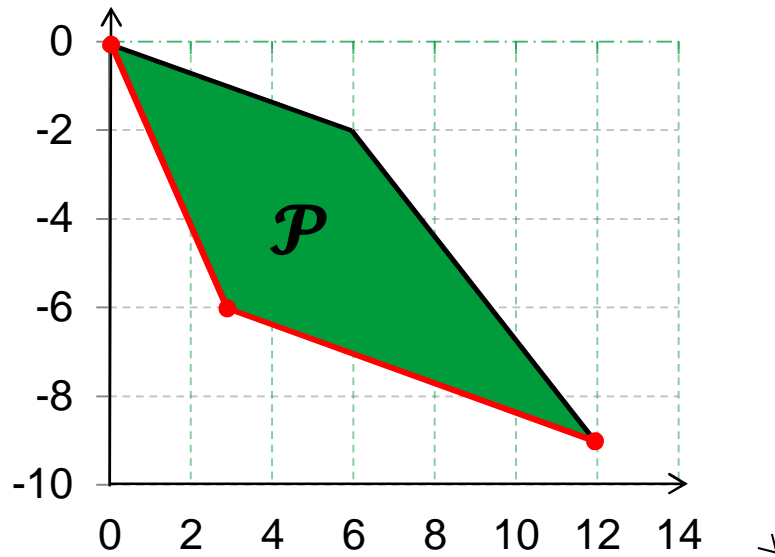
Bensonin algoritmi: Esimerkki

□ Esimerkki:



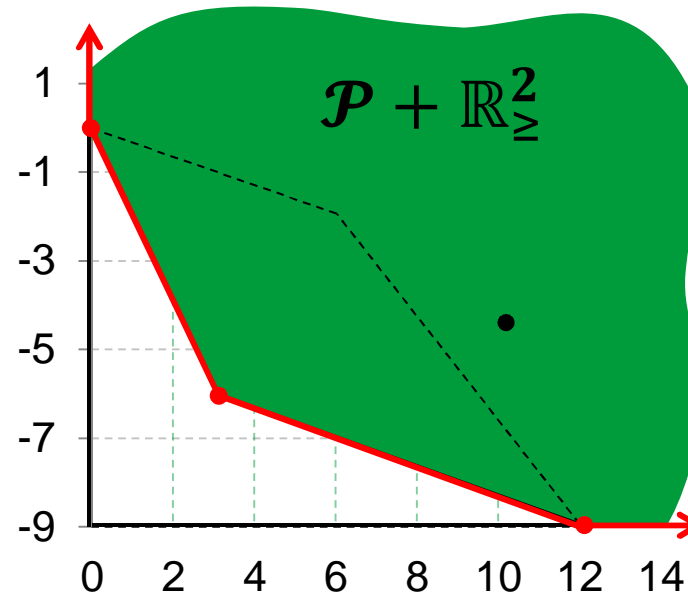
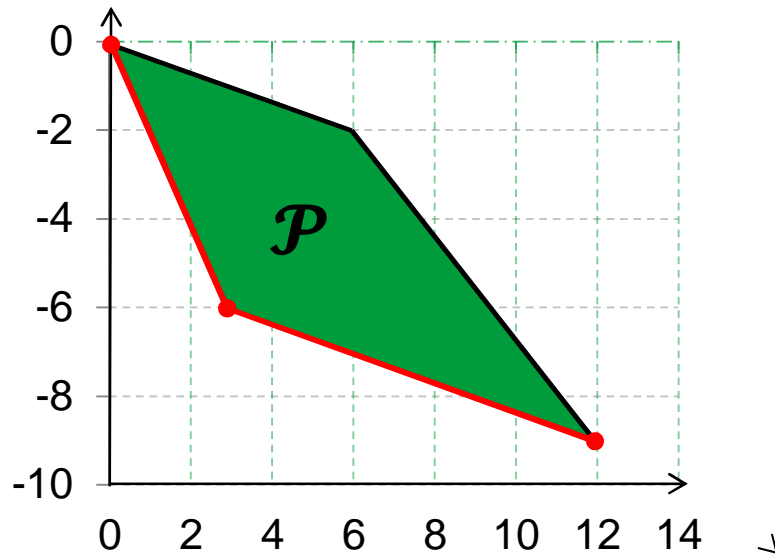
Bensonin algoritmi: Esimerkki

□ Esimerkki:



Bensonin algoritmi: Esimerkki

□ Esimerkki:



Tietolähteet/Aineistot

- H. Benson: *An Outer Approximation Algorithm for Generating all Efficient Extreme Points in the Outcome set of a Multiple Objective Linear Programming Problem* (1998)
 - Bensonin algoritmin alkuperäinen julkaisu
- A. Löhne: *Vector Optimization with Infimum and Supremum* (2011)
 - Bensonin algoritmin paranneltu variaatio sekä uusia ideoita monitavoiteoptimoinnin ratkaisukäsitteistä
- M. Ehrgott: *Multicriteria Optimization* (2005)
 - MOLP-tehtävien teoriaa ja ratkaisukäsitteitä

Lisää tietolähteitä ja työkalut

- ❑ P. Korhonen & M. Syrjänen: *Resource Allocation Based on Efficiency Analysis* (2004)
 - Mahdollinen käytännön esimerkki
- ❑ Lisäksi useita internetistä löytyviä aiheeseen liittyviä julkaisuja (esimerkiksi artikkeleita alan lehdistä)
- ❑ Algoritmin testaamiseen käytetään Matlabia. Algoritmin toteutuksena käytetään A. Lönnen bensolve1.2 pakettia http://ito.mathematik.uni-halle.de/~loehne/index_en.php
- ❑ Algoritmissa tarvitaan LP-ratkaisijaa; käytetään K. Fukudan ohjelmoiman CDD paketin CDDMEX Matlab-rajapintaa <http://control.ee.ethz.ch/~hybrid/cdd.php>

Aikataulu

- ❑ **11/2012** Aineistoon tutustuminen
- ❑ **12/2012** Työn kirjoittaminen
- ❑ **01/2013** Aiheen esittely
- ❑ **01/2013** Työn ensimmäinen versio valmis
- ❑ **02/2013** Työ valmis
- ❑ **03/2013** Valmiin työn esittely